EUROCODES SPREADSHEETS STRUCTURAL DESIGN ©2014
di Carlo Sigmund. Tutti I diritti riservati.

Prima edizione: Gennaio 2017
Formato cartaceo: 18.91 x 25.59

Parte 1 - Bilanci energetici per fluidi newtoniani

Questi sono essenzialmente degli appunti personali riguardanti le equazioni dei fluidi newtoniani. Parte di questo lavoro ha concentrato l'attenzione essenzialmente sulla caratterizzazione del moto dei fluidi di tipo Navier-Stokes e sulle equazioni di bilancio energetico meccanico-termodinamico.

Si è fatto riferimento implicito a tutta la trattazione della cinematica dei fluidi, come presentata nei testi di Meccanica dei Fluidi, ai quali si rimanda per migliori e più dettagliate delucidazioni.

Tendenzialmente, ci si è orientati verso un'impostazione vicina allo studio dei fluidi per le Macchine, in particolar modo le Turbomacchine. In ogni caso, i riferimenti alle trattazioni di suddette discipline sono state alquanto superficiali.

ID: 21495648
www.lulu.com
5 800124 448789

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Parte 1 - Bilanci energetici per fluidi newtoniani

Carlo Sigmund

Parte 1
Bilanci energetici per
FLUIDI NEWTONIANI

Carlo Sigmund

Acquista online su lulu.com

Matematica & Ingegneria

Prima edizione
● Stampato ●

EUROCODES Spreadsheets Structural Design
© 2014 di Carlo Sigmund. Tutti i diritti riservati.
Via Primo Maggio 28/3 - 33017 Tarcento (UD)
info.soft.sigmund@tiscali.it
http://eurocodespreadsheets.jimdo.com/eurocodes-spreadsheets/

Editore e autore: Carlo Sigmund

Foto in copertina: *Water Drop*
http://www.desktop-background.com/wallpaper/water-drop-crown-hd-wallpapers-794607

Decorazioni/Arts utilizzate: designed by Freepik, http://www.freepik.com
* * *

Prima edizione, gennaio 2018
Formato cartaceo

Sigmund, Carlo
Matematica e fisica nel dimensionamento strutture secondo Eurocodici e normativa italiana

Titolo del libro: Bilanci energetici per fluidi newtoniani - Matematica & Ingegneria
Strutture; Progettazione; Eurocodici Strutturali CEN TC/250.
Nessuna parte del presente documento può essere riprodotta, memorizzata in un sistema che ne permetta l'elaborazione, né trasmessa in qualsivoglia forma e con qualsivoglia mezzo elettronico o meccanico, né può essere fotocopiata, riprodotta o registrata altrimenti, senza previo consenso scritto dell'editore, tranne nel caso di brevi citazioni contenute in articoli di critica o recensioni.

La presente pubblicazione contiene le opinioni dell'autore e ha lo scopo di fornire informazioni precise e accurate. L'elaborazione dei testi, anche se curata con scrupolosa attenzione, non può comportare specifiche responsabilità in capo all'autore e/o all'editore per eventuali, errori, refusi e/o inesattezze.
L'autore detiene i diritti per tutti i testi, le tabelle e le illustrazioni contenute in questo documento.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Parte I

Bilanci energetici per fluidi newtoniani

Dedicato a Chiara & Sara

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Sommario

Introduzione vii

A. Sul teorema del trasporto a-1

A–1 *Deduzione del teorema del trasporto dalla definizione di derivata sostanziale* a-1

Definizione di derivata sostanziale a-1
Componente convettiva della derivata sostanziale a-2
La velocità di deformazione del volume fluido a-2

B. Operatori matematici e alcuni utili teoremi b-1

B–1 *Elementi di calcolo vettoriale* b-1

Grandezze scalari e vettoriali b-1
Prodotto scalare o interno tra vettori b-1
Prodotto vettoriale (o esterno) di vettori b-5
Alcune notazioni e formule utili b-8

B–2 *Elementi di calcolo tensoriale (tensori del I e II ordine)* b-9

Campi vettoriali e tensoriali b-9
Operatore gradiente b-17
Concetto di derivata sostanziale b-18
Operatori divergenza di un campo vettoriale b-21
Operatore rotore di un campo vettoriale b-23

B–3 *Teoremi sugli integrali: cenni* b-30

Trasformazione integrale del teorema di Gauss B-30
Teorema del gradiente b-31
Teorema della divergenza b-31
Teorema del trasporto b-32

C. Sull'equazione di Navier-Stokes c-35

C–1 *Tensori delle velocità di deformazione* c-35

Linearizzazione della funzione di campo velocità c-35
Decomposizione del tensore delle velocità di deformazione c-36
Forma matriciale del tensore del campo della velocità c-36
La componente residua della variazione di velocità c-37
Alcune osservazioni sui cinematismi di deformazione c-37
Alcune osservazioni sulla natura dei fluidi newtoniani c-40

C–2 *L'equazione di Navier-Stokes* c-41

Tipi di sforzi nei fluidi c-41
Fluidi newtoniani c-42
Equazione indefinita dei fluidi newtoniani c-44
Entità delle variazioni della pressione isotropa c-46
Specializzazione dell' equazione di Navier-Stokes c-46

D. Equazioni cardinali per fluidi newtoniani d-51

D–1 *Equazioni indefinite del moto* d-51

D–2 *Equazioni termodinamiche cardinali* d-55

Equazione di bilancio globale delle energie d-56
Vettore densità di potenza termica d-59
Equazioni indefinite della Termodinamica d-60
Il teorema di Bernoulli in forma generale termodinamica d-67

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Recupero e controrecupero per fluidi reali comprimibili d-68
Condizione di barotropicità per un fluido d-70
Seconda formulazione del teorema di Bernoulli d-71
Dissipazione energetica in un fluido aeriforme incompressibile d-74
Energia cinetica locale per fluido isocoro irrotazionale (o rotazionale) d-76
L'equazione costitutiva di Fourier d-78
Sul segno del secondo coefficiente di viscosità dinamico d-79
Alcune osservazioni sulle equazioni di bilancio dell'energia d-84
Le formulazioni operative delle equazioni di bilancio dell'energia d-87
Identità costitutiva della potenza viscosa dissipata d-89
Ulteriori forme delle equazioni di bilancio energetico d-90

E. Teorema di Bernoulli: aspetti teorici e-109

E–1 *Aspetti generali del moto dei fluidi ideali* e-109
Lo schema di fluido ideale e-109
Termodinamica dei fluidi ideali e-110

E–2 *Aspetti energetici dei fluidi* e-112
Moto barotropico e-112
Espressione vettoriale dell'accelerazione e-113
Il potenziale delle accelerazioni e-115
Il teorema di Bernoulli in campo rotazionale e-116
Il teorema di Bernoulli in campo irrotazionale e-119
Adattamento del teorema di Bernoulli ai casi reali e-122
Il teorema di Bernoulli nei sistemi di riferimento non inerziali e-126

E–3 *Equazioni di bilancio energetico per le turbomacchine* e-128
Deduzione dell'equazione cinetica dell'energia e-128
L'equazione dell'energia per le turbomacchine e-129
Equazione del moto isotermo per fluido aeriforme e-131

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Introduzione

Questi sono essenzialmente degli appunti personali riguardanti le equazioni dei fluidi newtoniani. Parte di questo lavoro ha concentrato l'attenzione essenzialmente sulla caratterizzazione del moto dei fluidi di tipo Navier-Stokes e sulle equazioni di bilancio energetico meccanico-termodinamico. Si è fatto riferimento implicito a tutta la trattazione della cinematica dei fluidi, come presentata nei testi di Meccanica dei Fluidi, ai quali si rimanda per migliori e più dettagliate delucidazioni.

Tendenzialmente, ci si è orientati verso un'impostazione vicina allo studio dei fluidi per le Macchine, in particolar modo le Turbomacchine. In ogni caso, i riferimenti alle trattazioni di suddette discipline sono state alquanto superficiali.

Per sola comodità personale, si sono riportate succintamente, per quanto possibile, alcune premesse di tipo matematico riguardanti il calcolo vettoriale e tensoriale, quest'ultime in termini molto basilari.

Si spera che quanto riportato sia almeno di invito o incentivo alla consultazione di testi più completi e seri. Per quanto mi riguarda, rimettere ordine su vecchi pezzi di carta e appunti sparsi qua e là fra pagine di libri un po' da me dimenticati è stato piacevole e ancora una volta interessante.

Ringrazio anticipatamente, e comunque, tutti Coloro i quali vorranno dedicare parte del loro tempo a qualche pagina di questi miei appunti.

Buona lettura, quindi.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

in termini di valore medio della divergenza del campo della velocità all'interno del volume finito V scelto.

Applicando la regola di DE L'HOPITAL per limite con $V \to 0$ all'espressione integrale del valore medio della divergenza, si ottiene il valore limite locale della derivata sostanziale dell'unità di volume fluido:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V}\int_V div\mathbf{v}\,dV \quad \Rightarrow \quad \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \lim_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\int_V div\mathbf{v}\,dV\right) = div\mathbf{v} \tag{A–11}$$

da cui la nota relazione in termini locali (velocità di variazione del volume unitario):

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = div\mathbf{v}. \tag{A–12}$$

con la derivata sostanziale tendente al limite a una derivata di tipo locale. A questo punto, se si indica con $v_{\Delta V} = dV/dt$ la velocità di deformazione del volume di fluido V in una qualsiasi trasformazione termodinamica, nell'assenza però di tensioni per scorrimento a taglio (quindi per deformazioni a volume non costante: *anisocore*), si potrà scrivere:

$$\frac{DV}{Dt} = \int_V \frac{1}{V}(dV/dt)\,dV = \int_V \frac{v_{\Delta V}}{V}\,dV \approxeq \overline{v_{\Delta V}}\int_V \frac{dV}{V} = \overline{v_{\Delta V}}\ln|V|$$

e la derivata sostanziale del volume fluido (si veda la prima equazione nella (A–10)) durante una trasformazione termodinamica risulterà legata proprio alla velocità di contrazione o dilatazione (media) di un volume fluido di riferimento pari a $V = e$ (numero di NEPERO).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Sezione B

Operatori matematici e alcuni utili teoremi

Si riportano all'attenzione alcuni operatori matematici largamente impiegati nelle formulazioni teoriche scientifiche e, succintamente, alcuni teoremi e risultati che frequentemente vengono utilizzati in Matematica e in Ingegneria.

B–1 ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

I vettori vengono utilizzati frequentemente, ad esempio, per rappresentare forze, accelerazioni, velocità e spostamenti. In questa sezione, si cercherà di sintetizzare il più possibile le caratteristiche matematiche e geometriche dell'entità "vettore".

Grandezze scalari e vettoriali

Vengono definite *scalari* quelle grandezze, completamente individuate e misurate tramite un numero (*scalare*, appunto) in un determinato sistema di unità di misura (ad esempio, temperatura, massa, pressione, etc.). Altre grandezze, invece, non sono completamente definite da un numero e dalla relativa unità di misura, e occorre specificarne anche una direzione nello spazio (o nel piano) e un verso lungo questa direzione. Queste ultime grandezze si dicono vettoriali, appunto, perché utilizzando l'ente geometrico "vettore" definito da:

- un'*intensità* (la sua intensità, modulo o scalare)
- una *direzione* (retta d'azione)
- un *verso* (orientamento sulla retta d'azione).

Il vettore viene rappresentato nello spazio euclideo[(i)] da un segmento orientato (il segno grafico è una semplice freccia). La lunghezza del segmento misura in una scala stabilita del vettore (detto modulo o scalare); l'orientamento della freccia, da un'estremità all'altra, indica il *verso* del vettore.

Prodotto scalare o interno tra vettori

Si definisce prodotto *scalare* o *interno*, di due vettori **v** e **u**, lo scalare che si ottiene moltiplicando l'intensità dei due vettori (norma o moduli) per il coseno dell'angolo, formato dalle rispettive rette d'azione, compreso fra le estremità delle loro direzioni orientate:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \| \mathbf{v} \| \| \mathbf{u} \| \cos \alpha_{uv} = vu \cos \alpha_{uv} = v u_v = v_u u \qquad \text{(B–1)}$$

avendo indicato con $u_v = u\, cos\alpha_{uv}$ la lunghezza della componente del vettore **u** proiettato sulla direzione del vettore **v**; mentre, analogamente, con $v_u = v\, cos\alpha_{uv}$ la lunghezza della componente del vettore **v** proiettato sulla direzione del vettore **u**. Il prodotto scalare di due

(i) In Matematica, uno spazio euclideo è uno spazio vettoriale in cui valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

versori, operativamente può essere calcolato moltiplicando tra loro le rispettive componenti, tenendo conto che il prodotto scalare tra versori/vettori perpendicolari è sempre nullo:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (v_x \mathbf{i}_x + v_y \mathbf{i}_y + v_z \mathbf{i}_z)(u_x \mathbf{i}_x + u_y \mathbf{i}_y + u_z \mathbf{i}_z) = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z. \tag{B–2}$$

Interpretazione geometrica di prodotto scalare.

La prima definizione nella (B–1) si può giustificare matematicamente – potendo sempre individuare il piano π che contiene i due vettori nello spazio (lo si faccia coincidere formalmente con il piano cartesiano $x-y$) – tenendo conto che, se ad esempio con α si indica l'angolo formato dal vettore **u** con l'asse positivo delle x e con $\beta > \alpha$ l'angolo che il vettore **v** forma sempre con l'asse positivo delle x, allora il prodotto delle relative componenti nel piano π (come definito in (B–2)) espresse come:

$$\begin{cases} u_x = u\cos\alpha \\ u_y = u\sin\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v\cos\beta \\ v_y = v\sin\beta \end{cases} \quad \text{risulta pari a:}$$

$$vu\cos\alpha_{uv} = v_x u_x + v_y u_y \;\Rightarrow\; vu\cos(\beta - \alpha) = uv\cos\alpha\cos\beta + uv\sin\alpha\sin\beta$$

da cui discende la nota relazione trigonometrica del coseno della differenza di due archi:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

È infatti immediato riscontrare che proiettando prima il vettore **v** sull'asse x (ottenendo quindi la componente v_x) e poi proiettando questa stessa componente sulla direzione del vettore **u**, si ottiene proprio il termine:

$$v_x = v\cos\beta \;\Rightarrow\; v_x\cos\alpha = v\cos\beta\cos\alpha.$$

Analogamente, se si proietta il vettore **v** sull'asse y (ottenendo quindi la componente v_y) e poi si proietta questa stessa componente lungo la direzione del vettore **u** si ottiene:

$$v_y = v\sin\beta \;\Rightarrow\; v_y\sin\alpha = v\sin\beta\sin\alpha.$$

Pertanto, adottando la posizione $\alpha_{uv} := (\beta - \alpha)$, la proiezione del vettore **v** sulla direzione del vettore **u** è misurata dalla somma dei due termini appena trovati:

$$v_y\sin\alpha + v_x\cos\alpha = v_u \;\Rightarrow\; v_u = v\cos(\beta - \alpha) = v\cos\alpha_{uv}.$$

Pertanto, ritornando alla definizione (B–1), per avere il prodotto scalare basta evidentemente moltiplicare quest'ultima relazione per il modulo u del vettore **u**. Identico risultato si ottiene se si proietta il vettore **u** sul vettore **v**. La figura a lato sintetizza quanto appena osservato. Utilizzando la notazione di Einstein sugli indici ripetuti, il prodotto scalare dei due vettori può esprimersi in forma sintetica e compatta come (si veda la (B–2)):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i}_k v_k) \cdot (\mathbf{i}_k u_k) = v_k u_k, \tag{B–3}$$

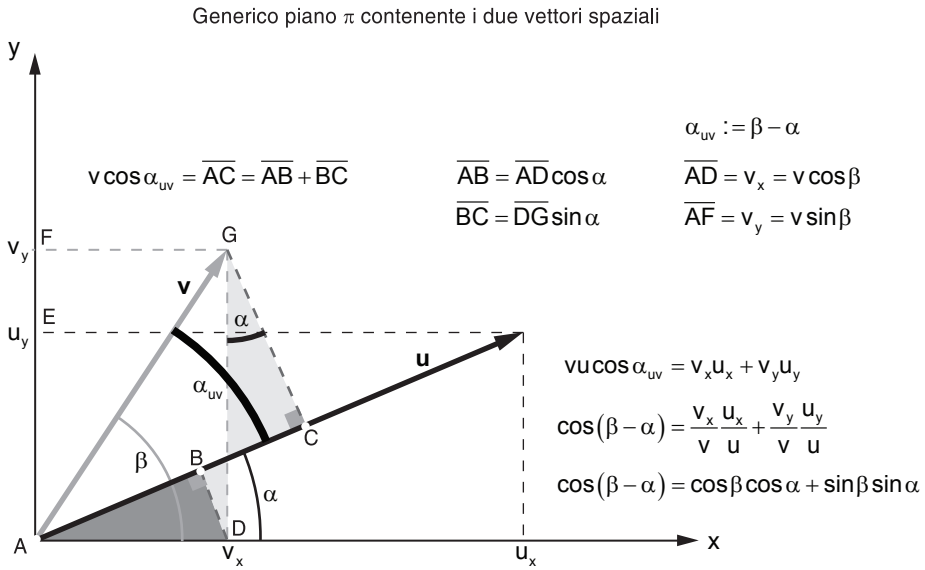
sommando sull'indice (ripetuto) k, intendendolo quindi come prodotto scalare di due tensori del I ordine. Nel caso si applicasse la (B–1) ai versori corrispondenti ai due versori **v** e **u**, si avrebbe:

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \|\hat{\mathbf{v}}\|\|\hat{\mathbf{u}}\|\cos\alpha_{uv} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha_{uv} = \cos\alpha_{uv}. \tag{B–4}$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura B–1

Relazioni geometriche e trigonometriche sul prodotto scalare fra due vettori spaziali considerati contenuti in un piano π.



