



# Le equazioni fondamentali della Meccanica dei fluidi e dell'Idraulica

APPENDICE

Q

**(Nota)** Il documento riportato in questa appendice ha fatto riferimento ai seguenti testi: "Meccanica dei Fluidi"; E. MARCHI; A. RUBATTA; "Idraulica"; D. CITRINI; G. NOSEDA. A tali testi si rimanda per maggiori approfondimenti.

*Viene riportata in questa appendice una parte di uno studio fatto dallo scrivente in merito al moto dei fluidi viscosi (fluidi Newtoniani) e all'equazione dell'energia. L'approfondimento di questo argomento trova la sua origine da un'interessante collaborazione con il Dipartimento di Ingegneria dell'Università La Sapienza di Roma, sulla bonifica degli acquiferi contaminati da idrocarburi.*

---

## Q.1 L'EQUAZIONE DI NAVIER STOKES<sup>(†)</sup>

### Q.1.1 IL TENSORE DEGLI SFORZI NEI FLUIDI VISCOSI

Lo stato di sforzo di un fluido può pensarsi, sostanzialmente, come il risultato della sovrapposizione di due distinti contributi: uno dovuto alla componente idrostatica – costituita, quindi, dalla sola pressione (sforzo puramente normale) – la rimanente causata dall'azione della viscosità, la quale si estrinseca solo durante i movimenti dei singoli elementi fluidi, con cui può pensarsi scomposta l'intera massa fluida.

Il primo contributo caratterizza perfettamente il fluido cosiddetto "perfetto", in quanto, come tale, non presenta sforzi di taglio ma solo componenti di forze normali in ogni punto della pellicola che riveste qualsiasi elemento fluido cui può pensarsi "smembrata" l'intera massa fluida. Ciò posto, possiamo pensare di scomporre il tensore degli sforzi nella somma di una parte che potremmo definire, appunto, "idrostatica" e di una parte che trae origine dal solo movimento degli elementi fluidi e che chiameremo "deviatore degli sforzi". Concettualmente, quindi, è possibile esprimere il tensore degli sforzi come la somma di due tensori: un tensore idrostatico (sola componente idrostatica: tensore diagonale) e un tensore legato alla viscosità del fluido.

---

<sup>†</sup> I concetti ai quali si fa riferimento in questa appendice sono propri della Meccanica dei Fluidi. Pertanto, per un maggiore approfondimento sul concetto di campo tensoriale del II° ordine ("tensore degli sforzi"; "tensore delle velocità"); sul concetto di "divergenza", ecc. si rimanda ai testi consigliati nella nota sopra riportata.





• APPENDICE-Q  
 874 • **Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica**

Il tensore degli sforzi risulta legato direttamente allo stato di deformazione locale del fluido e alla velocità di deformazione locale in atto. In sintesi, si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{xx} - p & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} - p & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} - p \end{bmatrix}. \quad [\text{Q.1}]$$

Si può osservare che, quando il fluido raggiunge la quiete, il secondo tensore a secondo membro si deve annullare, dovendo rimanere il solo primo tensore a testimoniare l'esistenza dell'equilibrio statico: fluido fermo! Prima di procedere oltre, si ponga l'attenzione sul concetto viscosità. È noto che la viscosità agisce solo quando è presente un movimento in seno al fluido tra gli elementi che lo compongono. È noto, altresì, che il movimento generico di una singola particella fluida elementare (a meno della traslazione rigida) può scomporsi, in ogni istante del suo moto, in tre differenti tipi di movimento (in virtù dell'esistenza dei *potenziali di Stokes* sui campi vettoriali delle velocità):

- rotazione rigida (particella che ruota come un tutt'uno rigido: nessuna variazione di volume, nessuna variazione di forma): *componente rotazionale*;
- distorsione isotropa: deformazione *anisocora* (*componente irrotazionale*). Particella che, senza ruotare, si dilata o si contrae in maniera omogenea lungo ogni direzione spaziale: la particella, in sostanza, senza ruotare conserva inalterata la sua forma, ma non il suo volume;
- deformazione a volume costante (*componente irrotazionale con deformazione isocora associata ad un campo solenoidale di velocità*): la particella fluida nel suo moto cambia forma e, senza ruotare, mantiene inalterato il suo volume.

Tutti assieme, e contemporaneamente sovrapposti in ogni istante, questi tipi di movimento contribuiscono a determinare la componente totale del movimento della singola particella fluida nel suo qualsivoglia moto. Si può, dunque, pensare il movimento della singola particella come composto da una componente di movimento in cui varia solo il volume (*cinematismo anisocoro*) e una componente di movimento in cui non varia il volume (*cinematismo isocoro*). Analogamente, il moto si può pensare anche come composto da una componente irrotazionale (*traslazione e distorsione pura* dell'elemento fluido) e da una componente rotazionale (*rotazione rigida* dell'elemento fluido). Volendo, quindi, esprimere la funzione velocità con cui si svolge il moto, presente istante per istante nell'intorno del punto del campo  $\mathbf{x}_0$ , si scrive come noto:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{L}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{S}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \quad [\text{Q.2}]$$

dove i simboli in neretto, presenti nello sviluppo in serie del 1° ordine, significano:

- $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  vettore velocità nel punto individuato dal vettore di posizione  $\mathbf{x}$ ;
- $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  vettore velocità nel punto individuato dal vettore di posizione  $\mathbf{x}_0$ ;





- $\Omega(\mathbf{x}_0)$  è il tensore delle velocità di rotazione rigida (calcolato nel punto  $\mathbf{x}_0$ );
- $\mathbf{L}(\mathbf{x}_0)$  è la componente isotropa del tensore delle velocità di deformazione (calcolato nel punto  $\mathbf{x}_0$ );
- $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$  è il tensore delle velocità di rotazione rigida (calcolato nel punto  $\mathbf{x}_0$ ).

**La viscosità per taglio.** Come noto, la viscosità  $\mu$  agisce tramite sforzi tangenziali in seno al fluido. La legge che caratterizza il legame locale tra parametro viscosità e sforzi tangenziali è l'equazione di NEWTON; in cui, sostanzialmente, si afferma che dove ci sono i maggiori gradienti di velocità (quindi, in sostanza, dove sono presenti le più intense deformazioni) lì ci sono i più intensi sforzi di taglio (attriti). Lo sforzo di taglio puro risulta legato ad una *velocità di deformazione angolare* dell'elemento fluido (eq. Q.3).

**Viscosità per variazione di volume.** In maniera del tutto analoga, si può pensare di definire ed introdurre una viscosità  $\mu'$ , legata all'entità degli sforzi conseguenti ai soli moti di contrazione o dilatazione del volume (quindi, più genericamente, un parametro legato alla velocità di variazione del volume dell'elemento fluido). Infatti, come la viscosità  $\mu$  è legata alla velocità di deformazione angolare  $d\gamma_{kj}/dt$  (nel piano cartesiano  $x_k; x_j$ ) dell'elemento fluido, tramite appunto la legge di NEWTON, per cui risulta:

$$T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right); \quad [\text{Q.3}]$$

così, analogamente, si può legare il parametro  $\mu'$  alla *velocità di dilatazione* (o *contrazione*) per unità di volume ( $div\mathbf{v}$ ) della particella di fluido elementare tramite l'introduzione di uno sforzo, in virtù del quale risulti:<sup>(Q.1)</sup>

$$\Delta p_{kk}^{(anisoc)} = - \mu' \left[ \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} \right] = - \mu' div\mathbf{v}. \quad [\text{Q.4}]$$

Si hanno, cioè, particolari sforzi  $\Delta p_{kk}^{(anisoc)}$  legati ad aumenti di pressione che risultano direttamente proporzionali alla velocità con la quale ha luogo la riduzione percentuale del volume fluido  $V$  (deformazioni *anisocore*). Nel caso particolare di una contrazione ( $div\mathbf{v} < 0$ ) consegue un incremento di pressione:

$$\Delta p_{kk}^{(anisoc)} = - \mu' div\mathbf{v} > 0.$$

**Condizioni di equilibrio di un elemento infinitesimo fluido.** Si consideri ora, nel piano di figura Q.1, il quadrilatero infinitesimo  $ABCD$ , e proponiamoci di riconoscere quale sia l'entità (all'istante  $t$ ) dello sforzo normale  $T_{kk} - p$  agente al suo interno (distribuito su  $BD$ )

<sup>(Q.1)</sup> In base alla forma indefinita dell'equazione di continuità:  $dp/dt + \rho div\mathbf{v} = 0$ , considerando la massa fluida costante ( $dm = d(\rho V) = 0$ ), si arriva a scrivere:  $-dV/dt + V div\mathbf{v} = 0$ . Vedere "Meccanica dei Fluidi" di MARCHI, RUBATTA a pag. 69.