Pertanto, il prodotto scalare tra due versori equivale al coseno dell'angolo compreso fra due vettori origine **v** e **u**, considerando sovrapponendo i due versori in modo che si sovrappongano equiversi (stesso verso l'uno sull'altro). Confrontando quindi la (B–4) con la (B–1), discende:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|\cos\alpha_{uv} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{u}}) = (\|\mathbf{v}\|\hat{\mathbf{v}})\cdot(\|\mathbf{u}\|\hat{\mathbf{u}}) \qquad \text{(B–5)}$$

da cui risulta come conseguenza:

$$\begin{cases}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\hat{\mathbf{v}} = v\,\hat{\mathbf{v}}\\ \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|\hat{\mathbf{u}} = u\,\hat{\mathbf{u}}\end{cases}$$

confermando il fatto che un qualsiasi vettore può essere sempre espresso dal prodotto del suo versore (che indica la *direzione* e il *verso*) per il modulo del vettore stesso.[ii] A sua volta, il generico versore può essere espresso, in un sistema cartesiano, alla stessa stregua di un generico vettore. Considerando ad esempio il versore $\hat{\mathbf{u}}$ come un vettore **u** di modulo unitario, si può scrivere:

$$\begin{cases}u_x = 1\cdot\cos\alpha_{ux} = \cos\alpha_{ux}\\ u_y = 1\cdot\cos\alpha_{uy} = \cos\alpha_{uy}\\ u_z = 1\cdot\cos\alpha_{uz} = \cos\alpha_{uz}\end{cases}$$

avendo considerato con α_{ux}, α_{uy}, α_{uz} gli angoli formati dal vettore di modulo unitario $\hat{\mathbf{u}}$ rispetto ai tre assi coordinati *xyz*. Esprimendo il versore $\hat{\mathbf{u}}$ rispetto alle sue componenti:

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\alpha_{ux}\mathbf{i}_x + \cos\alpha_{uy}\mathbf{i}_y + \cos\alpha_{uz}\mathbf{i}_z \qquad \text{(B–6)}$$

(ii) Il prodotto di uno scalare k per un vettore (o un versore) è un nuovo vettore che, rispetto al precedente, differisce solo dall'entità del suo modulo (amplificata appunto dal valore k).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

e, dovendo essere valida come si è visto la relazione vettoriale $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|\hat{\mathbf{u}} = u\,\hat{\mathbf{u}}$, moltiplicando ambo i membri della (B–6) per lo scalare u, si conferma la relazione:

$$\mathbf{u} = u\,\hat{\mathbf{u}} = u\cos\alpha_{ux}\mathbf{i}_\mathrm{x} + u\cos\alpha_{uy}\mathbf{i}_\mathrm{y} + u\cos\alpha_{uz}\mathbf{i}_\mathrm{z} = u_x\mathbf{i}_\mathrm{x} + u_y\mathbf{i}_\mathrm{y} + u_z\mathbf{i}_\mathrm{z}.$$

Per il generico vettore $\mathbf{v}$ il discorso è perfettamente analogo:

$$\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{v}} = v\cos\alpha_{vx}\mathbf{i}_\mathrm{x} + v\cos\alpha_{vy}\mathbf{i}_\mathrm{y} + v\cos\alpha_{vz}\mathbf{i}_\mathrm{z} = v_x\mathbf{i}_\mathrm{x} + v_y\mathbf{i}_\mathrm{y} + v_z\mathbf{i}_\mathrm{z}.$$

A questo punto, il prodotto scalare fra i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ può esprimersi moltiplicando scalarmente le espressioni in funzione dei versori degli assi, tenendo debitamente conto del fatto che il prodotto scalare fra versori tra loro perpendicolari (per quanto è stato già osservato) deve essere nullo. Si annulleranno quindi tutti i prodotti $\mathbf{i}_\mathrm{k}\cdot\mathbf{i}_\mathrm{j} = 0$ per $j \neq k$:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = (v_x\mathbf{i}_\mathrm{x} + v_y\mathbf{i}_\mathrm{y} + v_z\mathbf{i}_\mathrm{z})\cdot(u_x\mathbf{i}_\mathrm{x} + u_y\mathbf{i}_\mathrm{y} + u_z\mathbf{i}_\mathrm{z}) = v_xu_x + v_yu_y + v_zu_z$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = vu(\cos\alpha_{vx}\cos\alpha_{ux} + \cos\alpha_{vy}\cos\alpha_{uy} + \cos\alpha_{vz}\cos\alpha_{uz}) = vu(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{u}}),$$

da cui si deduce intanto che il prodotto dei moduli sta nel rapporto:

$$vu = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}.$$

Nel caso particolare di vettore $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, si ottiene:

$$uu = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{(\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{u}})} \;\Rightarrow\; u^2 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{1} \;\Rightarrow\; u^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$

perché, nello spazio, deve essere: $\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{u}} = \cos^2\alpha_{ux} + \cos^2\alpha_{uy} + \cos^2\alpha_{uz} = 1$ per il teorema di PITAGORA.

In particolare, affermare che due vettori sono fra loro ortogonali, significa imporre che il prodotto scalare dei relativi versori sia nullo:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = vu(\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{u}}) = 0.$$

Quest'ultima condizione, a sua volta, equivale a imporre nullo il prodotto delle componenti dei due vettori lungo gli assi del sistema di riferimento:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = v_xu_x + v_yu_y + v_zu_z = 0 \quad \text{(somma dei prodotti delle componenti omologhe);}$$

escludendo ovviamente la soluzione banale di relazione identicamente nulla per prodotto di due vettori entrambi nulli. In termini geometrici, osservando lo schema in Figura B–1 a pagina b-3, se i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ (nel piano π in xy) sono perpendicolari allora $\overline{\mathrm{AC}} = 0$ e di conseguenza la semplice relazione $\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha_{uv} = \cos 90° = 0$, da cui:

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{v_xu_x}{vu} + \frac{v_yu_y}{vu} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{u_x}{u_y} = -\frac{v_y}{v_x} \quad \text{(nel piano } xy \text{ che li contiene)}$$

quale semplice relazione di proporzionalità fra segmenti omologhi di triangoli rettangoli simili; potendo rappresentare i due vettori perpendicolari rispetto all'origine degli assi cartesiani semplicemente ruotando, rispetto all'origine dagli assi cartesiani stessi, un angolo retto (formato dalle loro due direzioni).

In base alle considerazioni finora viste, in funzione dell'ampiezza dell'angolo α (ottenuto ruotando uno dei due vettori sull'altro in modo che risultino equiversi), è possibile trarre le seguenti conclusioni operative:

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

D'altra parte, però, si avrà per definizione analogamente:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{i}_z \| \mathbf{u} \| (\| \mathbf{v} \| \sin \alpha_{vu}) = \hat{\mathbf{c}}(uv \sin \alpha_{vu}), \tag{B–10}$$

confermando l'esistenza del legame fra i moduli dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e del loro vettore somma $\mathbf{v}$:

$$\| \mathbf{v} \| \sin \alpha_{vu} = \| \mathbf{v}_1 \| \sin \alpha_{1u} + \| \mathbf{v}_2 \| \sin \alpha_{2u} \;\Rightarrow\; v \sin \alpha_{vu} = v_1 \sin \alpha_{1u} + v_2 \sin \alpha_{2u} \tag{B–11}$$

e quindi – a meno del modulo $\| \mathbf{u} \|$ del vettore $\mathbf{u}$ a fattor comune in entrambi i membri dell'ultima relazione – della validità della proprietà commutativa del prodotto vettoriale.

È interessante osservare che il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ è misurato dall'area del parallelogramma individuato dai due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. Analogamente, i due prodotti vettoriali $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{u}$ hanno ciascuno come modulo l'area del parallelogramma individuato dai rispettivi vettori. In altri termini, la validità della proprietà commutativa del prodotto vettoriale implica una relazione fra le aree (in termini quindi di intensità):

$$\| \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \| = \| \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{u} \| \tag{B–12}$$

equivalente, infatti, per quello che è stato visto, alla relazione:

$$uv \sin \alpha_{vu} = u(v_1 \sin \alpha_{1u} + v_2 \sin \alpha_{2u}) \;\Rightarrow\; v \sin \alpha_{vu} = v_1 \sin \alpha_{1u} + v_2 \sin \alpha_{2u}. \tag{B–13}$$

Come controprova, avendo imposto per semplicità i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ tutti giacenti nel piano xy, basta moltiplicare all'ovvia uguaglianza vettoriale $\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z$ del versore dell'asse z, la quantità scalare in termini di uguaglianza di aree appena calcolata, per avere ulteriore conferma della validità della proprietà distributiva:

$$\| \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \| \mathbf{i}_z = \| \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{u} \| \mathbf{i}_z + \| \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{u} \| \mathbf{i}_z \;\Rightarrow\; \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{u}) + (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{u}).$$

Alcune proprietà del prodotto vettoriale. In base alla definizione operativa di prodotto vettoriale (si veda la (B–7)), due vettori danno prodotto vettoriale nullo quando $\sin\alpha = 0$. Ciò accade, evidentemente, quando l'angolo α fra i due vettori è nullo: vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ fra loro paralleli indipendentemente dal loro reciproco verso (con $\alpha = 0 + k\pi$). Inoltre, moltiplicando vettorialmente a due a due i versori $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ di una terna *destrogira*[iii] di assi cartesiani xyz, si ottengono le seguenti relazioni fra versori (vettori di modulo unitario), in virtù della "regola della vite":

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{i}_x \wedge \mathbf{i}_x = 0 & \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z & \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{i}_z = -\,\mathbf{i}_y \\
\mathbf{i}_y \wedge \mathbf{i}_x = -\,\mathbf{i}_z & \mathbf{i}_y \wedge \mathbf{i}_y = 0 & \mathbf{i}_y \wedge \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_x \\
\mathbf{i}_z \wedge \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{i}_y = -\,\mathbf{i}_x & \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{i}_z = 0.
\end{array}$$

Ciò posto, se si esprimono i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ in funzione dei versori degli assi della terna cartesiana *destrogira xyz*, (valendo la proprietà distributiva) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \quad &= (v_x \mathbf{i}_x + v_y \mathbf{i}_y + v_z \mathbf{i}_z) \wedge (u_x \mathbf{i}_x + u_y \mathbf{i}_y + u_z \mathbf{i}_z) \\
\mathbf{c} = (c_x \mathbf{i}_x + c_y \mathbf{i}_y + c_z \mathbf{i}_z) &= (v_y u_z - v_z u_y)\mathbf{i}_x + \\
&\quad + (v_z u_x - v_x u_z)\mathbf{i}_y + \\
&\quad + (v_x u_y - v_y u_x)\mathbf{i}_z
\end{aligned} \tag{B–14}$$

(iii) Terna "destrogira" quando, ad esempio, applicando la "regola della vite" per sovrapposizione dell'asse x sull'asse y si vedrebbe il gambo della vite avanzare nel verso positivo dell'asse delle z.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

che, in forma compatta (usando il formalismo matriciale), può essere posta nella seguente forma per meglio essere ricordata:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_i\left(\varepsilon_{ijk} v_j u_k\right) \tag{B–15}$$

avendo introdotto il tensore del III ordine (operatore di Ricci) ε_{ijk} tale che, partendo dalla posizione $i = 1, j = 2, k = 3$ in cui è per definizione $\varepsilon_{123} = 1$, permutando a piacere i valori dei tre pedici per un numero pari di volte (quindi compreso il numero 0 relativo alla definizione $\varepsilon_{123} = 1$) il valore dell'operatore rimane unitario; viceversa, quando si permuta no a piacere gli indici per un numero dispari di volte (ad esempio, permutando una sola volta, il suo valore è -1). Infine, se c'è almeno un indice ripetuto l'operatore assume valore nullo. Ecco alcuni esempi:

- permutazioni *pari* (si scambiano per due volte due numeri di posto): $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$;
- permutazioni *dispari* (si scambiano solo una volta due numeri di posto): $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$.

Nel caso in oggetto, considerando i pedici numerici:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} &= (v_2 u_3 - v_3 u_2)\mathbf{i}_1 + \\ &+ (v_3 u_1 - v_1 u_3)\mathbf{i}_2 + \\ &+ (v_1 u_2 - v_2 u_1)\mathbf{i}_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} &= \mathbf{i}_1(\varepsilon_{123} v_2 u_3 + \varepsilon_{132} v_3 u_2) + \\ &+ \mathbf{i}_2(\varepsilon_{231} v_3 u_1 + \varepsilon_{213} v_1 u_3) + \\ &+ \mathbf{i}_3(\varepsilon_{312} v_1 u_2 + \varepsilon_{321} v_2 u_1). \end{aligned}$$

si riconosce immediatamente l'utilità della notazione di Ricci per poter compattare la scrittura del prodotto vettoriale in somme di prodotti di tensori del primo ordine (componenti vettoriali) con il tensore di Ricci del III ordine.

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{i}_i\left(\varepsilon_{ijk} v_j u_k\right). \tag{B–16}$$

In sostanza l'operatore di Ricci mette in relazione $i-$*esima* componente del prodotto vettoriale **c** con i pedici delle componenti dei vettori **v** e **u**.