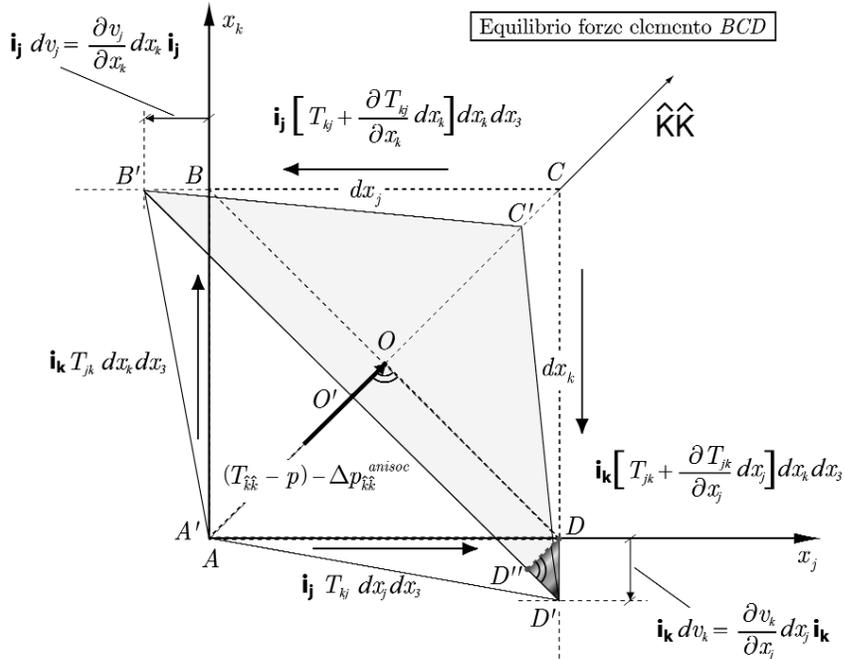


876 • APPENDICE-Q  
 • Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica

**NOTA:**

Le direzioni degli sforzi di taglio rispettano la convenzione adottata per le componenti del tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$ ; con:  $T_{kj} > 0$  e  $T_{jk} > 0$ .  
 Le componenti della velocità e le relative derivate parziali sono grandezze già intrinsecamente dotate di segno.

Le forze si fanno equilibrio nella configurazione indeformata  $ABCD$   
 La configurazione  $A'B'C'D'$  fa riferimento alla deformazione congruente.



**Figura Q.1** – Deformazione *isocora* infinitesima (nell'unità di tempo) per un elementino fluido di volume  $dV$ , nel generico piano  $x_k, x_j$ . Evidenziato, in particolare, il cinematismo di deformazione isocora del volumetto  $BCD$  di volume  $dV/2$ . Le forze indicate fanno riferimento alla configurazione  $ABCD$  all'equilibrio e all'istante  $t$ . Per il teorema dei lavori virtuali, all'equilibrio di un sistema di forze si può associare un cinematismo di deformazione "congruente":  $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$ . Si sono, anche, indicate le forze agenti, al tempo  $t$ , quando l'elementino è nella configurazione  $ABCD$ .

e che trae origine dalla presenza degli sforzi esterni agenti sull'elementino fluido e, conseguentemente, da eventuali variazioni del suo volume (*contrazioni/dilatazioni*). Si può subito osservare che l'entità dello sforzo normale  $T_{kk} - p$  – nell'ipotesi di moto di deformazione caratterizzato anche da una contrazione dell'elemento fluido – deve in parte comprendere la reazione globale degli sforzi interni all'elemento ( $-\mu' \text{div} \mathbf{v} > 0$ ) (che rea-





giscono alla contrazione dell'elementino fluido ad opera dei corrispondenti sforzi normali agenti sul restante contorno esterno) e contemporaneamente bilanciare l'azione dei rimanenti sforzi di taglio che si estrinsecano sempre sul contorno esterno dell'elementino fluido. Per valutare il legame esistente tra gli sforzi di taglio e lo sforzo  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ , conviene prima "depurare" quest'ultimo dall'incremento di pressione derivato dalla contrazione del volume dell'elementino  $ABD$  ad opera della risultante degli sforzi esterni normali (deformazioni *anisocore*). Quindi, considerare quella rimanente frazione dello sforzo normale, distribuito su  $BD$  (fig. Q.1), estrinsecata per bilanciare l'effetto dei soli sforzi di puro taglio  $T_{kj}$ . In questo modo, la reale deformazione *anisocora* ( $divv \neq 0$ ) può venire studiata, cinematicamente, analizzando la sola componente di deformazione *isocora* ( $divv = 0$ ). Ovvero, definendo la frazione isocora dello sforzo normale equivalente:

$$[(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}]. \quad \text{[Q.5]}$$

È importante puntualizzare che l'entità dello sforzo normale (eq. Q.5), agente lungo la direzione  $\hat{k}\hat{k}$  (fig. Q.1), è da considerarsi, dal punto di vista dinamico, nel caso generale di  $\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} \neq 0$  (ovvero  $divv \neq 0$ ).

Dal punto di vista fisico, lo sforzo nell'eq. Q.5 viene qui ipotizzato come la frazione dello sforzo normale  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ , lungo la direzione  $\hat{k}\hat{k}$ , a cui compete la componente isocora del moto ( $divv = 0$ ); in virtù della scomposizione delle velocità nell'equazione Q.2.

**Cinematismo isocoro.** In base alle precedenti considerazioni, definita la frazione dello sforzo normale totale  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$  a cui può associarsi la componente isocora del moto (eq. Q.5), da un punto di vista cinematico si può scrivere:

$$divv = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad \text{[Q.6]}$$

Pertanto, l'adozione e l'impiego della particolare espressione data dall'equazione Q.5 implica lo studio di una particolare deformazione, la cui geometria soddisfi in ogni istante la Q.6. Inoltre, in base alla teoria della cinematica dei fluidi, il tensore  $\mathbf{L}$  delle velocità di variazione di volume è un tensore isotropo, ed ha la forma:

$$\begin{bmatrix} L_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} divv/3 & 0 & 0 \\ 0 & divv/3 & 0 \\ 0 & 0 & divv/3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \partial v_x / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial v_y / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial v_z / \partial z \end{bmatrix}. \quad \text{[Q.7]}$$