Ad esempio, se si prende in considerazione per ogni componente di **c** il primo termine all'interno della parentesi tonda (quindi, in questo caso, i termini $v_2 u_3$, $v_3 u_1$, $v_1 u_2$), i pedici dell'operatore di Ricci (nell'espressione del prodotto vettoriale) ci informano, nell'ordine (ε_{123}, ε_{231}, ε_{312}), che per la componente $i-$*esima* di **c** il numero del pedice della componente del primo vettore **v** deve essere immediatamente consecutiva secondo la successione $i = 1, 2, 3, 1, 2, 3$ e così via di seguito, circolarmente. A questa deve seguire, moltiplicata, la componente del secondo vettore **u** con pedice subito successivo, sempre secondo la successione dei pedici descritta (quindi $\mathbf{i}_1 v_2 u_3$, $\mathbf{i}_2 v_3 u_1$, $\mathbf{i}_3 v_1 u_2$); mentre quella del secondo termine a parentesi tonda va considerato con segno negativo esplicitato e con il prodotto delle medesime componenti ma con gli indici semplicemente scambiati rispetto al primo termine ($-\mathbf{i}_1 v_3 u_2$, $-\mathbf{i}_2 v_1 u_3$, $-\mathbf{i}_3 v_2 u_1$).

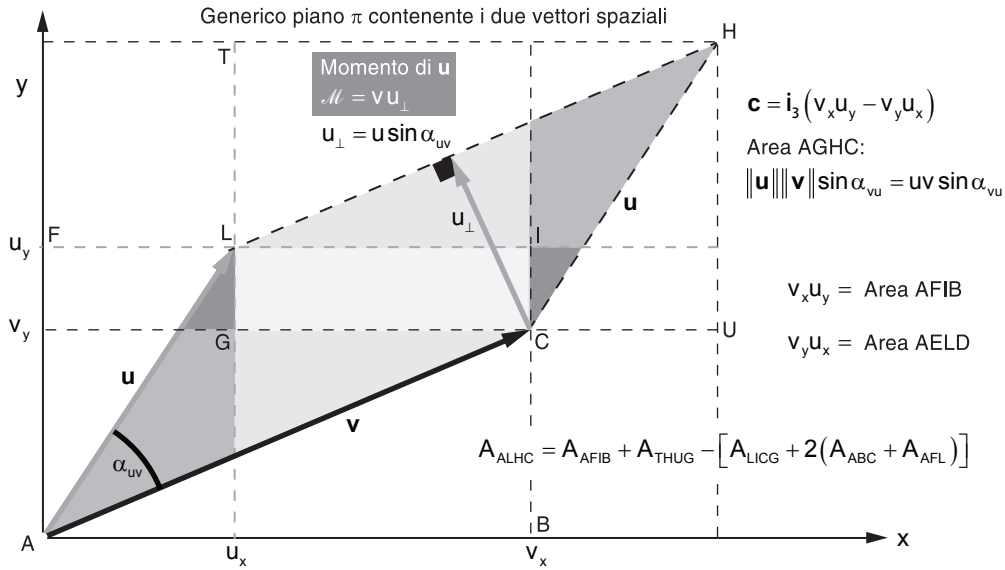
Interpretazione geometrica di prodotto vettoriale.

La definizione di prodotto scalare, data dalla (B–7) in termini di area del parallelogramma definito dai due vettori **v** e **u** (si veda Figura B–2 più avanti), è suscettibile di una interpretazione geometrica in termini sempre di somme e differenze di aree uguali. Si consideri infat-

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura B–2

Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale fra due vettori appartenenti al piano π.



ti la relazione tra le varie zone di aree con cui è possibile, per somme e differenze, ottenere l'area del solo parallelogramma $ALHC$: nel generico piano π che contiene i due vettori:

$$A_{ALHC} = A_{AFIB} + A_{THUG} - [A_{LIGC} + 2(A_{ABC} + A_{AFL})].$$

Esprimendo le aree di triangoli e rettangoli in funzione delle componenti dei due vettori **v** e **u**, e tenendo conto che risulta in maniera evidente $A_{AFIB} = A_{THUG}$ per costruzione, si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} A_{ALHC} &= 2v_x u_y - \left[(u_y - v_y)(v_x - u_x) + 2\left(\frac{1}{2}v_x v_y + \frac{1}{2}u_x u_y\right)\right] \\ &= 2v_x u_y - (u_y v_x - \cancel{u_y u_x} - \cancel{v_y v_x} + v_y u_x + \cancel{v_x v_x} + \cancel{u_x u_y}) \\ &= v_x u_y - v_y u_x \end{aligned}$$

confermando la formulazione (B–14), particolarizzata nel piano π, dunque con v_z e u_z identicamente nulli. Quest'ultima relazione, se si vede il vettore **u** come una forza, informa anche che il prodotto vettoriale del raggio vettore **v** per la forza **u** (lungo la direzione CH) è il momento della forza **u** rispetto all'origine A del raggio vettore **v** (momento di **u** rispetto **v**: $\mathcal{M} = u_\perp v = uv \sin\alpha_{uv}$) pari anche alla somma (algebrica) dei momenti delle singole componenti u_x, u_y del vettore forza **u**. Dati i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ nel piano π, si dimostra analogamente che il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva rispetto alla somma:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3). \qquad \text{(B–17)}$$

La dimostrazione è immediata e segue dall'osservazione della Figura B–3.

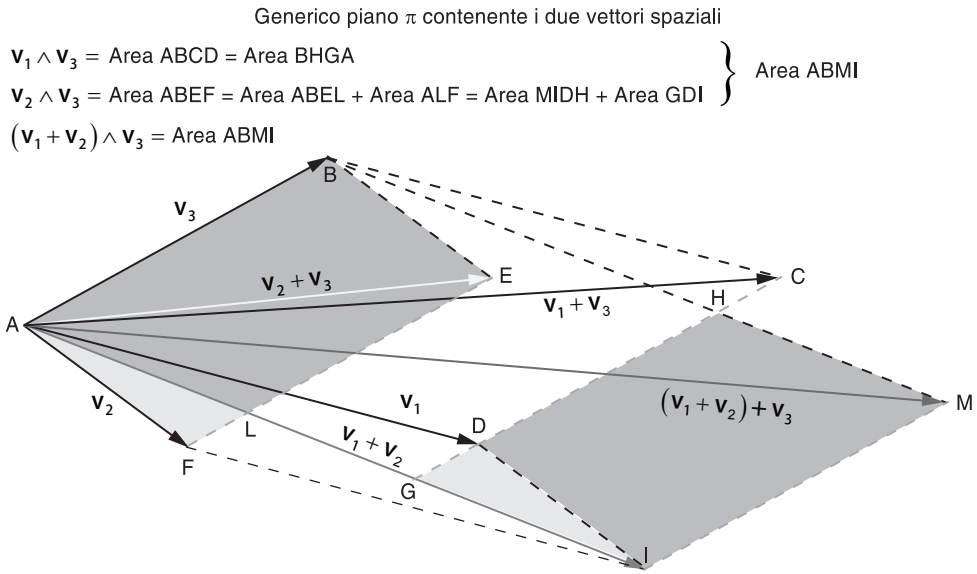
Alcune notazioni e formule utili

Le formulazioni e i fenomeni studiati vengono di norma riferiti ad un sistema di coordinate spaziali cartesiane ortogonali x, y, z di orientamento *destrogiro*. Del riferimento fanno parte i versori fondamentali (quindi di lunghezza unitaria), indicati con i simboli $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$, diretti nell'ordine parallelamente agli assi x, y, z ed orientati nel verso delle coordinate crescenti.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura B–3

Relazione geometrica della proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma.



Coordinate di un punto, vettori. Il punto geometrico P viene indicato mediante le sue coordinate $P(x, y, z)$, oppure ricorrendo al vettore $\mathbf{x}$, di componenti x, y, z, applicato nell'origine degli assi ed, eventualmente, dipendente anche dal tempo t: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z, t)$.

Pertanto, si considerano campi scalari, le grandezze (come pressione, temperatura, etc.) funzioni del tipo $b = b(x, y, z, t) = b(\mathbf{x}, t)$, dipendenti in generale anche dal tempo t. Associando questa grandezza scalare alla grandezza vettoriale $\mathbf{b}$, si scriverà:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_x b_x(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_y b_y(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_z b_z(\mathbf{x}, t), \quad \text{oppure: } \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \equiv [b_x \;\; b_y \;\; b_z],$$

quale tensore del primo ordine (necessario un solo pedice k che varia da x a z). Pertanto, individuato il versore $\mathbf{n} = \mathbf{i}_x n_x + \mathbf{i}_y n_y + \mathbf{i}_z n_z$, al vettore $\mathbf{b}$ è associabile la seguente grandezza scalare (proiezione del vettore $\mathbf{b}$ sulla direzione del versore $\mathbf{n}$):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = b_n(\mathbf{x}, t) = n_x b_x(\mathbf{x}, t) + n_y b_y(\mathbf{x}, t) + n_z b_z(\mathbf{x}, t),$$

quale prodotto scalare fra il versore $\mathbf{n}$ e il vettore $\mathbf{b}$.

B–2 ELEMENTI DI CALCOLO TENSORIALE (TENSORI DEL I E II ORDINE)

Qui alcune relazioni che interessano i tensori del I e II ordine, principalmente. Un tensore del I ordine è un parametro definito da un solo indice (come la componente v_k di un vettore); mentre un tensore del II ordine è un parametro che è definito da due indici i, k (ad esempio uno sforzo di superficie σ_{ik} che agisca lungo la direzione $i-esima$ su un elemento di superficie normale all'asse $k-esimo$).

Campi vettoriali e tensoriali

Si consideri la generica terna di campi vettoriali, associati nell'ordine alle direzioni degli assi x, y, z (e quindi dei versori $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$): $[\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_x) \;\; \mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_y) \;\; \mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_z)]$. I tre campi vettoriali possono considerarsi agenti rispettivamente su aree unitarie parallele ai piani

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

orema di CAUCHY. In altri termini, data una superficie finita A, che racchiuda completamente un volume altrettanto finito V, è teoricamente sempre possibile scegliere una porzione di area elementare dA (della superficie A in un suo intorno $\mathbf{x}$) in modo da farla coincidere con quella obliqua di un tetraedro elementare che presenti le tre facce elementari rimanenti dA_x, dA_y, dA_z tutte all'interno del volume V. In questo modo, si nota che la forza risultante per unità di superficie $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$, per definizione coordinata a ciascun elemento orientabile di superficie dA, è in grado di descrivere compiutamente lo stato di tensione locale (nell'intorno di $\mathbf{x}$) sempre in funzione degli sforzi (vettoriali), relativi alle tre facce mutuamente ortogonali (dA_x, dA_y, dA_z) secondo i piani degli assi cartesiani di riferimento. In particolare, se si esprimono i tre campi vettoriali in funzione dei versori degli assi coordinati, si avrà:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_x) &= \mathbf{i}_x B_{xx} + \mathbf{i}_y B_{xy} + \mathbf{i}_z B_{xz} \\
\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_y) &= \mathbf{i}_x B_{yx} + \mathbf{i}_y B_{yy} + \mathbf{i}_z B_{yz} \\
\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_z) &= \mathbf{i}_x B_{zx} + \mathbf{i}_y B_{zy} + \mathbf{i}_z B_{zz}
\end{aligned} \tag{B–19}$$

avendo, ad esempio, indicato con B_{xy} la componente nella direzione dell'asse y (quindi lungo la direzione positiva del versore $\mathbf{i}_y$) dello sforzo trasmesso attraverso un elemento di superficie normale all'asse delle x e, considerato positivo se, applicato all'elemento di volume che si trova a contatto con tale superficie dal lato delle x crescenti.

Sostituendo le (B–19) nella relazione vettoriale (B–18), si ottengono le componenti del vettore della forza risultante agente sull'unità di area elementare dA inclinata del tetraedro:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbf{i}_x b_x + \mathbf{i}_y b_y + \mathbf{i}_z b_z \quad \text{da cui:} \quad \begin{aligned}
b_x(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) &= n_x B_{xx} + n_y B_{yx} + n_z B_{zx} \\
b_y(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) &= n_x B_{xy} + n_y B_{yy} + n_z B_{zy} \\
b_z(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) &= n_x B_{xz} + n_y B_{yz} + n_z B_{zz}
\end{aligned} \tag{B–20}$$

che quindi condensa il preciso significato del teorema di CAUCHY. In forma compatta di prodotto matriciale scalare fra un versore $\mathbf{n}$ e il tensore $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ (vettore inteso come prodotto righe per colonne di un versore per un tensore del II ordine), si può scrivere:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbf{i}_x b_x + \mathbf{i}_y b_y + \mathbf{i}_z b_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} \tag{B–21}$$

dove il modulo del vettore $\mathbf{b}$, le sue componenti b_k ($k = 1, 2, 3$)[iv] e le componenti del tensore B_{ik} vanno tutti misurati in forza per unità di superficie (ad esempio, newton su metro quadrato, Nm^{-2}). In termini di notazione compatta indicizzata tensoriale, si scriverà:

$$b_k = n_i B_{ik} \;\Rightarrow\; \mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{i}_z) = \mathbf{i}_k b_k = \mathbf{i}_k (n_i B_{ik}) = \mathbf{i}_k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \tag{B–22}$$

sommando solo sui termini con gli indici ripetuti.[v] In particolare, in alcuni casi si può ipotizzare che il vettore $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$ sia perfettamente normale alla superficie inclinata dA del tetraedro elementare, nell'intorno del punto $\mathbf{x}$. Dovrà quindi risultare esprimibile come vettore parallelo al versore $\mathbf{n}$ in questo modo: $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = b\,\mathbf{n}$. In termini di componenti vettoriali, dovrà risultare:

(iv) Risulta per convenzione: $k = 1$ per $v_1 = v_x$; $k = 2$ per $v_2 = v_y$; $k = 3$ per $v_3 = v_z$.
(v) Nella relazione scalare $b_k = n_i B_{ik}$ si fissa "k" (non ripetuto a primo membro) e si somma su "i" (ripetuto due volte nel termine prodotto $n_i B_{ik}$ a secondo membro). Nella successiva relazione vettoriale, l'indice "k" è ripetuto due volte sia a primo membro che a secondo membro; analogamente, l'indice "i" è ripetuto due volte a secondo membro: la sommatoria va dunque estesa a entrambi gli indici e per entrambi i membri.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

In tal caso, nel suddetto sistema di riferimento *principale*, la relazione vettoriale (B–21) si riduce alla forma:

$$\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}, t; \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{i}_{\hat{x}}\, b_{\hat{x}} + \mathbf{i}_{\hat{y}}\, b_{\hat{y}} + \mathbf{i}_{\hat{z}}\, b_{\hat{z}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} n_{\hat{x}} & n_{\hat{y}} & n_{\hat{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\hat{x}\hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\hat{y}\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix}, \tag{B–30}$$

risultando semplicemente:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}, t; \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{i}_{\hat{x}}\, b_{\hat{x}} + \mathbf{i}_{\hat{y}}\, b_{\hat{y}} + \mathbf{i}_{\hat{z}}\, b_{\hat{z}} &= \mathbf{i}_{\hat{x}}\, b\, n_{\hat{x}} + \mathbf{i}_{\hat{y}}\, b\, n_{\hat{y}} + \mathbf{i}_{\hat{z}}\, b\, n_{\hat{z}} \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} n_{\hat{x}} & n_{\hat{y}} & n_{\hat{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\hat{x}\hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\hat{y}\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{i}_{\hat{x}}\, B_{\hat{x}\hat{x}}\, n_{\hat{x}} + \mathbf{i}_{\hat{y}}\, B_{\hat{y}\hat{y}}\, n_{\hat{y}} + \mathbf{i}_{\hat{z}}\, B_{\hat{z}\hat{z}}\, n_{\hat{z}} \end{aligned} \tag{B–31}$$

da cui discende la relazione:

$$\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}, t; \hat{\mathbf{n}}) = b(\mathbf{i}_{\hat{x}}\, n_{\hat{x}} + \mathbf{i}_{\hat{y}}\, n_{\hat{y}} + \mathbf{i}_{\hat{z}}\, n_{\hat{z}}) = \mathbf{i}_{\hat{x}}\, B_{\hat{x}\hat{x}}\, n_{\hat{x}} + \mathbf{i}_{\hat{y}}\, B_{\hat{y}\hat{y}}\, n_{\hat{y}} + \mathbf{i}_{\hat{z}}\, B_{\hat{z}\hat{z}}\, n_{\hat{z}} \tag{B–32}$$

dove, in particolare, la relazione è soddisfatta se il II e il III membro sono identicamente uguali, e ciò accade solo se risulta (nel punto $\hat{\mathbf{x}}$ e all'istante t):

$$b = \left\| \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}, t; \hat{\mathbf{n}}) \right\| = B_{\hat{x}\hat{x}} = B_{\hat{y}\hat{y}} = B_{\hat{z}\hat{z}}; \tag{B–33}$$

ovvero se le forze normali, agenti sull'unità di superficie, assumono tutte il medesimo valore b, indipendentemente dalla direzione $\hat{\mathbf{n}}$ lungo la quale agiscono.