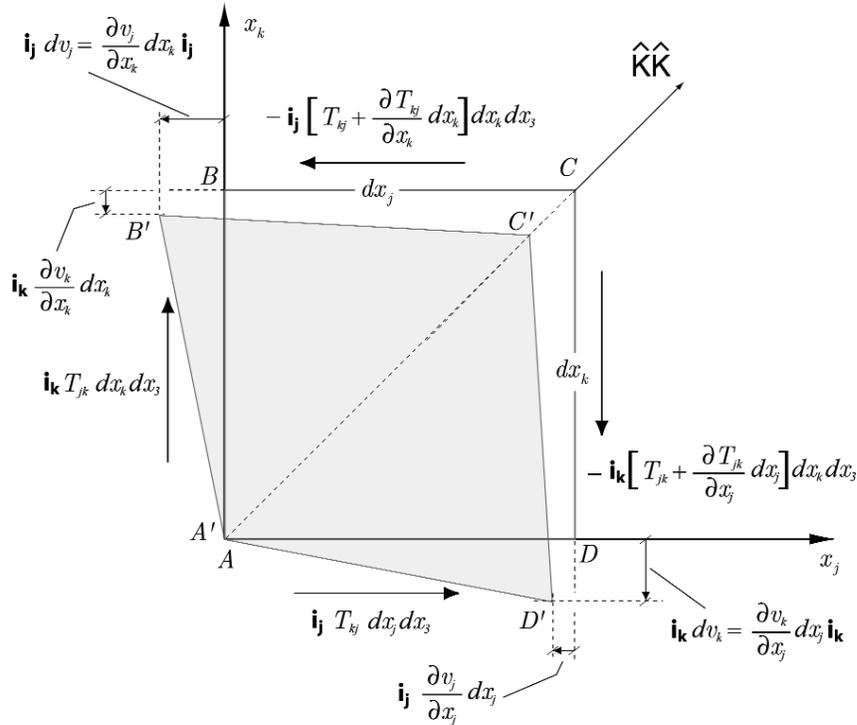
Per costruzione  $\mathbf{L}$  è un tensore simmetrico e la sua *traccia*  $L_{xx} + L_{yy} + L_{zz} = divv$  è un *invariante*, e conserva lo stesso valore rispetto a qualsiasi sistema di riferimento. Pertanto, nel caso di cinematismo isocoro, la condizione  $divv = 0$  comporta:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad \text{[Q.8]}$$





878 • APPENDICE-Q  
 • Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica



**Figura Q.2** – Generica deformazione – quindi *anisocora* – infinitesima (nell'unità di tempo) di un elementino fluido nel generico piano  $x_k; x_j$ . È depurato dal cinematismo la componente traslazionale e quella rigida rotazionale. Si sono, inoltre, indicate le forze agenti al tempo  $t$ , quando l'elementino fluido è nella configurazione  $ABCD$ .

**Generico cinematismo anisocoro.** Si consideri un sistema di assi coordinati  $x_k; x_j; x_3$ ; in cui si assume  $x_3$  come l'asse perpendicolare al piano generico individuato dai due assi  $x_k; x_j$  scelti. Nella figura Q.2 è rappresentato un generico cinematismo di deformazione (quindi, in generale, anisocoro). Si può notare dalla figura che i termini della divergenza non sono nulli, risultando nel piano:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \neq 0; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \neq 0;$$

viceversa, nel caso di un cinematismo isocoro nel medesimo piano generico, deve essere:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad \text{[Q.9]}$$

Pertanto, il relativo cinematismo di deformazione isocora è quello rappresentato nella





figura Q.1. Quindi, nel caso di un elemento fluido infinitesimo, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, si assume che ognuno dei piani coordinati, localmente in un punto  $\mathbf{x}_0$ , sia sempre verificata l'equazione Q.8; ovvero l'eq. Q.9. Queste considerazioni cinematiche si ritengono applicabili a ciascuno dei tre piani coordinati; pertanto, si deve intendere l'eq. Q.9 in modo da fare assumere ogni volta ai pedici  $k$  e  $j$  le tre coppie di valori:  $(x; y)$ ;  $(x; z)$  e  $(z; y)$ ; così da prendere in esame tutti e tre i cinematismi piani, relativi ai tre piani individuati dagli assi coordinati  $x$ ;  $y$  e  $z$ . Concludendo, se si scelgono gli assi coordinati  $x$ ;  $y$  e  $z$ , deve essere in un punto  $\mathbf{x}_0$  di un fluido in moto isocoro:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

### Q.1.2 IL TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI APPLICATO ALL'ELEMENTINO FLUIDO DURANTE LA COMPONENTE ISOCORA DELLA DEFORMAZIONE

Il teorema dei lavori virtuali per sistemi deformabili presenta la nota espressione generale:

$$L_{est} + L_{RV} = L_{\sigma\tau}; \quad \text{[Q.10]}$$

dove, una volta individuato al tempo  $t$  il sistema equilibrato tra le forze totali agenti (forze esterne e reazioni vincolari) e le relative tensioni interne al corpo deformabile, e una volta noto il relativo cinematismo di deformazione "congruente" con gli spostamenti imposti, si ha:

- $L_{est}$  lavoro virtuale delle forze esterne applicate al sistema;
- $L_{RV}$  lavoro virtuale delle eventuali reazioni vincolari (eventuali cedimenti dei vincoli imposti);
- $L_{\sigma\tau}$  lavoro virtuale fatto da tutti gli sforzi interni agenti sul sistema: nel caso di un fluido, si parlerà di sforzi normali e di taglio.

Volendo applicare tale teorema al sistema (deformabile) fluido  $ABCD$ , infinitesimo di volume  $dV$  (vedere figura Q.1), si deduce – in virtù anche delle considerazioni fatte a riguardo dell'espressione nell'eq. Q.5 – che gli unici lavori non nulli sono quelli relativi agli sforzi interni al fluido:  $T_{kj} = T_{jk}^{(Q.2)}$  e  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ .

Non si considerano i lavori virtuali delle forze esterne di massa (gravitazionali e inerziali) in quanto, come forze di volume, risultando degli infinitesimi di ordine superiore rispetto alle altre forze di superficie (pressioni e attriti), possono essere trascurati sul volumetto infinitesimo. Tantomeno, sono presenti o si considerano vincoli applicati all'elementino fluido preso in considerazione. Ciò posto, l'equazione dei lavori virtuali si riduce alla semplice relazione:

<sup>Q.2</sup> Si è tenuto conto, direttamente, della nota proprietà di reciprocità del taglio.





•APPENDICE-Q  
 880 •Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica  
 •  
 •

$$L_{\sigma\tau} = 0. \quad \text{[Q.10_b]}$$

che, in forma differenziale, porge:  $dL_{\sigma\tau} = 0$ . **Nota.** Tenendo presenti tutte le considerazioni relative alla possibilità di considerare, del generico moto anisocoro, la relativa componente isocora del cinematismo, nell'applicazione del teorema dei lavori virtuali, si farà riferimento alla figura Q.1.

**Lavoro virtuale degli sforzi di taglio.** Innanzitutto, si osservi che il lavoro virtuale infinitesimo  $dL_{\tau}^{(ABCD)}$  fatto dagli sforzi di taglio  $T_{kj} = T_{jk}$  (durante l'intervallo di tempo  $dt$ ) nella deformazione congruente per deformare l'elementino fluido  $dV$  dalla configurazione  $ABCD$  al tempo  $t$ , alla configurazione  $A'B'C'D'$  al tempo  $t + dt$  è dato, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, dall'espressione (vedere figura Q.1):

$$dL_{\tau}^{(ABCD)} \approx -T_{kj} dx_j dx_3 \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx_k dt \right) - T_{jk} dx_k dx_3 \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j dt \right); \quad \text{[Q.11]}$$

ovvero, tenendo conto della relazione di reciprocità del taglio  $T_{kj} = T_{jk}$ , e della definizione di velocità di variazione angolare nel piano  $kj$ :

$$\frac{d\gamma_{kj}}{dt} = - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right), \quad \text{[Q.12]}$$

si ha che il lavoro virtuale infinitesimo fatto dagli sforzi di taglio *nell'unità di tempo* sull'elementino fluido di volume  $dV$  è dato da:

$$dL_{\tau}^{(ABCD)} = T_{kj} d\gamma_{kj} dV; \quad \text{[Q.13]}$$

essendo  $dx_k dx_j dx_3 = dV$  il volume infinitesimo dell'elementino. Dalla forma dell'equazione Q.13 si deduce che il lavoro virtuale fatto (per unità di volume della massa fluida) dagli sforzi di taglio *nell'unità di tempo*, durante una deformazione infinitesima isocora e congruente, è dato dalla seguente espressione:

$$\frac{dL_{\tau}^{(ABCD)}}{dV} = T_{kj} d\gamma_{kj}. \quad \text{[Q.14]}$$

**Teorema dei lavori virtuali sull'elementino BCD.** Volendo, a questo punto, applicare il teorema dei lavori virtuali all'elementino fluido  $BCD$  (fig. Q.1), di volume  $dV/2$  rispetto al volume  $dV$  dell'elementino  $ABCD$ , si ha per il lavoro virtuale delle forze di taglio:

$$dL_{\tau}^{(BCD)} = \frac{dV}{2} T_{kj} d\gamma_{kj} = \frac{1}{2} dL_{\tau}^{(ABCD)}. \quad \text{[Q.15]}$$

**Lavoro virtuale della frazione isocora dello sforzo di pressione su AC.** In base alle osservazioni riguardo alla frazione isocora dello sforzo di pressione  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ , si è visto





che tale frazione deve presentare la forma (eq. Q.5):

$$(T_{\hat{k}\hat{k}} - p)^{(isoc)} = [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}].$$

Questo sforzo agisce, all'istante  $t$ , sulla superficie  $dS_{BD}$  (fig. Q.1) che ha traccia  $BD$  sul piano  $kj$ . Durante la generica deformazione isocora congruente, che avviene nell'intervallo di tempo  $dt$ , si ha – come supposto nella figura Q.1 – un accorciamento infinitesimo, lungo il particolare asse diagonale  $\hat{k}\hat{k}$ , pari in modulo a  $OO'$ .

Se con  $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} < 0$  si indica l'accorciamento unitario (quindi, di valore algebrico negativo), nell'intervallo di tempo  $dt$ , della deformazione della semidiagonale  $OA$  lungo l'asse diagonale  $\hat{k}\hat{k}$ , allora il segmento  $OO'$  può essere espresso come (fig. Q.1):

$$OO' = -OA \cdot d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} > 0; \quad [\text{Q.16}]$$

dove, la velocità di deformazione unitaria è:

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}. \quad [\text{Q.17}]$$

In virtù dell'equazione Q.16, il lavoro virtuale dello sforzo normale agente su  $BD$  è negativo perché la relativa deformazione congruente è un accorciamento. Tale lavoro virtuale è dato quindi da:

$$dL_{\hat{k}\hat{k}}^{(BCD)} = \left\{ [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] dS_{BD} \right\} OA \cdot d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} < 0. \quad [\text{Q.18}]$$

A questo punto, si può osservare che il prodotto  $OA \cdot dS_{BD}$  non è altro che il volume dell'intero elemento fluido  $ABCD$ . Infatti, come si può vedere dalla figura Q.1, si ha:

$$V_{ABCD} \equiv dV = OA \cdot dS_{BD}. \quad [\text{Q.19}]$$

Pertanto, il lavoro virtuale infinitesimo *nell'unità di tempo* relativo allo sforzo normale agente sulla superficie di traccia  $BD$  sul piano  $kj$  è:

$$dL_{\hat{k}\hat{k}}^{(BCD)} = [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] dV d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} < 0. \quad [\text{Q.20}]$$

A questo punto, l'espressione del teorema dei lavori virtuali data dall'equazione Q.10-b, porge in termini differenziali:

$$dL_{\tau}^{(BCD)} + dL_{\hat{k}\hat{k}}^{(BCD)} \equiv dL_{\sigma\tau} = 0; \quad [\text{Q.21}]$$

ovvero:

$$\frac{dV}{2} T_{kj} d\gamma_{kj} + [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] dV d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} \equiv dL_{\sigma\tau} = 0. \quad [\text{Q.21}_b]$$





•APPENDICE-Q  
 882 •Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica

Quest'ultima equazione assume anche l'aspetto, in termini di velocità di deformazioni congruenti, dato da:

$$T_{kj} \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{kj}}{dt} + [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] \frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = 0. \quad [Q.22]$$

**Considerazioni geometriche sul cinematismo di deformazione congruente.** Da pure considerazioni geometriche (relative al cinematismo di deformazione isocora del volume elementare di fluido nel piano  $x_k; x_j$ ), la relazione che lega la generica velocità di deformazione angolare  $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}/dt$  dell'elementino (lungo la direzione  $\hat{k}\hat{k}$ ) con la relativa velocità di deformazione angolare  $d\gamma_{kj}/dt$  (dovuta a taglio puro con asse di rotazione perpendicolare al piano  $x_k; x_j$ ) risulta (vedere successivo paragrafo Q.1.3):

$$\frac{d\gamma_{kj}}{dt} = -2 \frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = -2 \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}, \quad [Q.23]$$

per cui l'equazione dello sforzo di taglio puro si può esprimere, relativamente al particolare sistema di riferimento adottato in figura Q.3 come:

$$\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(taglio)} \equiv T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = -\mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} 2. \quad [Q.24]$$

A questo punto, sostituendo nell'equazione Q.22 il legame evidenziato dall'eq. Q.23 e semplificando, si ottiene l'importante relazione:

$$(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} = T_{kj}. \quad [Q.25]$$

Quest'ultima equazione, in virtù dell'eq. Q.24, può essere ulteriormente interpretata in questo modo, scrivendo formalmente:

$$(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) = \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} + \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(isoc)}. \quad [Q.25_b]$$

In quest'ultima equazione, infatti, si è indicato con  $\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(isoc)} \equiv T_{kj}$  quella frazione della pressione totale  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ , a cui compete la sola componente della deformazione isocora. L'equazione Q.25\_b può essere, anche, sintetizzata dicendo che "la pressione totale relativa alle sole deformazioni può essere pensata come la somma di due contributi: uno che dipende dalle sole condizioni termodinamiche della massa fluida e che incide solo sulla variazione di energia interna (deformazioni conseguenti a variazioni di volume: componente anisocora della deformazione) e l'altro che dipende più direttamente dalle caratteristiche meccaniche della deformazione ed incide sia sulla variazione dell'energia meccanica che sull'energia interna (distorsioni isocore con attriti per viscosità)".