Teorema di Cauchy per fluidi in quiete. Il risultato nella (B–33) assume una rilevanza fondamentale – del tutto generale e indipendentemente dal particolare sistema di riferimento adottato – nella statica dei fluidi, dove la pressione $p = p(\mathbf{x}, t)$ in un generico punto $\mathbf{x}$ e in un istante t considerato qualsiasi assume il medesimo valore, indipendentemente dall'orientamento della porzione di superficie dA su cui insiste:

$$p = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}. \tag{B–34}$$

In quest'ultima relazione, si è considerato per un fluido il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, nelle condizioni particolari di fluido di quiete, quindi con:

$$\begin{cases} \sigma_{ik} = p\delta_{ik} \\ \sigma_{ik}' = 0 \end{cases}$$

dove, appunto, la componente deviatorica σ_{ik}' è identicamente nulla se le velocità del moto del fluido sono nulle (fluido in quiete).[vi] In tal caso, l'espressione matriciale della (B–34) risulta:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} = p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \tag{B–35}$$

con p precisato in base all'equazione di stato del volume fluido. Il vettore sforzo si riduce dunque, per i fluidi in quiete, all'espressione (sforzo normale su ogni superficie bagnata):

(vi) Per fluido in quiete non ha senso specificare se ideale o reale, ovviamente.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\begin{aligned}\mathbf{B}:\mathbf{C} = B_{ik}C_{ik} = B_{xx}C_{xx} + B_{xy}C_{xy} + B_{xz}C_{xz} + \\ + B_{yx}C_{yx} + B_{yy}C_{yy} + B_{yz}C_{yz} + \\ + B_{zx}C_{zx} + B_{zy}C_{zy} + B_{zz}C_{zz}.\end{aligned} \tag{B–38}$$

In generale, le componenti dei campi scalari, vettoriali e tensoriali dipendono dal punto $\mathbf{x}$ e dall'istante t. Della (B–38) è possibile dare un'interpretazione energetica molto intuitiva. Si ammetta, infatti, di voler esprimere la potenza elementare (per unità di volume) fatta dalla risultante della forza F_{1V} su un corpo materiale (sufficientemente contenuto) dotato di velocità $\mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathscr{P}}{dV} = \frac{dL_{1V}}{dt} = \mathbf{F}_{1V}\cdot\mathbf{v} = F_{1V,x}v_x + F_{1V,y}v_y + F_{1V,z}v_z = F_{1V,k}v_k.$$

Come si può notare, in questo semplice esempio, il prodotto scalare (in questo caso di due tensori del I ordine) è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe dei due vettori (la forza risultante per unità di volume e la velocità del corpo.

In modo del tutto analogo, ad esempio nel caso dei fluidi, è possibile applicare il (doppio) prodotto scalare fra due tensori (del II ordine) per fornirne l'espressione della potenza meccanica elementare, dissipata per unità di volume. Mediante infatti il (doppio) prodotto scalare, del tensore degli sforzi σ_{ik} con il tensore delle velocità di deformazione D_{ik}, si può esplicitare matematicamente l'entità della quota di potenza meccanica che, in assenza di "recuperi" per elasticità del fluido (quando comprimibile), non incrementa la potenza cinetica (a causa delle distorsioni viscose). Poiché, in particolare, in un fluido newtoniano gli sforzi σ_{ik} (e quindi il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$), in ogni punto $\mathbf{x}$ e in ogni istante t, sono sempre contrari in verso alle velocità di deformazione D_{ik} (e quindi al tensore delle velocità di deformazione $\mathbf{D}$), per cui:

$$\sigma_{ik} = -\,2\mu\, D_{ik} \quad \text{per} \quad i \neq k \quad \text{(essendo } \mu \text{ definito positivo)},^{\text{(ix)}}$$

per ottenere l'entità positiva della quota[(x)] di potenza dissipabile per attriti (in modo che risulti sempre a detrarre da quella meccanica inizialmente trasmessa al fluido), stante la convenzione adottata sui segni dell'equazione costitutiva, è necessario che prima del doppio prodotto scalare risulti esplicitato il segno meno:

$$\frac{d\mathscr{P}_d}{dV} = -\,\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} = -(-\,2\mu\, D_{ik})D_{ik} = 2\mu D_{ik}^2 = 2\mu(\mathbf{D}:\mathbf{D}) > 0 \tag{B–39}$$

Prodotto scalare fra vettore e divergenza di un tensore.

Si definisce divergenza di un tensore $\mathbf{B}$ il seguente vettore:

$$\begin{aligned}div\mathbf{B} = \mathbf{i}_x\left(\frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial z}\right) + \mathbf{i}_y\left(\frac{\partial B_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zy}}{\partial z}\right) + \\ + \mathbf{i}_z\left(\frac{\partial B_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial B_{zz}}{\partial z}\right) = \\ = \mathbf{i}_k\left(\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_i}\right)\end{aligned}$$

(ix) Questo fatto è dimostrabile da considerazioni termodinamiche, relativamente al bilancio di entropia (congruentemente con il secondo principio della Termodinamica).

(x) Si parla di "quota" di potenza dissipabile perché, qualora il fluido fosse comprimibile, parte dell'energia dissipata potrebbe essere "recuperata" o ulteriormente aggravata ("controrecuperata") a causa delle dilatazioni (reversibili elastiche) indotte in seno al fluido dall'apporto irreversibile di calore interno causato dagli attriti stessi.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

avendo espresso nell'ultimo membro l'operatore divergenza del tensore B_{ik} in termini notazione di EINSTEIN, sugli indici ripetuti ($i = 1, 2, 3$ con $k = 1, 2, 3$). In termini compatti matriciali, si scriverà:

$$\left[(div\mathbf{B})_x \;\; (div\mathbf{B})_y \;\; (div\mathbf{B})_z\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x} \;\; \frac{\partial}{\partial y} \;\; \frac{\partial}{\partial z}\right]\begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix}.$$

Pertanto, il prodotto vettoriale fra un vettore $\mathbf{c}$ e il vettore $div\mathbf{B}$ si scriverà:

$$\mathbf{c} \cdot div\mathbf{B} = c_x(div\mathbf{B})_x + c_y(div\mathbf{B})_y + c_z(div\mathbf{B})_z = c_k\left(\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_i}\right). \tag{B–40}$$

Anche per il prodotto vettoriale fra un vettore e la divergenza di un tensore esiste un'analogia energetica. Si consideri, ad esempio, un elemento fluido (di volume elementare dV) a cui sia associato solo un cinematismo di pura traslazione rigida (ad esempio nel piano x, y).[xi] Si consideri nel generico piano π, contenente ad esempio gli assi cartesiani x_i, x_k, una componente elementare $d\mathbf{s}$ di spostamento del baricentro G di un elemento fluido, in assenza di deformazioni di volume e di distorsioni di forma a volume costante:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i_x}\, ds_x + \mathbf{i_y}\, ds_y = \mathbf{i_k}\, ds_k.$$

Si immagini che il contorno dA dell'elemento fluido dV sia sottoposto a degli sforzi di superficie σ_{ik} (di pressione e di taglio) ad opera del fluido esterno a contatto, oppure per la presenza di porzioni di pareti fisse e indeformabili (dove il fluido aderisce). In generale, si riconosce pure che, lungo la generica direzione individuata dall'asse coordinato x_i del sistema di riferimento fissato (o scelto), la risultante della forza di superficie imputabile allo sforzo σ_{ik} (agente quindi lungo la direzione $k-esima$)[xii] è esprimibile come:[xiii]

$$dF_{ik} = \sigma_{ik}\, dA - \left(\sigma_{ik} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dx_i\right) dA = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dx_i\, dA = -\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dV$$

dove la forza risultante dF_{ik}, per unità di volume, agente nella direzione $k-esima$ e che risulta variare linearmente (sviluppo in serie di TAYLOR, arrestato al I ordine) lungo la direzione $i-esima$. Mantenendo la notazione indicizzata, la potenza meccanica per unità di volume, associabile allo spostamento rigido della massa fluida dV nel suo spostamento elementare $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\, dt$, è conseguente alla definizione di lavoro elementare di una forza:

$$\frac{1}{dV}\frac{dL_c}{dt} = \frac{1}{dV}\frac{dF_{ik}\, ds_k}{dt} = \frac{dF_{ik}}{dV} v_k = \frac{d\mathscr{P}_c}{dV} = -\, v_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = -\, \mathbf{v} \cdot div\boldsymbol{\sigma}. \tag{B–41}$$

Si riconosce, quindi, che nel caso particolare di fluido, il prodotto vettoriale fra il campo della velocità in un punto $\mathbf{x}$ e il valore locale della divergenza del tensore $\boldsymbol{\sigma}$ degli sforzi (sempre in $\mathbf{x}$) misura la potenza meccanica, per unità di volume, associabile allo sposta-

(xi) L'esempio non toglie generalità ma semplifica la trattazione, mantenendola più intuitiva.
(xii) Ad esempio, lo sforzo di taglio σ_{xy} diretto secondo l'asse y e giacente su un piano parallelo al piano xy e che varia linearmente in intensità lungo l'asse x (secondo l'approssimazione del polinomio di Taylor del I ordine).
(xiii) Il segno meno, davanti alla funzione σ_{xy} incrementata, è dovuto al rispetto della convenzione dei segni adottata implicitamente nell'espressione del tensore degli sforzi, coerentemente con il teorema di Cauchy: ad esempio, σ_{xy} rappresenta la componente attritiva nella direzione delle y dello sforzo (di taglio) trasmesso su un elemento di superficie normale all'asse x ed applicato (con segno positivo) al fluido che si trova a contatto con tale superficie dal lato delle x crescenti. Nel caso dell'esempio più sopra proposto, è come se si fosse considerato un elemento fluido dV quadrangolare con un vertice coincidente con l'origine degli assi x, y.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

vettore campo delle velocità $\mathbf{v}$ del moto, si può intanto procedere ad esplicitarne il differenziale totale (spaziale/convettivo):

$$d\mathbf{v} = \mathbf{i}_k\, dv_k = \mathbf{i}_k \frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} dx_i = \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, x} dx + \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, y} dy + \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, z} dz \tag{B–44}$$

essendo il vettore della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z = \mathbf{i}_k v_k$, avendo sfruttato la notazione indicizzata sugli indici ripetuti, per cui è uso definire operativamente:

$$(grad\mathbf{v})_{ik} := \frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} \quad \Rightarrow \quad grad\mathbf{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial\, v_x}{\partial\, x} & \frac{\partial\, v_y}{\partial\, x} & \frac{\partial\, v_z}{\partial\, x} \\ \frac{\partial\, v_x}{\partial\, y} & \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} & \frac{\partial\, v_z}{\partial\, y} \\ \frac{\partial\, v_x}{\partial\, z} & \frac{\partial\, v_y}{\partial\, z} & \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z} \end{bmatrix}. \tag{B–45}$$

Pertanto, il differenziale totale convettivo/spaziale del campo della velocità $\mathbf{v}$ è esprimibile come prodotto scalare del gradiente del campo della velocità per l'arbitrario percorso elementare $d\mathbf{s}$ (secondo la seguente definizione di prodotto righe per colonne di un vettore riga per un tensore del II ordine):

$$\mathbf{i}_k\, dv_k = d\mathbf{v} = d\mathbf{s} \cdot grad\mathbf{v} = \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\, v_x}{\partial\, x} & \frac{\partial\, v_y}{\partial\, x} & \frac{\partial\, v_z}{\partial\, x} \\ \frac{\partial\, v_x}{\partial\, y} & \frac{\partial\, v_y}{\partial\, y} & \frac{\partial\, v_z}{\partial\, y} \\ \frac{\partial\, v_x}{\partial\, z} & \frac{\partial\, v_y}{\partial\, z} & \frac{\partial\, v_z}{\partial\, z} \end{bmatrix} = \mathbf{i}_k \frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} dx_i. \tag{B–46}$$

Anche qui, la definizione di *gradiente* del campo delle velocità in un punto $\mathbf{x}_0$ fornisce, tramite il differenziale totale di $\mathbf{v}$, la direzione della massima variazione (spaziale/convettiva) della velocità valutabile localmente in $\mathbf{x}_0$. Pertanto i tre vettori:

$$grad\mathbf{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, x} & \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, y} & \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, z} \end{bmatrix}$$

costituiscono le componenti vettoriali di un tensore del II ordine, che nel caso dei fluidi, è detto *tensore dei gradienti di velocità*. Da quest'ultima definizione formale, si evince chiaramente il concetto di prodotto scalare con il vettore elementare $d\mathbf{s}$.