**Espressione generale del tensore deviatore degli sforzi.** Sostituendo nell'eq. Q.25\_b le espressioni descritte nelle due equazioni Q.24 e Q.4, si ottiene:

$$T_{\hat{k}\hat{k}} - p = \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} + \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(isoc)} = \left( -\mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} 2 \right). \quad [Q.26]$$





In generale, le espressioni generiche degli sforzi normali  $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ , che si estrinsecano solo durante il movimento del fluido (rappresentati dagli elementi diagonali del tensore degli sforzi che risulta legato alle deformazioni fluide), portano al seguente legame sul piano cartesiano  $x_k; x_j$ :

$$T_{\hat{k}\hat{k}} = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} \quad \text{[Q.27]}$$

Ovvero in termini di componenti del tensore delle velocità di deformazione  $\mathbf{D}$ :

$$T_{\hat{k}\hat{k}} - p = -\mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} = -\mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - 2D_{\hat{k}\hat{k}} \quad \text{[Q.27_b]}$$

È importante notare che l'equazione Q.27 è stata ricavata ed è valida solo per sforzi normali conseguenti alle deformazioni nel moto degli elementi fluidi lungo la direzione  $\hat{k}\hat{k}$  sul piano  $x_k; x_j$ . Inoltre, il valore dello sforzo normale, per come è caratterizzato nell'equazione Q.27\_b, risulta dipendere solo dalla direzione  $\hat{k}\hat{k}$  su cui lo si valuta. Ciò porta a concludere che, in un sistema di riferimento cartesiano  $x; y; z$  lungo le direzioni individuate dai tre assi principali devono essere valide le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_x}{\partial x_x} \\ T_{yy} &= p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_y}{\partial x_y} \\ T_{zz} &= p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_z}{\partial x_z} \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga, dalla relazione degli sforzi puramente tangenziali (eq. Q.3)

$$T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right);$$

risulta, permutando gli indici, un legame lineare tra le componenti del tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  e le relative componenti del tensore delle velocità di deformazione  $\mathbf{D}$ :

$$T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = - 2\mu D_{kj}.$$

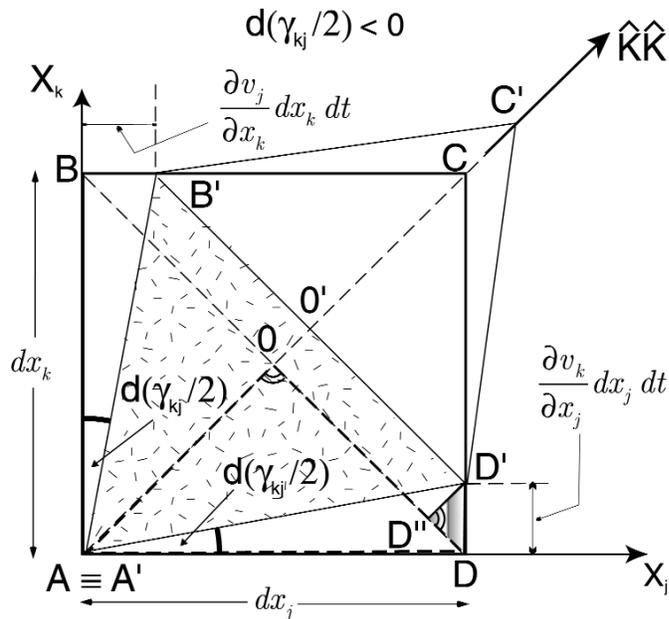
Tenendo, quindi, anche conto della nota condizione di reciprocità del taglio  $T_{jk} = T_{kj}$ , conseguenza dell'equazione di equilibrio dei momenti applicati all'elementino fluido in questione, si possono condensare tutte le relazioni scritte sopra tramite l'utilizzo della scrittura compatta tensoriale, e quindi arrivare alla nota espressione sintetica del tensore degli sforzi per fluidi viscosi:

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D} \quad \text{[Q.28]}$$





•APPENDICE-Q  
 884 •Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica  
 •  
 •



**Figura Q.3** – Cinematismo piano di deformazione isocora di un generico elemento infinitesimo, nel tempo elementare  $dt$ . Nel generico allungamento unitario  $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$  si ha:  $d(\gamma_{kj}/2) < 0$ .

Essendo  $\mathbf{T}$  il tensore degli sforzi,  $\mathbf{I}$  il tensore unità, e  $\mathbf{D}$  il tensore delle velocità di deformazione.

**Q.1.3 RELAZIONI GEOMETRICHE DI UN GENERICO CINEMATISMO DI DEFORMAZIONE ISOCORA**

Si consideri nel piano  $x_k, x_j$  il quadrilatero infinitesimo  $ABCD$  (figura Q.3). Prima di arrivare alla relazione riportata nell'equazione Q.23, vista precedentemente, è necessario valutare l'entità dell'accorciamento unitario dell'elementino nella direzione individuata dall'asse  $\hat{k}\hat{k}$ ; durante la deformazione che lo porta dalla configurazione  $A'B'C'D'$  alla configurazione  $ABCD$ .

Si ragioni d'ora in avanti in termini di allungamenti unitari anziché in termini di accorciamenti, nel solo intento di rendere più chiaro il ragionamento sugli schemi proposti nelle figure, senza nulla togliere al carattere generale della trattazione.

Come noto, l'allungamento unitario (infinitesimo)  $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}$  subito dall'elementino nel tempo  $dt$  lungo la direzione individuata dall'asse  $\hat{k}\hat{k}$  è:





$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = \frac{\frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} dx_{\hat{k}} dt}{dx_{\hat{k}}} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} dt. \quad [\text{Q.29}]$$

sicché la velocità di allungamento nella direzione dell'asse  $\hat{k}\hat{k}$  risulta:

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}. \quad [\text{Q.30}]$$

Nel caso particolare di un accorciamento, l'eq. Q.30 rimane formalmente invariata, ovviamente cambierà solo il segno:

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} < 0.$$

Ragionando, quindi, ancora in termini di allungamenti,<sup>(Q.3)</sup> si riconosce dalla figura Q.3 che l'entità di un allungamento unitario  $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}$  infinitesimo, lungo la particolare direzione  $\hat{k}\hat{k}$  sul piano  $x_k, x_j$  nel tempo  $dt$ , dalla configurazione  $ABCD$  a quella  $A'B'C'D'$ , può essere espresso dalla relazione:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = \frac{C'C}{OC} = \frac{O'O}{AO} = \frac{D''D'}{AO}. \quad [\text{Q.31}]$$

Si tracci ora, come disegnato in figura Q.3 (e come anche disegnato nella figura Q.1), la perpendicolare  $D''D'$  su  $OD$ , risulta allora valida la seguente proporzione, relativa ai due triangoli simili  $D'D''D$  e  $AOD$ :

$$OD : AD = D''D' : DD' \quad [\text{Q.32}]$$

analogamente, sempre per la similitudine dei triangoli simili  $D'D''D$  e  $AOD$ , esiste la seguente proporzione:

$$D''D' : OD = DD' : AD, \quad [\text{Q.33}]$$

si può osservare, inoltre, che:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = \frac{D''D'}{AO} = \frac{D''D'}{OD} = \frac{DD'}{AD}, \quad 0 < DD' = -AD \cdot \left( \frac{d\gamma_{kj}}{2} \right). \quad [\text{Q.34}]$$

per cui si arriva alla relazione valida per il generico allungamento unitario dell'elemento fluido lungo la direzione  $\hat{k}\hat{k}$  sul piano  $x_k, x_j$ :

<sup>Q.3</sup> Vale la seguente relazione  $CC' = D'D'' = O'O'$  (figura Q.3): si tratta di allungamento unitario dello stesso elemento infinitesimo, lungo la medesima direzione individuata dall'asse  $\hat{k}\hat{k}$ .





•APPENDICE-Q  
886 •Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = -\frac{d\gamma_{kj}}{2} > 0, \quad [\text{Q.35}]$$

cui corrispondono le relative velocità di deformazione (eq. Q.23):

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} = -\frac{1}{2} \frac{d\gamma_{kj}}{dt}.$$

Ovviamente, nel caso di un accorciamento, sarebbe risultato:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = -\frac{d\gamma_{kj}}{2} < 0, \quad [\text{Q.36}]$$

variando solo il segno dell'angolo  $\gamma_{kj}$  ( $d\gamma_{kj} > 0$ ), ma rimanendo invariata la forma dell'equazione Q.36.

#### Q.1.4 LA PRESSIONE ISOTROPA NELL'EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOTO DI FLUIDI VISCOSI

Si definisce pressione isotropa la media delle pressioni relative a tre facce mutualmente perpendicolari di un volumetto di fluido, per cui si scriverà:

$$p^{(isotropa)} \equiv \frac{T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}}{3} = p^{(idrostatica)} + p^{(viscosa)}. \quad [\text{Q.37}]$$

Le funzioni  $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$ ,  $T_{zz}$  si valutano tramite l'equazione Q.27. Pertanto, risulta:

$$p^{(isotropa)} \equiv \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \left( p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{\partial v_x}{\partial x_x} \cdot 2 \right) = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad [\text{Q.38}]$$

e confrontando l'equazione Q.38 con la relazione Q.37 si deduce che:

$$p^{(idrostatica)} \equiv p;$$

$$p^{(viscosa)} \equiv -\left( \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right).$$

A questo punto, si può ipotizzare che il valore della pressione viscosa sia una trascurabilissima parte della pressione isotropa viscosa, a prescindere della natura del tipo di moto (*isocoro* o *anisocoro*). Vale a dire che, qualsiasi sia il valore della  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ , deve risultare all'atto pratico:

$$p^{(viscosa)} \equiv -\left( \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \approx 0.$$

Ovvero, deve risultare:





$$\left( \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \left( \mu' + \mu \frac{2}{3} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \approx 0 \rightarrow \mu' + \mu \frac{2}{3} \approx 0 \Rightarrow \mu' = -\frac{2}{3} \mu. \quad [\text{Q.39}]$$

Comunque sia la velocità di variazione dell'unità di volume ( $\operatorname{div} \mathbf{v}$ ), l'effetto della viscosità risulta, quindi, trascurabile.

### Q.1.5 EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOTO: EQUAZIONE DI STOKES

Detto  $\mathbf{f}$  ( $f_x; f_y; f_z$ ) il vettore delle forze di massa e detta  $\rho$  la densità media del fluido, le proiezioni dell'equazione fondamentale della dinamica dei fluidi ( $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ ), sui tre assi coordinati  $x; y; z$ , come noto, porge:

$$\begin{aligned} \rho \left( f_x - \frac{dv_x}{dt} \right) &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \\ \rho \left( f_y - \frac{dv_y}{dt} \right) &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \\ \rho \left( f_z - \frac{dv_z}{dt} \right) &= \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

dove si intende, ad esempio, che  $T_{xy}$  rappresenta la componente nella direzione dell'asse  $y$  dello sforzo totale trasmesso attraverso un elemento di superficie normale all'asse  $x$ , ed applicato al fluido che si trova in contatto con tale superficie dal lato delle  $x$  crescenti (vedere figura Q.1). Scrivendo le tre precedenti equazioni in forma compatta, si ottiene:

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad [\text{Q.40}]$$

A questo punto, se introduciamo l'equazione del tensore degli sforzi (eq. Q.28), si ottiene (l'equazione di STOKES):

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + (\mu + \mu') \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad [\text{Q.41}]$$

Sostituendo nell'eq. Q.41 per  $\mu'$  l'espressione ricavata nell'equazione Q.39 si ottiene:

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \frac{1}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad [\text{Q.41}_b]$$

Nel caso particolare di fluido viscoso incompressibile (ad esempio, un liquido), si dimostra

† Maggiori dettagli in merito all'equazione di Navier-Stokes si possono reperire sui seguenti testi:

"Mémoire sur les lois du mouvement des fluides"; NAVIER LOUIS MARIE HENRY; Mem. Acad. Inst. France; 1827;

"On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids"; STOKES GEORGE GABRIEL; Trans. Camb. Phil. Soc.; 1845;

"Meccanica dei Fluidi principi e applicazioni idrauliche"; ENRICO MARCHI; ANTONELLO RUBATTA; Utet.





• APPENDICE-Q  
 888 • **Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica**

per la conservazione della massa che il termine  $\text{div}\mathbf{v} = 0$ . Pertanto, l'equazione precedente si semplifica nella forma:

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad [\text{Q.41}_c]$$

Quest'ultima equazione, che risale al 1827, è la famosissima equazione di NAVIER<sup>(\*)</sup>.

## Q.2 L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER I FLUIDI VISCOSI

### Q.2.1 FORMA DIFFERENZIALE E FORMA INTEGRALE DELL'EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA POTENZA CINETICA

Moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione Q.4 per il percorso infinitesimo vettoriale  $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$  si ottiene l'equazione dell'energia cinetica applicata alla massa fluida:

$$\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} - \mathbf{v} \cdot \text{div}\mathbf{T} = \mathbf{v} \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} v^2 \right\} \quad [\text{Q.42}]$$

Si può dimostrare che, moltiplicando membro a membro l'equazione Q.42 per il volume infinitesimo  $dV$  e poi integrando su tutto il volume  $V$  (di superficie esterna  $S$ ) della massa fluida considerata, se si ipotizza in particolare che il fluido è liquido ( $\text{div}\mathbf{v} = 0$ ), si ottiene la seguente relazione integrale (bilancio della potenza cinetica):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \left( \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \mathcal{P}_d \right) = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}_d \quad [\text{Q.43}]$$

Ovvero, la variazione di potenza cinetica (integrale a primo membro) è uguale alla potenza  $\mathcal{P}_m$  meccanica trasmessa all'intera massa fluida dalle forze esterne meno la potenza  $\mathcal{P}_d$  dissipata (dall'intera massa fluida) per attrito viscoso (degradazione di energia meccanica per distorsioni viscoso isocore del fluido).

Si deve notare che l'integrale tra parentesi tonde nell'eq. Q.43, data la deformabilità elastica del fluido (e ricordando che è per ipotesi  $\text{div}\mathbf{v} = 0$ ), deve comprendere sia una potenza che tende ad incrementare la potenza cinetica, sia un lavoro di sola distorsione isocora, causato da attriti viscosi, che va invece ad incrementare la potenza termodinamica, in termini di energia interna. Nel bilancio della sola potenza cinetica, quindi, bisogna considerare solo la frazione di potenza meccanica che va ad incrementare la potenza cinetica. Per cui, nel caso appunto di fluido incomprimibile, della potenza meccanica globale trasmessa al fluido andrà considerata la sola frazione efficace:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \mathcal{P}_d.$$

Se si considera una massa di fluido  $M = \rho V$  che transita attraverso un volume di control-





lo di forma cilindrica di volume  $V$  e superficie  $A$ , quale potrebbe essere in pratica un tronco di tubazione cilindrica retta compreso tra due sezioni 1 (entrata) e 2 (uscita), e quindi con superficie esterna  $A = A_1 + A_2 + A_L$  (dove per  $A_L$  si intende la superficie laterale della tubazione), allora l'equazione Q.43 può essere ricondotta alla forma:

$$\rho g Q \Delta \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}_d. \quad [\text{Q.43}_b]$$

Dove con  $H = z + p/\rho g + V^2/2g$  si è indicata l'energia meccanica totale dell'unità di peso della corrente fluida dentro la tubazione; e con  $\rho g Q$  la portata in peso di fluido che transita dentro la tubazione. Questa forma è importantissima nella pratica tecnica perché riconduce tutto in termini energetici. Infatti, l'equazione Q.43\_b scritta nella forma:

$$\rho g Q \Delta H = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}_d. \quad [\text{Q.43}_c]$$

significa che l'apporto di potenza meccanica dall'esterno  $\mathcal{P}_m$  (ad esempio, fornito attraverso una macchina come una pompa idraulica) in parte incrementa la potenza meccanica del fluido  $\rho g Q \Delta H$  (variazione tra le due sezioni 1 e 2 di entrata e uscita) ed in parte  $\mathcal{P}_d$  si dissipa per attriti. Si può quindi dire che il fluido riceve dall'esterno energia meccanica da una pompa (= 10). Di questa energia, una parte (ad esempio = 4) viene trasformata in calore dagli attriti interni al fluido a causa delle sue deformazioni viscosse, andando ad incrementare la sua energia interna. L restante parte (= 6) va ad incrementare tutte le altre forme di energia possedute dal fluido: di posizione ( $z$ ), di pressione ( $p/\rho g$ ) e di velocità ( $V^2/2g$ ). Pertanto, è possibile attribuire in una generica sezione perpendicolare alle linee di flusso (tra loro parallele) di una massa fluida in movimento (ad esempio all'interno di una tubazione) un'energia meccanica totale, riferita all'unità di peso  $mg$ , ed espressa in termini di altezze (*metri*), detta anche "carico totale" (o trinomio energetico di BERNOULLI):