Concetto di derivata sostanziale

Sempre riferendoci al moto dei fluidi, sfruttando il concetto appena visto di tensore dei gradienti del campo della velocità, è possibile definire il differenziale totale della funzione valutabile in un fissato istante di tempo del moto:

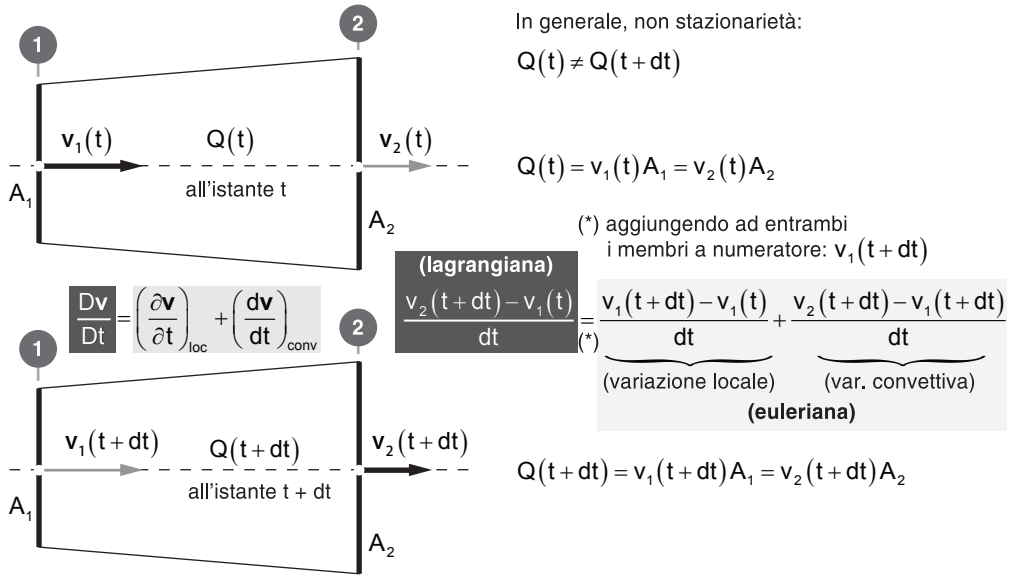
$$\begin{aligned} D\mathbf{v} = \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, t} dt + d\mathbf{v} &= \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, t} dt + d\mathbf{s} \cdot grad\mathbf{v} \\ &= \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, t} dt + \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, x} dx + \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, y} dy + \frac{\partial\, \mathbf{v}}{\partial\, z} dz \end{aligned}$$

avendo qui distinto con $D\mathbf{v}$ la derivata "sostanziale" da quella puramente convettiva $d\mathbf{v}$, valutabile in un fissato istante di tempo. Dividendo entrambi i membri per l'intervallo di tempo elementare dt e supponendo di voler "seguire" la particella fluida lungo il suo moto, per cui si dovranno imporre le relazioni $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, $dz = v_z dt$, (in generale,

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura B–5

Interpretazione dinamica della definizione di derivata lagrangiana.



quindi considerando sempre $dx_k = v_k dt$) fra il sistema di riferimento x, y, z e il campo delle velocità $\mathbf{v}$, si ottiene:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{conv} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z\right)$$
$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot grad\mathbf{v}. \qquad \text{(B–47)}$$

La *derivata sostanziale* permette quindi di legare fra loro due metodi di misura diversi. Nel caso della velocità, la sua derivata sostanziale non è altro che la sua funzione accelerazione, vista come funzione cinematica di una particella puntiforme che viene seguita nello spazio (rispetto a un sistema di riferimento fisso) durante il suo moto, al variare del tempo (misurazione *lagrangiana*):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}_{loc} + \mathbf{a}_{conv}.$$

Se, invece, lungo la traiettoria del moto della particella (supponiamo per semplicità liquida), si fissano due punti attraverso cui la particella transita (misurazione *euleriana*), è possibile valutare la sua accelerazione come somma vettoriale della sua componente di variazione spaziale $\mathbf{a}_{conv} = d\mathbf{s} \cdot grad\mathbf{v}$ (in un dato istante fissato, causa la conformazione stessa del moto liquido per restringimenti o allargamenti di sezione con conseguenti tratti a velocità maggiore o minore per l'incomprimibilità del liquido) e della sua componente di inerzia locale $\mathbf{a}_{loc} = \partial \mathbf{v} / \partial t$ (variazione della velocità in un qualsiasi punto fissato, in virtù della supposta non stazionarietà del campo della velocità, nel caso più generale).

Osservando lo schema in Figura B–5, relativo al moto non stazionario di un fluido incomprimibile attraverso un condotto divergente, la derivata sostanziale può intendersi in questo modo: la variazione della velocità della particella fra gli istanti $t + dt$ e t è data dalla variazione di velocità fra la sezione di uscita A_2 (dove giunge al tempo $t + dt$) e la sezione di entrata A_1 (da cui parte all'istante t). Se per un momento si pensasse a un moto stazionario, si avrebbe per definizione $\mathbf{v}_1(t + dt) = \mathbf{v}_1(t)$ e quindi la derivata sostanziale

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\nabla \wedge \mathbf{v} := rot\mathbf{v} = \mathbf{i}_i\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}u_k\right) = \mathbf{i}_i\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \mathbf{i}_1\left(\varepsilon_{123}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{132}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \\ + \mathbf{i}_2\left(\varepsilon_{231}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \varepsilon_{213}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \\ + \mathbf{i}_3\left(\varepsilon_{312}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \varepsilon_{321}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \qquad \text{(B–53)}$$

essendo appunto, per definizione del tensore di Ricci: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ e $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$.

Interpretazione geometrica del rotore del campo delle velocità.
Considerato lo schema di particella fluida sferica, di volume elementare dV, componenti di rotazione rigida sono sempre possibili quando:

- il fluido è *ideale*[(xv)] (assenza di sforzi di taglio e presenza solo di sforzi normali di pressione con stesso modulo in un punto lungo tutte le direzioni) ma sono presenti moti rotatori rigidi di assieme (ad esempio, la rotazione come corpo rigido per *centrifugazione* con velocità rotatoria $\omega_{kj} = \mathbf{i}_z(\omega_{kj})$ attorno a un asse $\mathbf{i}_z$ verticale di un recipiente contenente del liquido). In tal caso, infatti, le componenti di velocità risultano: $v_k = -\omega_{kj}x_j$, $v_j = \omega_{kj}x_k$; da cui, eseguendo e sommando fra loro le relative derivate parziali, il legame di moto rotazionale (in termini di modulo): $\| rot\mathbf{v} \| = 2\omega_{kj}$;
- il fluido è *ideale* ma non è *barotropico*:[(xvi)] pur supponendo un campo *isotermo*, la distribuzione della densità della particella, non dipendendo più dalla pressione, potrebbe risultare tale da indurre una rotazione rigida, anche in assenza di sforzi di taglio (viscosi), a causa dell'eventuale eccentricità fra le rette di azione delle forze di massa (dipendenti quindi dalla densità) con quelle di superficie esterne (quest'ultime, se la particella è considerata rigida e sferica, sempre passanti per il baricentro geometrico G della particella sferica);
- il fluido è *reale* (*viscoso*) e quindi sono presenti degli sforzi di taglio che possano applicare dei momenti di rotazione alle particelle fluide;
- indipendentemente dal tipo di fluido, sono presenti particolari forze di massa esterne il cui centro di applicazione non passi per il baricentro G del centro di massa della particella fluida: assieme all'azione della forza peso si estrinsecherebbe una coppia (con relativo momento) di rotazione della particella.

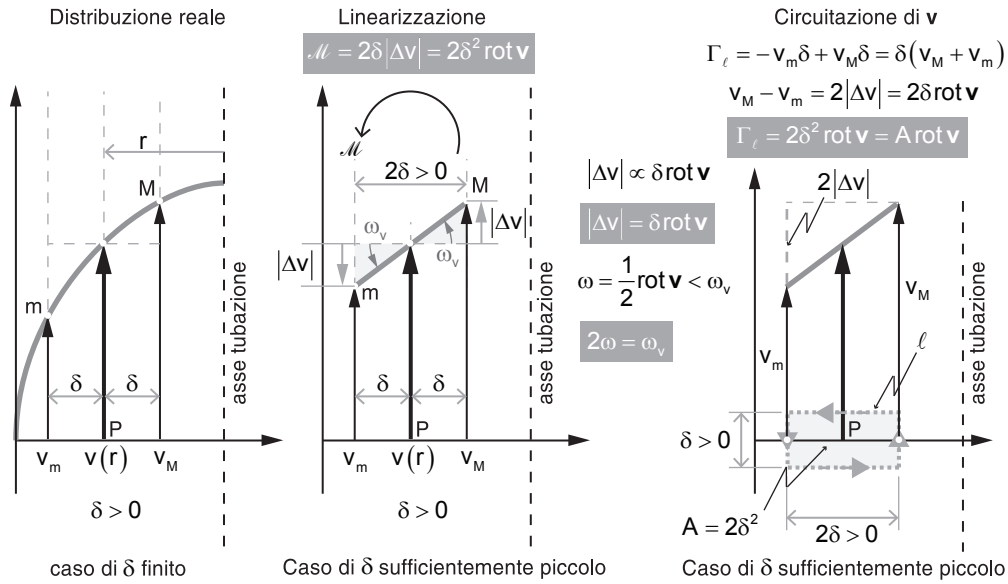
Ciò posto, si consideri ora il caso generale di moto di fluido viscoso all'interno di un tubo di flusso.[(xvii)] La presenza della viscosità e la condizione di aderenza del fluido alle pareti creano delle distorsioni degli elementi fluidi causa gli sforzi di taglio viscosi determinando una

(xv) Fluido con viscosità nulla (fluido perfetto): solo in questo caso infatti gli sforzi sono ovunque ortogonali alla superficie su cui insistono; non possono quindi nascere azioni tangenziali che metterebbero in rotazione la particella fluida.
(xvi) Quando un fluido non è barotropico, allora non esiste più una relazione del tipo $f(\rho, p, t) = 0$, oppure, equivalentemente, non può considerarsi più verificato il legame: $\rho = \rho(p, T)$.
(xvii) Un tubo di flusso è definito come quella superficie le cui linee direttrici coincidono con sole traiettorie del fluido: il fluido durante il suo moto presenta traiettorie sempre tangenti alle pareti del tubo di flusso che quindi risulta sempre "impermeabile" al fluido, pur in assenza (in generale) di sue pareti materiali. Un tubo di flusso può anche variare di forma da istante a istante del moto: in tal caso, variano conseguentemente le traiettorie istante per istante. Come caso limite, una singola traiettoria (variabile nello spazio e nel tempo) può essere trattata come un tubo di flusso (elementare).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura B–8

Interpretazione geometrica di moto rotazionale e di rotore del campo della velocità e deduzione rapida del teorema di STOKES o di KELVIN, sul passaggio dagli integrali di linea a quelli di superficie.



distribuzione parabolica (schiacciata, in caso di moto turbolento) con forti gradienti soprattutto nello strato limite, nell'intorno delle superfici di contatto con le pareti della tubazione.

Osservando la Figura B–8, e considerata in P una traiettoria arbitraria a distanza $r > 0$ dall'asse della tubazione caratterizzata dalla velocità $v = v(r)$, se si sceglie su r un intorno $[+\,\delta;\ -\,\delta]$ su cui si registrano i due valori differenti di velocità (rispettivamente v_m e v_M), si nota che la presenza della viscosità (causa i gradienti suddetti) permette di linearizzare il diagramma delle velocità in prossimità di r a patto di scegliere δ sufficientemente contenuto (al limite infinitesimo):

$$\begin{cases} v_m = v(r) - |\Delta\mathbf{v}| \\ v_M = v(r) + |\Delta\mathbf{v}| \end{cases} \tag{B–54}$$

Il termine $|\Delta\mathbf{v}|$ sta quindi ad indicare (indirettamente) la presenza di una esistente *vorticità* che caratterizza la distribuzione della velocità a gradienti non nulli: in presenza quindi di attriti. Necessariamente, l'entità del termine $|\Delta\mathbf{v}|$ deve dipendere dall'intensità della vorticità locale (quindi deve essere direttamente proporzionale al valore di $rot\mathbf{v}$ nel punto $\mathbf{x}$ del moto, al generico istante t) e, al contempo, dipendere da dove si misurano le differenze dell'entità del gradiente da $\mathbf{x}$ (quindi direttamente proporzionale alla distanza δ):

$$|\Delta\mathbf{v}| \propto \delta\|rot\mathbf{v}\| \;\Rightarrow\; |\Delta\mathbf{v}| = \delta\|rot\mathbf{v}\| \tag{B–55}$$

IMPORTANTE

dove – è importantissimo puntualizzarlo – si tiene conto della *vorticità* in termini di sole rotazioni rigide delle particelle fluide (tramite appunto l'intensità di $rot\mathbf{v}$). Di conseguenza, la velocità angolare ω_v, indicata nella figura in alto, non è la velocità angolare ω di rotazione locale della particella (tale che appunto $2\omega = rot\mathbf{v}$, dalla (B–51) a pagina b-24) ma è da intendersi come la velocità di deformazione angolare che una distribuzione inizialmente uniforme di velocità acquisterebbe, per via delle azioni viscose, nel raggiungere la distribuzione parabolica linearizzata. Tale andamento della distribuzione della velocità è infatti da attribuire (anche graficamente) non solo alle rotazioni rigide ω ma, altrettanto, alle distorsioni angolari (quest'ultime associabili ad una rotazione fittizia di valore ω, risultando per

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

cui una sorta di simmetria, risultando globalmente: $\omega_v = 2\omega$). Si può ora dimostrare che deve esistere una qualche relazione fra il valore locale del *rotore* del campo della velocità **v** in quel punto e in quell'istante e l'intensità della coppia di vettori $\Delta\mathbf{v}$ indotta dalla vorticità stessa. Dall'esame della Figura B–8, si consideri l'entità della coppia di vettori di velocità proporzionali alla vorticità presente nel generico punto P:

$$\mathscr{M} = 2\delta\left|\Delta\mathbf{v}\right| = 2\delta^2\left\|rot\mathbf{v}\right\| = A\left\|rot\mathbf{v}\right\|. \tag{B–56}$$

Si nota che l'entità di questa coppia in P (o, in termini equivalenti, della *vorticità* locale) è proporzionale al valore locale del rotore di **v** moltiplicato un'area.

Se ora, sempre dall'esame della figura a lato, si esegue la circuitazione del campo della velocità nell'intorno del punto P, per quantificare l'entità della vorticità locale, si avrà:

$$\begin{aligned}\oint_\ell \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \Gamma_\ell = -\,v_m\delta + v_M\delta = \delta(v_M - v_m) &= \delta\, 2\left|\Delta\mathbf{v}\right| \\ &= 2\delta^2\left\|rot\mathbf{v}\right\| = A\left\|rot\mathbf{v}\right\|.\end{aligned} \tag{B–57}$$

La *vorticità* (misurata come proporzionale all'intensità del momento $\mathscr{M}$ della coppia di vettori $\Delta\mathbf{v}$) è quindi misurabile come circuitazione Γ_ℓ del campo di velocità **v** lungo la linea chiusa ℓ (in questo esempio, scelta ad hoc); la cui lunghezza e dimensioni racchiudono in sé tutte le precise grandezze geometriche caratteristiche del problema.

Il teorema di Kelvin o Stokes. In particolare, considerando che il rotore del campo scelto per **v** è sempre perpendicolare al piano del foglio (e quindi, in particolare negli schemi in Figura B–8, perpendicolare all'area $A = 2\delta^2$), la relazione (B–57) può essere generalizzata nella forma operativa:

$$\Gamma_\ell = \oint_\ell \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \int_A \mathbf{n}\cdot rot\mathbf{v}\, dA \tag{B–58}$$

avendo esplicitato il versore normale **n** in modo che risulti sempre orientato, perpendicolarmente sulla superficie chiusa dA, e di verso tale da vedere la circuitazione della linea di contorno ℓ (perimetro di A) percorsa in senso antiorario.

Nel caso in oggetto, infatti, il rotore di **v** è perpendicolare al piano del foglio ed è quindi parallelo ed equiverso al versore **n** normale all'area $A = 2\delta^2$ (che risulta quindi uscente dal piano del foglio, per come è stata orientata la linea chiusa ℓ della circuitazione). Di conseguenza, il secondo integrale della (B–58), se si sceglie δ sufficientemente contenuto, risulta approssimabile come:

$$\Gamma_\ell = \int_A \mathbf{n}\cdot rot\mathbf{v}\, dA \cong A\left\|rot\mathbf{v}\right\|$$

ritrovando quindi quanto dedotto per altra via nella Figura B–8.

Moti a potenziale: alcuni cenni. Chiaramente, nei moti a potenziale il campo della velocità **v** è esprimibile (in ogni punto **x** e in ogni istante t) tramite gradiente di una grandezza scalare φ, per cui in tali casi il rotore della velocità risulta sempre identicamente nullo:

$$\mathbf{v} = grad\varphi \;\Rightarrow\; rot\mathbf{v} = rot(grad\varphi) = 0; \tag{B–59}$$

assenti quindi elementi fluidi dotati di componenti di rotazione rigida locale o d'insieme.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Quest'ultima relazione, per il teorema di SCHWARTZ sull'indipendenza dell'ordine di derivazione delle derivate seconde miste, porta a scrivere:

$$d\varphi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \qquad \text{(B–60)}$$

quale un *differenziale esatto* per cui, in perfetta armonia con la (B–58) a pagina b-27, deve risultare:

$$\Gamma_\ell = \oint_\ell \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_\ell d\varphi = 0 = \int_A \mathbf{n} \cdot rot\mathbf{v}\, dA \;\Rightarrow\; rot\mathbf{v} = 0$$

quindi con il fluido in *moto irrotazionale*. Infatti, per il suddetto teorema di SCHWARTZ, per una qualsiasi coppia di componenti di velocità v_i e v_j, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = (rot\mathbf{v})_k = 0$$

con generica componente del *rotore* di $\mathbf{v}$ identicamente nulla.