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \quad [\text{Q.44}]$$

In termini di energie, la variazione dell'energia meccanica totale  $H$  del fluido quando attraversa due sezioni 1 (entrata) e 2 (uscita), trasversalmente ad un tubo, è data da (equazione di BERNOULLI generalizzata):

$$H_2 - H_1 = \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = L_m - L_d. \quad [\text{Q.45}]$$

Dove, se internamente al tronco di tubazione compreso tra le due sezioni 1 e 2 di ingresso e uscita non c'è apporto di energia da parte di macchine esterne ( $L_m = 0$ ), allora il bilancio energetico si riduce alla forma:

$$H_2 - H_1 = \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = -L_d < 0 \quad [\text{Q.45}_b]$$





## •APPENDICE-Q

## 890 •Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica

•  
•

testimoniando il fatto che, per un fluido viscoso, se non c'è apporto di energia dall'esterno ( $L_m = 0$ ), si registrano sempre delle perdite di energia lungo il senso del moto ( $L_d > 0$ ) a causa degli attriti che, in ogni momento del moto, tendono a contrastarlo con dissipazioni continue dell'energia meccanica  $H$ .

Pertanto, in virtù dell'eq. Q.45\_b, un fluido che scorra semplicemente all'interno di una tubazione lunga  $L$  e compresa tra due sezioni 1 e 2, registra quello che si dice una "perdita di carico" (perdita di energia) tra le due sezioni a distanza  $L$ :

$$\left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) < \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right). \quad [\text{Q.46}]$$

Nel caso particolare che la pompa idraulica fosse compresa all'interno di un tratto di tubazione in cui la sezione 1 è proprio la sezione di entrata della pompa e la sezione 2 è la relativa sezione di uscita dalla pompa stessa, allora la potenza meccanica che la pompa deve assorbire effettivamente per fornire al fluido la potenza meccanica  $\rho g Q \Delta H$  si calcola:

$$\rho g Q \Delta H + \mathcal{P}_d = \mathcal{P}_m \quad [\text{Q.47}]$$

però, solo una parte della potenza  $\mathcal{P}_m$  globalmente fornita alla pompa incrementa la potenza meccanica del fluido  $\rho g Q \Delta H$ . Infatti, la parte  $\mathcal{P}_d$  della potenza meccanica  $\mathcal{P}_m$  viene dissipata all'interno delle parti meccaniche e dei canali interpalari della pompa. In particolare, se il fluido deve essere pompato, all'interno di una tubazione di lunghezza totale  $L$ , da una quota minore  $z_{g1}$  ad una quota maggiore  $z_{g2}$  con un dislivello geodetico totale di:

$$\Delta Z_g = z_{g2} - z_{g1} > 0 \quad [\text{Q.48}]$$

e con una perdita di energia  $JL$  ( $m$ ) attraverso tutta la tubazione di lunghezza  $L$ , allora la potenza meccanica totale che la pompa deve fornire è:

$$\mathcal{P}_m = \rho g Q (z_{g2} - z_{g1}) + (\mathcal{P}_d + \rho g Q JL). \quad [\text{Q.49}]$$

Dove con  $(\mathcal{P}_d + \rho g Q JL)$  si è indicata, rispettivamente, la potenza meccanica dissipata all'interno della macchina stessa e la potenza meccanica dissipata lungo tutta la tubazione  $L$  che collega la macchina alle due quote  $z_{g1}$  e  $z_{g2}$ .

Generalmente, però, se si indica con  $\mathcal{P}_u$  la potenza meccanica richiesta dalla macchina prescindendo dalle perdite che avvengono al suo interno ( $\mathcal{P}_u = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}_d$ ), l'equazione Q.49 si può scrivere come:

$$\mathcal{P}_u = \rho g Q [(z_{g2} - z_{g1}) + JL] \quad [\text{Q.49}_b]$$

Pertanto, se con  $\eta_{fluid}$  si indica il rendimento fluidodinamico all'interno della macchina per considerare le *perdite idrauliche* (dovute alla diminuzione di energia per distorsioni e attriti del fluido in moto all'interno della pompa, tale che risulti:





$$\eta_{fluid} = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_d} = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_m} < 1.$$

e si introducono anche i rendimenti  $\eta_{volum}$ ,  $\eta_{organ}$ , rispettivamente, per tenere conto delle *perdite volumetriche* (dovute alla portata di fluido che, pur essendo stato lavorato dalla pompa, non viene convogliato nella tubazione di mandata, ma viene continuamente ricircolata all'interno dei giochi tra organo mobile e fisso della macchina) e delle *perdite organiche* (dovute agli attriti e alle resistenze passive nei vari accoppiamenti rotore-ambiente esterno), allora la potenza realmente assorbita dalla pompa (eq. Q.49) si determina anche con la relazione:

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_u}{\eta} = \frac{\rho g Q [(z_{g2} - z_{g1}) + JL]}{\eta} \quad [\text{Q.49}_c]$$

avendo introdotto il rendimento globale della macchina:

$$\eta = \eta_{fluid} \cdot \eta_{volum} \cdot \eta_{organ} < 1.$$

L'equazione Q.49\_c, in forma più generale, appare:

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_u}{\eta} = \frac{\rho g Q \Delta H}{\eta} \quad [\text{Q.49}_d]$$

dove con  $\Delta H$  si è indicata la "prevalenza" della pompa; ovvero la differenza di carico  $H$  del fluido tra la sezione di uscita 2 e la sezione di entrata 1 della pompa: incremento di carico  $H$  fornito al fluido dalla pompa  $\Delta H = H_2 - H_1 > 0$ . Infatti:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = (z_{g2} - z_{g1}) + JL$$

la pompa deve imprimere al fluido un'energia meccanica che gli consenta di superare il dislivello geodetico  $(z_{g2} - z_{g1})$  e, contemporaneamente, di compensare le perdite di carico totali distribuite  $JL$  che il fluido incontra nel percorrere tutta la lunghezza (virtuale)  $L$  della tubazione.

### Q.2.2 L'EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

Si può dimostrare che, nel caso generale di fluido compressibile, schematizzabile con una legge termodinamica del tipo  $\rho = \rho(p)$  (fluido barotropico), l'equazione di bilancio della potenza cinetica assume la forma più generale:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \left( \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \int_V \rho \frac{d}{dt} \left[ - \int \frac{dp}{\rho} \right] dV \right) - \mathcal{P}_d. \quad [\text{Q.50}]$$





•APPENDICE-Q  
 892 •Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica

Dove il primo integrale dentro la parentesi tonda a secondo membro rappresenta la potenza meccanica fornita dall'esterno da una macchina le cui parti a contatto col fluido hanno superficie  $A_p$ ; mentre, il secondo integrale dentro la parentesi tonda rappresenta quella frazione della potenza meccanica di superficie (trasmessa dalle altre parti di fluido con cui è in contatto la massa fluida stessa di volume  $V$ ) non imputata a distorsioni dovute a dilatazioni o contrazioni del volume fluido.

Un'altra espressione del bilancio dell'energia meccanica, ricavabile dall'equazione Q.50 è la seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \left( \mathcal{P}_d - \int_V \rho (\text{div} \mathbf{v}) dV \right) \quad [\text{Q.50}_b]$$

Infatti, il termine:

$$\mathcal{P}_d + \left( - \int_V \rho (\text{div} \mathbf{v}) dV \right),$$

assieme agli eventuali apporti di potenza termica, forniti reversibilmente dall'esterno (tramite una sorgente a temperatura maggiore di quella del fluido), va ad incrementare la potenza termodinamica (in termini di variazione di energia interna).

Infine, il termine  $\mathcal{P}_d$  rappresenta la frazione di potenza meccanica totale dissipata in calore all'interno della massa fluida per attriti. In particolare, la potenza  $\mathcal{P}_d$  racchiude in sé le sole dissipazioni per distorsioni isocore che sono di natura irreversibile e che influiscono sulle variazioni della potenza cinetica. Viceversa, le distorsioni anisocore influiscono sulla variazione dell'energia interna del fluido. Esse possono considerarsi per qualsiasi schema di fluido, potendo valere anche per uno schema di fluido ideale. Infatti, si può dimostrare che l'incremento di potenza termodinamica, in termini di energia interna, dovuta a contrazioni o dilatazioni di volume di un fluido ideale o reale si scrive:

$$- \int_V \rho (\text{div} \mathbf{v}) dV \quad [\text{Q.51}]$$

dove si nota che per contrazioni del volume  $\text{div} \mathbf{v} < 0$  si ha un incremento di potenza termodinamica in calore; mentre, per dilatazioni  $\text{div} \mathbf{v} > 0$  la potenza termodinamica di calore diminuisce. Pertanto, indicando con  $u$  l'energia interna per unità di massa, il 1° principio della Termodinamica per un fluido ideale ( $\mathcal{P}_d = 0$ ) si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \mathcal{P}_i + \left( - \int_V \rho (\text{div} \mathbf{v}) dV \right) \quad [\text{Q.52}]$$





Dove con  $\mathcal{P}_t$  si è indicata la potenza termica somministrata reversibilmente dall'esterno (ad esempio, somministrazione di calore con una sorgente a temperatura maggiore del fluido). Dal bilancio termodinamico dell'equazione Q.52, si evince che, in un fluido ideale, somministrando calore reversibilmente ( $\mathcal{P}_t > 0$ ) e comprimendo il fluido ( $divv < 0$ ) si registra un aumento della potenza termodinamica in calore (incremento del termine a primo membro dell'equazione Q.52).

Nel caso generale, invece, di fluido reale viscoso il termine  $\mathcal{P}_d$  è sempre maggiore di zero (*II° Principio della Termodinamica*); e il bilancio dell'energia interna, in termini di potenze, assume l'aspetto più generale:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u \, dV = \mathcal{P}_t + \mathcal{P}_d + \left( - \int_V \rho (divv) \, dV \right). \quad [\text{Q.52}_b]$$

Se si introduce la variabile termodinamica di stato *entalpia* specifica  $i$  (per unità di massa fluida), sommando membro a membro il bilancio della potenza cinetica (Q.50) con il bilancio termodinamico dell'energia interna, in termini di potenze, (eq. Q.52\_b) si ottiene quella che viene detta l'equazione di bilancio dell'energia per i fluidi viscosi:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho i \, dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 \, dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho g z \, dV = \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dA_p + \mathcal{P}_t. \quad [\text{Q.53}]$$

Dove con il primo termine integrale a secondo membro si è indicata la potenza scambiata dal fluido con macchine esterne, sintetizzabile con il termine  $\mathcal{P}_{est}$ . Pertanto, introducendo la funzione energia potenziale gravitazionale  $\phi = -gz$ , si può anche scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho i \, dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 \, dV + \frac{d}{dt} \left( - \int_V \rho \phi \, dV \right) = \mathcal{P}_{est} + \mathcal{P}_t. \quad [\text{Q.53}_b]$$

Infine, indicando con  $E_c$  ed  $E_z$ , rispettivamente, l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale della massa fluida di volume  $V$ , il bilancio dell'energia totale si può ricondurre alla semplice forma differenziale; dopo aver trasformato tutti i termini dell'eq. Q.53 in termini di integrali di volume sul medesimo dominio di integrazione  $V$  (con  $dm = \rho \, dV$ ):

$$d i + d E_c + d E_z = d i + d \left( \frac{1}{2} v^2 \right) + d(gz) = d L_{est} + d Q_t. \quad [\text{Q.54}]$$

Nell'eq. Q.54, con  $L_{est}$  si è indicata l'energia (per unità di massa fluida  $dL_{est} = L_{est} \, dm = L_{est} \, \rho \, dV$ ) scambiata con macchine esterne che interagiscono con la massa fluida; e con  $Q_t$  si è indicata l'energia termica (per unità di massa fluida  $dQ_t = Q_t \, dm = Q_t \, \rho \, dV$ ) somministrata reversibilmente dall'esterno. Essendo, infatti, per definizione di potenza:





• APPENDICE-Q  
894 • Le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi e dell'Idraulica

$$\mathcal{P}_{est} = \frac{L_{est} \cdot dm}{dt} = \frac{dL_{est}}{dt} \quad e \quad \mathcal{P}_t = \frac{Q_t \cdot dm}{dt} = \frac{dQ_t}{dt}$$

Nel caso di moto di un fluido liquido in cui sono assenti scambi reversibili con fonti di calore esterne ( $Q_t = 0$ ), l'equazione dell'energia Q.54 si riduce alla forma:

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + d(gz) = dL_{est}. \quad [\text{Q.54}_b]$$

Inoltre, nel caso di un fluido liquido, le variazioni termodinamiche dell'entalpia (di temperatura e pressione) si riducono praticamente a due soli contributi:

- ad una variazione del prodotto della pressione  $p$  per volume specifico del fluido  $1/\rho$ ;
- a variazioni dell'energia interna sotto forma di calore, a causa degli attriti che dissipano parte dell'energia meccanica  $L_{est}$ .

Pertanto, il bilancio delle energie sarà:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) + dQ_d + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + d(gz) = dL_{est}. \quad [\text{Q.55}]$$

A questo punto, si nota che se si porta il termine dell'energia di calore  $dQ_d$  (acquistato dal volume fluido per dissipazione di energia meccanica) al secondo membro dell'eq. Q.55, si ottiene la seguente equazione:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + d(gz) = dL_{est} - dQ_d. \quad [\text{Q.55}_b]$$

Questa equazione esprime, in termini differenziali, il fatto che l'apporto energetico fornito  $dL_{est}$  da macchine esterne, depurato dalla quota dissipata per attrito  $dQ_d$ , incrementa il carico energetico del fluido che, per unità di massa fluida, risulta:  $H/\rho = gz + p/\rho + v^2/2$ . Inoltre, si riconosce l'analogia tra quest'ultima equazione in termini di energie e l'equazione Q.43\_b in termini di potenze.

Inoltre, se si esprime l'energia esterna fornita  $L_{est}$  e l'energia dissipata  $Q_d$  in termini di energie per unità di peso, allora il bilancio energetico nell'eq. Q.55\_b assume la forma:

$$d\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g}v^2 + z\right) = (dL_{est} - dQ_d). \quad [\text{Q.55}_c]$$

Dove si riconosce il termine energetico già introdotto precedentemente:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}.$$

Pertanto, l'equazione Q.55\_c indica che l'incremento del carico energetico  $H$  del fluido è dato dalla differenza tra l'energia somministratagli dall'esterno e l'energia dissipata al suo interno sotto forma di calore. Si ritrova, sostanzialmente quanto visto per l'eq. Q.43\_b.