Riprendendo in tal caso l'esempio in Figura B–8 a pagina b-26, la distribuzione delle velocità deve essere ovunque costante (e non parabolica/schiacciata): coppia di vettori $\Delta\mathbf{v}$ identicamente nulli (nessuna vorticità, quindi, con $\mathscr{M} = 0$).

Analizzando infatti la (B–60) e la (B–59), se si definisce un'ascissa curvilinea $\mathbf{s}$ in modo che la velocità sia ivi sempre tangente (ad esempio, sui punti di una singola traiettoria del moto):

$$\mathbf{v} = grad\varphi = \hat{\mathbf{s}}\frac{d\varphi}{ds} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{v}\| = \|\hat{\mathbf{s}}v\| = v \cong \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \qquad \text{(B–61)}$$

e scelte due curve/superfici 1 e 2 di potenziale $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$, minore è il tratto di traiettoria $\Delta s_{(i)}$ che congiunge φ_2 con φ_1 e maggiore è l'intensità (media) della velocità v_i nel tratto $\Delta s_{(i)}$ e viceversa. Ad esempio:

$$\begin{cases} v_1 \cong \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s_{(1)}} \\ v_2 \cong \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s_{(2)}} \end{cases} \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = v_1 \Delta s_{(1)} = v_2 \Delta s_{(2)} \;\Rightarrow\; \frac{v_2}{v_1} = \frac{\Delta s_{(1)}}{\Delta s_{(2)}} > 1 \;\Rightarrow\; v_2 > v_1.$$

Quest'ultima relazione se applicata lungo due differenti traiettorie lungo un moto fluido con curvatura non nulla (schema a sinistra in Figura B–9) porge in particolare:

$$\Delta\varphi \cong v_M r_M \delta\alpha = v_m r_m \delta\alpha \;\Rightarrow\; v_M r_M = v_m r_m = \text{cost} \;\Rightarrow\; \boxed{v_\theta r = \text{cost}} \qquad \text{(B–62)}$$

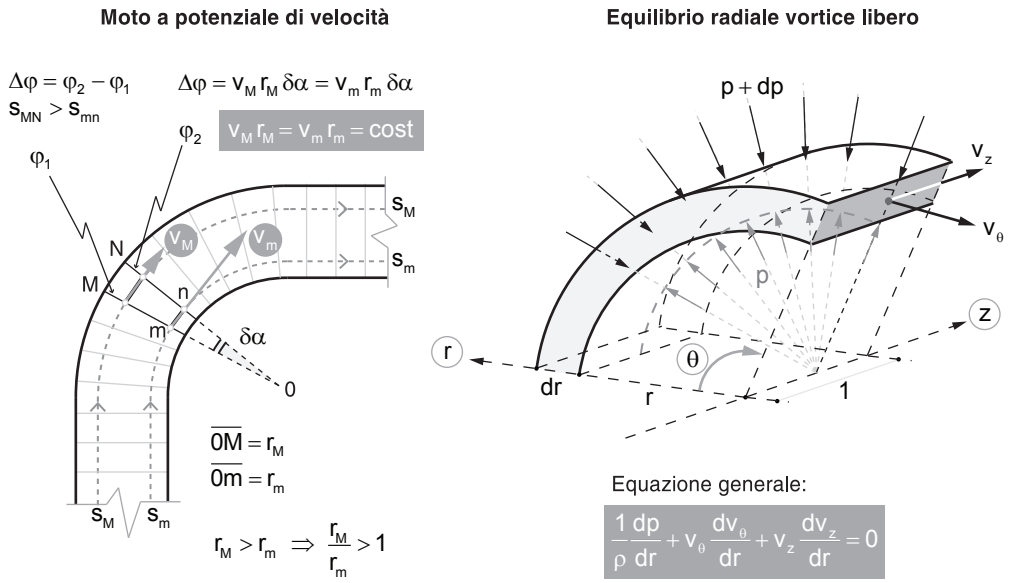
che è una forma particolare dell'*equazione del vortice libero* di HELMHOLTZ. L'equazione (B–62) – in cui la funzione della componente di velocità tangenziale $v_\theta = v_\theta(r)$, lungo la tangente $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}(r)$ alla traiettoria con raggio di curvatura r, varia con legge iperbolica – descrive abbastanza fedelmente[(xviii)] il moto che spontaneamente si produce in un efflusso curvo (moto a potenziale di velocità) o in un condotto/intercapedine dove l'entità della velocità tangenziale $v_\theta(r)$ è predominante rispetto alla velocità assiale[(xix)] $v_z = v_z(z)$. La

(xviii) Nel caso di tratti di flusso sufficientemente contenuti da poter considerare trascurabile le perdite di energia per attrito.
(xix) La componente di velocità assiale è ovviamente delegata al trasporto della massa durante il transito longitudinale del fluido.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura B–9

Fluido con moto a potenziale. La legge del vortice libero: principali forze di equilibrio.



legge del vortice libero, così descritta analiticamente, è valida a rigore per i fluidi incomprimibili, ma può essere tecnicamente applicata anche per quelli comprimibili a patto che non vari troppo, nell'efflusso, la massa volumica ρ. Questo tipo di vortice a potenziale si produce naturalmente nelle intercapedini cilindriche (ad esempio ogni "anulus" fra le palettature delle turbomacchine) perché ottempera all'equilibrio dinamico fra la forza centrifuga che agisce su una particella in rotazione e la forza dovuta alla distribuzione radiale della risultante della pressione.

Legge del vortice libero. In riferimento allo schema a destra in Figura B–9, si consideri un elemento infinitesimo di fluido, largo $r\,d\theta$ alto dr e di profondità unitaria (lungo la direzione longitudinale z di trasporto della portata massica). La massa fluida ha quindi un moto a spirare perché supposta ruotare attorno all'asse z (descrivendo angoli θ) e procedere contemporaneamente anche parallelamente a tale asse.

L'entità elementare della forza centrifuga che tende ad allontanare, radialmente all'esterno, la massa fluida $dM = \rho\, r\, d\theta\, dr$ dall'asse z di rotazione vale:

$$dF_c = dM\,\frac{v_\theta^2}{r} = \rho\, r\, d\theta\, dr\,\frac{v_\theta^2}{r} = \rho v_\theta^2\, d\theta\, dr \tag{B–63}$$

dove $v_\theta = v_\theta(z,\theta)$ è la componente tangenziale della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{i}_z v_z + \mathbf{i}_\theta v_\theta$ che non presenta componenti radiali e $\rho = \rho(z)$ è la massa volumica del fluido.

La risultante delle forze di pressione (che contrastano l'azione delle inerzie centrifughe) è invece:

$$dF_p = r\, d\theta\, dp. \tag{B–64}$$

Imponendo l'uguaglianza/equilibrio di queste due risultanti di forze contrastanti, si ottiene l'importante relazione:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{v_\theta^2}{r} \tag{B–65}$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\sum d\mathbf{F}_k = \mathbf{i}_k\, b(\mathbf{x},t)\, dA_k - \mathbf{i}_k\, b(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t)\, dA_k = -\,\mathbf{i}_k \frac{\partial\, b(\mathbf{x},t)}{\partial\, x_k} dx_k\, dA_k$$
$$= -\,\mathbf{i}_k \frac{\partial\, b(\mathbf{x},t)}{\partial\, x_k} dV \qquad \text{(B–70)}$$

dove, appunto, $d\mathbf{F}_k = \mathbf{i}_k\, b(\mathbf{x},t)$ è la risultante elementare della componente della forza associata allo scalare $b = b(\mathbf{x},t)$ nel punto $\mathbf{x}$ e all'istante t.

Indicando, in particolare, con dA_k la proiezione di dA lungo la direzione del versore $\mathbf{i}_k$ nel corrispondente punto $\mathbf{x}$ e con $dA_k dx_k$ l'espressione del volume elementare di fluido, si potrà considerare in generale:

$$dA_k = n_k dA \;\Rightarrow\; \mathbf{i}_k\, dA_k = \mathbf{i}_k\, n_k\, dA = \mathbf{n}\, dA,$$

misurando appunto con $\mathbf{i}_k\, b(\mathbf{x},t)\, dA_k$ la componente del relativo vettore elementare che insiste sulla superficie infinitesima dA_k, la quale nel punto $\mathbf{x}$ e al tempo t risulta perpendicolare al versore $\mathbf{n}$. Analogo discorso per la componente vettoriale $-\,\mathbf{i}_k\, b(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t)\, dA_k$ che misura la rimanente componente (lungo la direzione $k-$*esima*) del vettore che insiste sulla superficie infinitesima dA_k posizionata però nel punto $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ e sempre al tempo t.

Integrando su un volume finito V racchiuso da una superficie A di frontiera continua e regolare, si può scrivere (in termini di singola componente scalare):

$$\mathbf{i}_k \oint_A b(\mathbf{x},t)\, n_k\, dA = -\,\mathbf{i}_k \int_V \frac{\partial\, b(\mathbf{x},t)}{\partial\, x_k} dV \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \oint_A b(\mathbf{x},t)\, n_k\, dA = -\int_V \frac{\partial\, b(\mathbf{x},t)}{\partial\, x_k} dV \qquad \text{(B–71)}$$

valida per la generica direzione del versore $k-$*esimo* e anche nota come trasformazione integrale del teorema di Gauss.

Teorema del gradiente

Sommando la relazione integrale (B–71) sull'indice k, si ottiene:

$$\oint_A b(\mathbf{x},t)\, \mathbf{n}\, dA = -\int_V \mathbf{i}_k \frac{\partial\, b(\mathbf{x},t)}{\partial\, x_k} dV = -\int_V grad[b(\mathbf{x},t)]\, dV \qquad \text{(B–72)}$$

come relazione vettoriale integrale che trasforma un integrale di superficie, associato allo scalare $b = b(\mathbf{x},t)$, in un integrale di volume associato al gradiente del medesimo scalare.

Teorema della divergenza

Il teorema della divergenza considera il bilancio di flussi di grandezze vettoriali attraverso volumi di controllo V racchiusi da superfici chiuse A. Si consideri ad esempio il flusso della massa elementare dM lungo la direzione $k-$*esima* che entra perpendicolarmente alla superficie infinitesima $dA_k = n_k dA$:

$$dM\,\big|_{\mathbf{x}} = \rho v_k(\mathbf{x},t)\, dA_k\, dt = \rho \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{n}\, dA\, dt.$$

In maniera del tutto analoga, nel medesimo istante di tempo t, si può pensare al flusso di massa uscente da un'area parallela A_k a distanza dalla prima di $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ e tale che:

$$dM\,\big|_{\mathbf{x}+d\mathbf{x}} = \left[\rho v_k(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\, \rho v_k(\mathbf{x},t)}{\partial\, x_k} dx_k\right] dA_k\, dt = \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{n}\, dA\, dt,$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Se il teorema del trasporto si applica sullo scalare di una componente di un vettore (ad esempio il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{i}_\mathrm{k} b_k$, allora il teorema del trasporto si scriverà formalmente come:

$$\frac{D}{Dt}\int_V b_k\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V b_k\, dV - \oint_A b_k(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V b_k\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V b_k\, dV + \int_V div(\mathbf{v}b_k)\, dV.$$

Moltiplicando ambo i membri per il versore (costante) $\mathbf{i}_\mathrm{k}$ si scriverà rispettivamente:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \mathbf{b}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathbf{b}\, dV - \oint_A \mathbf{b}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \mathbf{b}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathbf{b}\, dV + \int_V div(\mathbf{b}\otimes\mathbf{v})\, dV$$

avendo considerato, nell'ultimo integrale di volume, la divergenza del prodotto tensoriale (3×3) del vettore generico $\mathbf{b}$ con il vettore campo velocità $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = (\mathbf{b}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{i}_\mathrm{i} b_i(v_j n_j)$$

sommando su tutti i tre indici.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Sezione C

Sull'equazione di Navier-Stokes

In questa sezione si riportano alcune osservazioni circa l'equazione dei fluidi newtoniani secondo la forma di Navier-Stokes. Viene utilizzata, in particolare, parte della teoria della cinematica dei fluidi in termini di velocità di deformazione di una massa fluida a comportamento newtoniano appunto. Si concentra quindi l'attenzione sulle sole variazioni spaziali, mettendo così in evidenza le componenti di deformazione distorsiva (*isocore* e *anisocore*) che precisamente caratterizzano l'entità delle componenti degli sforzi viscosi in senso alla massa fluida.

C–1 TENSORI DELLE VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE

Esista all'istante t_0 la velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)$ di classe C^1 nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0$ e di componenti v_k. Indicando con $\partial v_k/\partial x_i$ il tasso di incremento lungo le coordinate x_i della componente v_k della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{i}_k v_k = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z = \mathbf{i}_1 v_1 + \mathbf{i}_2 v_2 + \mathbf{i}_3 v_3$, si scriverà:

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial v_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_k}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_k}{\partial x_3} dx_3 \quad \text{e con } k = 1, 2, 3 \text{ (oppure } x, y, z\text{)},$$

avendo utilizzato la nota regola della "notazione di Einstein":

> "*quando un indice si presenta due volte in un medesimo termine di una espressione, occorre sommare rispetto ad esso* (1, 2, 3)*, salvo il caso in cui sia esplicitamente indicato il contrario*".

Linearizzazione della funzione di campo velocità

In particolare, nell'intorno $\mathbf{x}_0$ e all'istante t_0, la componente $k-$*esima* della velocità è linearizzabile mediante formula di Taylor di grado $n = 1$:

$$v_k(\mathbf{x}) = v_k(\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i,$$

dove il tasso di variazione della componente $k-$*esima* lungo e coordinate x_i è calcolato nel punto $\mathbf{x}_0$ all'istante t_0. Sottintendendo sempre quest'ultima precisazione, aggiungendo e sottraendo uno stesso termine, si potrà anche scrivere:

$$\begin{aligned} v_k(\mathbf{x}) &= v_k(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i \\ &= v_k(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) dx_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) dx_i \\ &= v_k(\mathbf{x}_0) + (\Omega_{ik} + D_{ik}) dx_i \end{aligned} \tag{C–1}$$

avendo così semplicemente scisso formalmente il tasso di incremento in due contributi complementari, di cui uno Ω_{ik} relativo alle rotazioni rigide d'insieme e l'altro D_{ik} alle sole

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$grad\mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{C–5}$$

il cui generico elemento $(grad\mathbf{v})_{ik}$ – collocato all'incrocio della riga $i-esima$ con la colonna $k-esima$ – rappresenta la singola componente scalare del tasso di variazione della componente $k-esima$ secondo gli assi coordinati x_i.

La componente residua della variazione di velocità

Si è visto che la generica componente $k-esima$ della velocità del fluido nell'intorno di $\mathbf{x}_0$ appare suddivisibile almeno in tre componenti. La prima $v_k(\mathbf{x}_0)$ è indipendente dal punto $\mathbf{x}$, ed è quindi dovuta ad una traslazione rigida d'insieme: $v_k(\mathbf{x}_0)$ svolge perciò il ruolo di vettore delle velocità di traslazione rigida. La seconda componente $(\Omega_{ik})_{\mathbf{x}_0} dx_i$ rappresenta la componente di velocità dovuta alla rotazione rigida d'insieme con rotazione angolare attorno al baricentro per $\mathbf{x}_0$ e con la particella pensata indeformabile. La rimanente componente deformativa $(D_{ik})_{\mathbf{x}_0} dx_i$ contiene in sé tutti gli effetti distorsivi rimanenti ed è quindi pensabile scissa in due contributi complementari, rispettivamente *isocoro* e *anisocoro*:

$$(D_{ik})_{\mathbf{x}_0} dx_i = (S_{ik} + L_{ik})_{\mathbf{x}_0} dx_i . \tag{C–6}$$

Gli sforzi di natura viscosa che si estrinsecano in seno a un fluido newtoniano – sovrapponendosi alle iniziali pressioni p idrostatiche – sono ascrivibili solamente a quest'ultima componente delle velocità di deformazione; legata quindi, in generale come si è detto, sia a distorsioni a volume costante (e forma variabile) e sia a distorsioni a volume variabile (deformazioni isotrope, quindi a forma costante).

Alcune osservazioni sui cinematismi di deformazione

Si consideri una generica particella fluida elementare (di dimensioni infinitesime e con baricentro nel punto $\mathbf{x}_0$) e si individui passante per $\mathbf{x}_0$ un segmento elementare, tra due punti estremi A e B al suo interno, che sia rappresentativo per poter individuare univocamente le variazioni di assetto della particella nell'intorno di $\mathbf{x}_0$ al tempo t_0. Si denoti quindi con dl_0 la lunghezza iniziale per $\mathbf{x}_0$ del segmento infinitesimo AB e con dl la lunghezza finale del segmento sempre per $\mathbf{x}_0$ ma comunque diversamente orientato e variato in lunghezza nell'intorno di $\mathbf{x}_0$. Volendo individuare tutte le componenti di spostamento della particella (dall'assetto iniziale indeformato dl_0 all'assetto finale deformato dl) in punti dell'intorno di $\mathbf{x}_0$, conviene concentrare l'attenzione su una qualsiasi delle singole componenti $k-esime$ in funzione delle coordinate x_i. Pertanto, moltiplicando semplicemente entrambi i membri della prima dell'Eq. (C–1) per il tempo elementare dt, si ottiene evidentemente:

$$v_k(\mathbf{x})dt = v_k(\mathbf{x}_0)dt + \left.\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i dt \;\rightarrow\; dl_k = dl_{0k} + \left.\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i dt \tag{C–7}$$

risultando confermato che ciascuna singola componente scalare $(grad\mathbf{v})_{ik}$ contiene in sé tutte le informazioni cinematiche al tempo t_0 della componente $k-esima$ della deformazione complessiva che caratterizza il moto della particella elementare (comprendendo anche le rotazioni rigide d'insieme).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Viceversa, volendo solo individuare le componenti distorsive dalla deformazione, prescindendo quindi da traslazioni e rotazioni rigide d'insieme, conviene indagare la sola variazione della lunghezza del segmento rappresentativo AB. In tale caso, infatti, volendo solo dedurre una variazione di lunghezza si lascerebbero indeterminate sia le traslazioni rigide e sia le rotazioni rigide d'insieme. Infatti, a valle di un fissato accorciamento del segmento AB, infiniti possono essere state le precedenti traslazioni e rotazioni rigide d'insieme. In altre parole, conviene concentrare l'attenzione sulla sola variazione di forma e volume, imponendo subito nulle (perché appunto non determinanti) le traslazioni rigide:

$$dl_k = \cancel{dl_{0k}} + \left.\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i dt \;\rightarrow\; dl_k = \left.\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i dt = dx_{kl} - dx_k. \tag{C–8}$$

Nella relazione si è in particolare evidenziato con $l_k = x_{kl} - x_k$ la relazione che lega in un sistema di assi cartesiani le coordinate del raggio vettore di un punto P generico della particella fluida elementare prima della deformazione $\mathbf{r} = \mathbf{i_k} x_k$ con le coordinate del raggio vettore del medesimo punto P dopo la deformazione $\mathbf{r_l} = \mathbf{i_k} x_{kl}$.

In questi termini, lo spostamento complessivo del punto P nella deformazione è rappresentato proprio dal vettore differenza:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r_l} - \mathbf{r} = \mathbf{i_k}(x_{kl} - x_k) = \mathbf{i_k} l_k; \quad \mathbf{l} = \mathbf{i_k} l_k.$$

Interessando qui le sole variazioni di lunghezza dei raggi vettori, converrà trattare il problema in termini di quadrato delle norme dei raggi vettori differenziali. Dalla (C–8) intanto si può ricavare, in termini di quadrati di lunghezze, l'ovvia relazione:

$$dx_{kl}^2 = (dl_k + dx_k)^2 = dl_k^2 + 2dl_k dx_k + dx_k^2. \tag{C–9}$$

Trascurando il termine dl_k^2 perché infinitesimo di ordine superiore, si scriverà:

$$dx_{kl}^2 - dx_k^2 = 2dl_k dx_k = 2\left.\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i dt\, dx_k. \tag{C–10}$$

Poiché i e k sono *indici muti*,[iv] nel membro di destra di questa ultima espressione, sommando sia sull'indice $i-$*esimo* che sull'indice $k-$*esimo* si osserva evidentemente:

$$\left.\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_i dx_k = \left.\frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_k}\right|_{\mathbf{x}_0} dx_k dx_i \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} = \left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} + \frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_k}\right)\right|_{\mathbf{x}_0} = D_{ik}(\mathbf{x_0}). \tag{C–11}$$

Pertanto, dalle relazioni in termini di velocità di deformazione, espressa in termini di variazione dei quadrati delle norme dei raggi vettori elementari:

$$dx_{kl}^2 - dx_k^2 = 2D_{ik}(\mathbf{x_0}) dx_i\, dx_k\, dt \;\rightarrow\; \frac{\|\, d\mathbf{r_l}\,\|^2 - \|\, d\mathbf{r}\,\|^2}{dt} = 2D_{ik}(\mathbf{x_0}) dx_i\, dx_k, \tag{C–12}$$

si ha conferma appunto del fatto che la componente della deformazione che prescinde da traslazioni e rotazioni rigide d'insieme è da imputare al solo tensore D_{ik} di deformazione, caratterizzato in generale solamente da pure distorsioni *isocore* e *anisocore*. Infine, la prima relazione in (C–11) è anche coerente con il fatto che il tensore D_{ik} è stato definito simmetrico.

Come ogni tensore simmetrico, D_{ik} può essere in ogni punto ricondotto ai suoi assi principali. Ciò significa che in ogni punto del dominio di esistenza del fluido si può sceglie-

(iv) In questo caso, sono indici formalmente interscambiabili.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

per tutte le scelte del volume V. In particolare, ricordando il *secondo principio della Termodinamica*, la variazione intrinseca nel tempo dell'entropia $\mathscr{E}$, così definita, non può assumere valori arbitrari ma dovrà essere, in generale, sempre maggiore della quota di potenza termica somministrata (o scambiata) dal sistema fluido in modo reversibile con l'esterno. Qualora, in particolare, non sia presente alcun apporto reversibile di potenza termica con l'esterno, la variazione di entropia risulterà comunque maggiore di zero, almeno a causa della degradazione di energia meccanica sempre inevitabile in seno a un fluido di natura viscosa (fluido reale: $\mathscr{p}_d = \mathscr{p}_d(\mathbf{x}, t) > 0$).

Nel caso invece di fluido ideale ($\mathscr{p}_d = \mathscr{p}_d(\mathbf{x}, t) = 0$),[iii] solo se in assenza di apporti reversibili di calore dall'esterno $\mathscr{w}(\mathbf{x}, t) = 0$, lungo un ciclo termodinamico l'entropia non varia (valendo comunque il segno di uguaglianza nella disequazione (D–19), con relativo integrale di Clausius identicamente nullo fra i due stati $A \rightsquigarrow B$ con $A \equiv B$); diversamente, fra $A \rightsquigarrow B$ con $A \neq B$, varierà proporzionalmente all'apporto stesso di potenza termica scambiata con l'ambiente esterno (appunto, solo reversibilmente, sempre valendo il segno di uguaglianza nella (D–19)); in quest'ultimo caso, se non altro in virtù della presenza di gradienti termici non nulli che, notoriamente, indurranno flussi spontanei dispersivi di calore in seno al dominio stesso del fluido (precisamente, da zone calde verso zone più fredde). In termini matematici generali, per un volume di massa costante di fluido ideale o reale, si richiederà (formalmente) che debba sempre essere rispettata nei limiti la relazione:

$$\frac{D\mathscr{E}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\mathscr{e}\, dV \geq \oint_A \frac{\mathscr{w}}{T}\, dA, \qquad \text{(D–19)}$$

avendo introdotto per comodità la grandezza locale e istantanea $\mathscr{w} = \mathscr{w}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ *densità del flusso di potenza termica* (watt al metro quadro, $\mathrm{W\,m^{-2}}$) scambiata reversibilmente tra il sistema (massa fluida costante M) e l'ambiente esterno, attraverso la superficie A di contorno del volume V.

Vettore densità di potenza termica

Il flusso di potenza termica $\mathscr{w} = \mathscr{w}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ [$\mathrm{W\,m^{-2}}$] attraverso la superficie A dipende anche dall'orientamento locale, rispetto alla sorgente esterna di scambio, del versore normale $\mathbf{n}$ entrante (localmente) sulla superficie A che racchiude il volume V. Essendo il versore $\mathbf{n}$ entrante funzione locale nel dominio ($\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$), si potrà sintetizzare la funzione $\mathscr{w}$ anche mediante la scrittura compatta $\mathscr{w} = \mathscr{w}(\mathbf{n})$. Se ora si introduce il *vettore densità del flusso della potenza termica* $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, quale funzione del punto e dell'istante di tempo considerati, ma non dipendente dall'orientamento della normale locale $\mathbf{n}$ sulla porzione di superficie,[iv] si potrà imporre che localmente sia sempre:

$$\mathscr{w}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$$

intendendo appunto così che, se un elemento di superficie δA presenta normale interna $\mathbf{n}$ perpendicolare alla direzione del vettore $\mathbf{q}$ del flusso (radiante) di potenza termica emessa dalla sorgente, allora attraverso questa porzione di superficie δA non avverrà mai alcun transito (o scambio) di potenza termica (ammettendo implicitamente che la sorgente esterna permanga ferma rispetto al sistema). Viceversa, qualora il vettore $\mathbf{q}$ sia parallelo al versore $\mathbf{n}$, allora attraverso la porzione di superficie δA transiterà il massimo flusso di poten-

(iii) Uguaglianza di μ_d a zero in termini di identità, evidentemente.
(iv) Il vettore densità del flusso della potenza termica dipende primariamente dalla direzione (vettoriale) di irradiazione, e quindi è da mettersi in correlazione unicamente con le caratteristiche della sorgente.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

za termica ($w_{\max}(\mathbf{n}) = \|\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\|$) che verrà assorbito dal volume V racchiuso all'interno dell'intera superficie chiusa A.

Equazioni indefinite della Termodinamica

Sotto le opportune ipotesi di continuità delle funzioni di campo, l'equazione di bilancio globale dell'energia (nella forma vista nella (D–12) a pagina d-56), assume l'aspetto:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \left(\rho u + \frac{1}{2}\rho v^2\right) dV = \int_V \mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f}\, dV + \oint_A \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dA + \oint_A w\, dA. \tag{D–20}$$

In particolare, nella funzione integranda al secondo integrale a II membro, si ha la relazione che definisce il vettore delle risultanti delle forze di superficie $\boldsymbol{\tau}$:

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}_k n_i \sigma_{ik}$ (sommando su entrambi gli indici).

Sempre utilizzando la notazione di Einstein sugli indici ripetuti, si ha anche:

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{i}_k v_k)\cdot(\mathbf{i}_k n_i \sigma_{ik}) = (v_k \sigma_{ik}) n_i.$$

In virtù del teorema di Gauss sulle componenti, si può trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume, (sommando su entrambi gli indici):

$$\begin{aligned}\oint_A \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dA = \oint_A (v_k\sigma_{ik}) n_i\, dA &= -\int_V \frac{\partial\,(v_k\sigma_{ik})}{\partial\, x_i} dV \\ &= -\int_V v_k \frac{\partial\,\sigma_{ik}}{\partial\, x_i} dV - \int_V \sigma_{ik}\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} dV.\end{aligned} \tag{D–21}$$

In forma vettoriale, si scriverà:

$$\begin{aligned}\oint_A \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dA &= -\int_V (\mathbf{i}_k v_k)\cdot\left(\mathbf{i}_k \frac{\partial\,\sigma_{ik}}{\partial\, x_i}\right) dV - \int_V \sigma_{ik}\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} dV \\ &= -\int_V \mathbf{v}\cdot div\boldsymbol{\sigma}\, dV - \int_V \sigma_{ik}\frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_i} dV.\end{aligned}$$

In virtù del teorema della divergenza, si potrà altrettanto trasformare l'integrale di superficie dello scambio di potenza termica in un integrale vettoriale di volume:

$$\oint_A w\, dA = \oint_A \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\, dA = -\int_V div\mathbf{q}\, dV = \int_V \rho\, p_t(\mathbf{x},t)\, dV = \mathscr{P}_t,$$

da cui discende, per l'arbitrarietà del dominio di integrazione: $-div\mathbf{q} = \rho\, p_t$. Utilizzando il teorema del trasporto, unitamente all'equazione di continuità (ipotizzando quindi implicitamente che la massa scelta M si mantenga sempre costante durante qualsivoglia evoluzione), per la variazione intrinseche delle energie si avrà (sommando sull'indice $k-esimo$):

$$\begin{aligned}\int_V \rho\frac{D}{Dt}\left(u + \frac{1}{2}v^2\right) dV &= \int_V \rho\frac{Du}{Dt} dV + \int_V v_k\rho\frac{Dv_k}{Dt} dV \\ &= \int_V \rho\frac{Du}{Dt} dV + \int_V \mathbf{v}\cdot\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV\end{aligned} \tag{D–22}$$

avendo tenuto conto che $\mathbf{v} = \mathbf{i}_k v_k$, sommando sull'indice $k-esimo$. Tenendo condo del teorema delle potenze cinetiche, si ha che deve essere:

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f}\, dV - \int_V \mathbf{v} \cdot div\boldsymbol{\sigma}\, dV, \qquad \text{(D–23)}$$

infatti, per un qualsiasi arbitrario volume di integrazione V risulta vettorialmente:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - div\boldsymbol{\sigma}$$

che nient'altro è che la forma indefinita dell'equazione del moto per fluido newtoniano. Raccogliendo e riordinando le varie relazioni fin qui ottenute, sottraendo membro a membro la (D–23) dalla (D–20), tenendo prima conto delle (D–21) e (D–22), si arriva a scrivere:

$$\int_V \rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} dV = -\int_V \sigma_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dV - \int_V div\mathbf{q}\, dV \qquad \text{(D–24)}$$

che viene indicata come forma integrale del primo principio della Termodinamica, a cui segue la relativa forma indefinita, in virtù dell'arbitrarietà del dominio di integrazione e delle ipotesi implicite ammesse per la continuità e la derivabilità di tutte le funzioni integrande:

$$\boxed{\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\sigma_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - div\mathbf{q}}. \qquad \text{(D–25)}$$

Come si può notare, la variazione sostanziale dell'energia specifica interna dipende dal gradiente delle velocità di deformazione e dalla potenza termica assorbita dal volume unitario di fluido. Sfruttando la simmetria del tensore delle deformazioni D_{ik} e del tensore globale degli sforzi σ_{ik} e tenendo conto della definizione di doppio prodotto scalare fra due tensori del II ordine, si può direttamente scrivere:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} &= -\sigma_{ik} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \rho \boldsymbol{p}_t(\mathbf{x}, t) = -\sigma_{ik} D_{ik} + \rho \boldsymbol{p}_t(\mathbf{x}, t) \\ &= -\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \quad + \rho \boldsymbol{p}_t(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \qquad \text{(D–26)}$$

perché sempre nulla la somma dei prodotti $\sigma_{ik}\Omega_{ik} = \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\Omega}$ tra un tensore simmetrico σ_{ik} e un tensore emisimmetrico Ω_{ik}:[v] $\sigma_{ik}\Omega_{ik} = -\sigma_{ki}\Omega_{ki} \;\Rightarrow\; \sigma_{ik}\Omega_{ik} + \sigma_{ki}\Omega_{ki} = 0$. Si riconosce, quindi, che:

$$\sigma_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \sigma_{ik}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\right] = \sigma_{ik}(D_{ik} + \Omega_{ik}) = \sigma_{ik} D_{ik} = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}.$$

Dalla (D–26) si vede che l'energia interna specifica aumenta a causa di due motivi tra loro indipendenti. In particolare, quando:

- durante il moto ($D_{ik} \neq 0$), la sola componente del lavoro di distorsione/deformazione (quella che quindi non incrementerà la potenza cinetica del sistema) si degrada integralmente in energia interna, sempre in maniera assolutamente *irreversibile* (il segno meno prima del doppio prodotto scalare indica infatti che, durante le dissipazioni meccaniche irreversibili, i versi degli sforzi contrastano in ogni momento e in ogni punto le direzioni delle velocità di deformazione, rendendo di conseguenza la somma $-\sigma_{ik} D_{ik} = -\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}$ sempre positiva). Si riconosce, in particolare, che deve essere:

$$\underbrace{\oint_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dA}_{\mathscr{P}_m > 0} = \underbrace{-\int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}\, dV}_{\Delta \mathscr{U} > 0} \underbrace{- \int_V \mathbf{v} \cdot div\boldsymbol{\sigma}\, dV}_{\Delta \mathscr{E} > 0} = -\int_V \sigma_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dV - \int_V v_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dV$$

(v) Tensore delle rotazioni rigide d'insieme.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\underbrace{\oint_A \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dA}_{\mathscr{P}_m>0} = \underbrace{-\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV}_{\Delta\mathscr{U}>0} \underbrace{-\int_V \mathbf{v}\cdot gradp\,dV}_{\Delta\mathscr{E}>0} = -\int_V p\delta_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}dV - \int_V v_k\frac{\partial(p\delta_{ik})}{\partial x_i}dV$$

rispettivamente per fluidi reali $\sigma_{ik} = p\delta_{ik} - 2\mu D_{ik}$ e fluidi ideali $\sigma_{ik} = p\delta_{ik}$: non tutta la potenza meccanica trasmessa al fluido (dall'ambiente esterno: $\mathscr{P}_m > 0$) viene integralmente utilizzata per incrementare la potenza cinetica del sistema ($\Delta\mathscr{E} > 0$), ma parte viene inevitabilmente degradata (in calore) e quindi immagazzinata sotto forma di energia interna ($\Delta\mathscr{U} > 0$);[vi]

- si hanno apporti di potenza termica ($\mathscr{P}_t > 0$) provenienti *reversibilmente* da opportune sorgenti esterne (l'incremento di energia interna specifica risulta positivo quando il vettore divergenza di $\mathbf{q}$ è negativo: $div\mathbf{q} = -\rho\mathscr{P}_t < 0$, con direzione del flusso termico entrante nel volume V).[vii]

Per fluido ideale, l'espressione indefinita del *primo principio della Termodinamica* è:

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -p\,div\mathbf{v} - div\mathbf{q}, \tag{D–27}$$

confermando il fatto che per compressioni isotrope ($div\mathbf{v} < 0$) si assiste sempre a un incremento (reversibile) di energia interna specifica (riscontrabile in termini di aumento di temperatura media del fluido). È il caso di osservare che, sia per fluidi reali che ideali, l'incremento di energia interna specifica per compressioni/dilatazioni elastiche è data dalla:

$$\begin{aligned} d\dot{\mathscr{L}}_{el} = -(p\,div\mathbf{v})dV = -p\left[\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]dV &= -\frac{\rho dV}{dt}p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &= -\frac{dM}{dt}p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) := -\dot{m}\,p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned}$$

confermando che la potenza elementare di compressione/dilatazione elastica è pari alla portata in massa $dM/dt := \dot{m}$ moltiplicata per il prodotto della pressione $p = p(\mathbf{x}, t)$ per il differenziale del volume specifico $d(1/\rho)$. Estendendo la formulazione (D–27) anche al caso di fluido reale, si rende necessario considerare il solo termine delle dissipazioni irreversibili dovute agli effetti viscosi (necessariamente con $\rho\mathscr{P}_d > 0$):

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -p\,div\mathbf{v} + \rho\mathscr{P}_t + \rho\mathscr{P}_d \;\Rightarrow\; \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{p}{\rho}div\mathbf{v} + (\mathscr{P}_t + \mathscr{P}_d) \tag{D–28}$$

IMPORTANTE

cosa che può essere riscontrata direttamente dalla (D–26), quando si considerano anche gli effetti degli sforzi, dovuti al coefficiente di viscosità μ' per sole variazioni di volume:

$$\begin{aligned} -\int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}\,dV &= -\int_V \sigma_{ik}D_{ik}\,dV = -\int_V (p\delta_{ik} - \mu' div\mathbf{v}\,\delta_{ik} - 2\mu D_{ik})D_{ik}\,dV \\ &= -\int_V p\delta_{ik}D_{ik}\,dV + \int_V \mu' div\mathbf{v}\,\delta_{ik}D_{ik}\,dV + \int_V 2\mu D_{ik}D_{ik}\,dV \\ &= -\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV + \int_V \mu'(div\mathbf{v})^2\,dV + \int_V 2\mu\mathbf{D}:\mathbf{D}\,dV \\ &= -\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV + \int_V \rho\mathscr{P}_d\,dV. \end{aligned} \tag{D–29}$$

(vi) Energia quindi non più utilizzabile in termini di suo recupero in potenza meccanica.
(vii) Confermando che la funzione di assorbimento specifico di potenza termica $\mathscr{P}_t$ è grandezza definibile con segno algebrico, potendo schematizzare assorbimenti ($\mathscr{P}_t > 0$) o cessioni di calore all'esterno ($\mathscr{P}_t < 0$).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

interessando la superficie chiusa A che racchiude come frontiera il dominio V fluido. Con $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ si è definito il *vettore densità di flusso della potenza termica*, funzione del punto e dell'istante considerati. In particolare, ai fluidi si fa generalmente riferimento quali mezzi isotropi rispetto al fenomeno della propagazione della potenza termica. Infatti, come proposto da FOURIER nel 1822, la propagazione di calore in un mezzo isotropo è governato dalla seguente equazione costitutiva:

$$\mathbf{q} = -\, k\, grad T \tag{D–70}$$

la quale stabilisce che il flusso di potenza termica *reversibile* $d\mathscr{P}_t/dA = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ scambiato attraverso l'unità di superficie dipende dall'entità del gradiente di temperatura ($grad T$) esistente tra la sorgente e la superficie ricevente, ed è sempre diretto nel verso che va dalle temperature maggiori verso le minori (segno meno). Inoltre, a parità di gradiente esistente, tale flusso di calore è tanto più intenso quanto maggiore è il valore della costante di proporzionalità k che caratterizza il tipo di fluido attraversato dal flusso di scambio energetico. La costante k, che è l'equivalente nel campo dello schema continuo del coefficiente di conduttività termica, può dipendere per ciascun fluido solo dalla pressione e dalla temperatura locali: $k = k(p, T)$. Discende quindi che il coefficiente k debba essere intrinsecamente non negativo. Infatti, se si paragonano fra loro l'equazione di bilancio dell'entropia specifica e il *secondo principio della Termodinamica*, rispettivamente scritte in forma indefinita generale per fluidi viscosi newtoniani, si ottiene la disuguaglianza di vincolo sul prodotto scalare tra vettore $\mathbf{q}$ e gradiente di temperatura:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{De}{Dt} = -\dfrac{div\mathbf{q}}{T} + \dfrac{\rho \mathscr{p}_d}{T} \\ \rho \dfrac{De}{Dt} \geq -\dfrac{div\mathbf{q}}{T} + \dfrac{\mathbf{q} \cdot grad T}{T^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\rho \mathscr{p}_d}{T} \geq \frac{\mathbf{q} \cdot grad T}{T^2}$$

Tenendo conto della formulazione di FOURIER (eq. (D–70)), sostituendo per $\mathbf{q}$ l'espressione costitutiva, si ottengono di seguito le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\rho \mathscr{p}_d}{T} \geq \frac{\mathbf{q} \cdot grad T}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho \mathscr{p}_d}{T} \geq \frac{-\, k\, grad T \cdot grad T}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \rho \mathscr{p}_d \geq -\frac{k \| grad T \|^2}{T}.$$

Dovendo in ogni caso rispettare il vincolo sul segno della *dissipazione specifica di potenza meccanica* (essendo sempre $\mathscr{p}_d \geq 0$), lo dovrà rispettare anche nel caso particolare di assenza di moto (o nel caso di moto di fluido ideale). In tal caso, risulta infatti:

$$\begin{cases} \mathscr{p}_d = 0 \\ 0 \geq -\dfrac{k \| grad T \|^2}{T} \end{cases} \Rightarrow \quad k > 0,$$

trovando conferma ulteriore che, per rispettare il secondo principio della Termodinamica, il coefficiente k deve essere sempre intrinsecamente non negativo: il flusso della potenza termica può dunque aver luogo solo nella direzione delle temperature decrescenti.

Sul segno del secondo coefficiente di viscosità dinamico

Si è visto, a proposito delle osservazioni sull'equazione (D–64) a pagina d-75, che il primo coefficiente di viscosità dinamica $\mu = \mu(p, T)$ (legato principalmente al tensore delle distorsioni *isocore* S_{ik}) è sempre positivo (formalmente nullo nel solo caso di schema di fluido ideale). Si dimostrerà ora che anche il secondo coefficiente di viscosità dinamica

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e\, dV = -\oint_A \frac{k}{T}(grad T)\cdot \mathbf{n}\, dA + \int_V \frac{k\| grad T\|^2}{T} dV + \int_V \frac{\mu'}{T}(div\mathbf{v})^2 dV + \int_V \frac{2\mu}{T}\mathbf{D}:\mathbf{D}\, dV.$$

Poiché, come già più volte altrove osservato, i coefficienti di viscosità μ' e μ per fluidi newtoniani non possono dipendere dalle caratteristiche cinematiche e/o dalle geometrie del moto (ma dipendono solo dalla temperatura locale T e non dai suoi gradienti locali), si può pensare (senza quindi perdere di generalità) di considerare un volume fluido sufficientemente esteso (al limite, teoricamente infinito) sulla cui intera superficie risultino praticamente nulli i valori della funzione $grad T$. In altre parole, si accetta la condizione che la temperatura del fluido (newtoniano) tenda sufficientemente rapidamente a un valore costante all'infinito (di fatto, in zone del campo sufficientemente lontane). In tal caso, si avrà:

$$-\oint_A \frac{k}{T}(grad T)\cdot \mathbf{n}\, dA \simeq 0,$$

riducendosi l'equazione di bilancio dell'entropia alla forma integrale (comunque generale):

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e\, dV = \underbrace{\int_V \frac{k\| grad T\|^2}{T} dV}_{I} + \underbrace{\int_V \frac{\mu'}{T}(div\mathbf{v})^2 dV}_{II} + \underbrace{\int_V \frac{2\mu}{T}\mathbf{D}:\mathbf{D}\, dV}_{III}. \qquad \text{(D–75)}$$

In particolare, si nota che il I integrale è il tasso di crescita di entropia per conduzione termica (indipendentemente dal verso del flusso della potenza termica);[(xiv)] il II integrale è il tasso di crescita dell'entropia dovuto alle dissipazioni connesse alla componente anisocora delle deformazioni (connesse con le velocità di deformazione per contrazione/dilatazione isotropa del volume fluido); il III integrale è il tasso di crescita legato alla componente isocora delle deformazioni (legato quindi alle dissipazioni per componenti di cinematismi puramente distorsivi a volume costante).[(xv)]

Poiché l'entropia di un sistema può solo aumentare (in virtù del *secondo principio della Termodinamica*):

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e\, dV \geq \oint_A \frac{\mathbf{w}}{T} dA > 0,$$

la somma dei tre integrali a II membro dell'equazione di bilancio (D–75) deve risultare necessariamente positiva. Il I e il III integrale sono sicuramente positivi, perché positivi si è già constatato essere i parametri k, μ, oltre ovviamente la temperatura assoluta T e il doppio prodotto scalare $\mathbf{D}:\mathbf{D}$ dei due tensori uguali (quest'ultimo per definizione). Rimane il II integrale che è positivo solo se risulta positivo il secondo coefficiente di viscosità $\mu' > 0$.

A valle di queste precisazioni, risulta quindi corretta la posizione:

$$\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(vol)} := -\mu' \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\mu' div\mathbf{v}$$

(xiv) Se la massa fluida V è più fredda dell'ambiente circostante si ha che la direzione del flusso di potenza termica è diretta dall'ambiente esterno verso la massa fluida. L'esatto contrario si verifica se la massa fluida risulta più calda dell'ambiente circostante. In entrambi i casi, la relativa componente del tasso di crescita dell'entropia risulta positiva (aumento di entropia del sistema fluido) perché proporzionale al quadrato della norma del vettore gradiente della temperatura.

(xv) Si vedano a tal proposito la (D–64) a pagina d-75 e la (D–66) a pagina d-76.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

di per far notare che, la posizione assunta da alcuni Autori – per tenere conto delle evidenze sperimentali (soprattutto su gas monoatomici) sulla trascurabilità degli effetti della variazione di volume – di porre praticamente pari a zero l'espressione:

$\mathscr{p}_{d,L} := \mathscr{p}_{d,\mu'} + \mathscr{p}_{d,\mu}$ da cui il conseguente legame (errato!): $\mathscr{p}_{d,\mu'} = -\mathscr{p}_{d,\mu}$

IMPORTANTE

è palesemente in contrasto con il *secondo principio della Termodinamica*, come già osservato; anche se, di fatto, porta ai medesimi risultati (formali) dal punto di vista della specializzazione dell'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani.

Alcune osservazioni sulle equazioni di bilancio dell'energia

Si è visto che nella divergenza del prodotto misto (righe per colonne) fra la velocità $\mathbf{v}$ e il tensore simmetrico $\boldsymbol{\sigma}$ (da cui il vettore $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}_i(v_k\sigma_{ik})$), se si accetta implicitamente l'ipotesi di portare all'infinito la superficie A del contorno del dominio V, si possono ammettere valide le relazioni:

$$div(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial\,(v_k\sigma_{ik})}{\partial\,x_i} = p\frac{\partial\,v_k}{\partial\,x_k} + v_k\frac{\partial\,p}{\partial\,x_k} + \underbrace{\frac{\partial\,(v_k\sigma_{ik}')}{\partial\,x_i}}_{=0}$$

$$= \frac{\partial\,(pv_k)}{\partial\,x_k} = div(p\mathbf{v}),$$

da cui l'equazione indefinita di bilancio in termini di energia interna ((D–40) a pagina d-66) scritta in termini tensoriali e vettoriali, rispettivamente:

$$\rho\left(\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + v_k\frac{Dv_k}{Dt}\right) = v_k\rho f_k - \frac{\partial\,(v_k\sigma_{ik})}{\partial\,x_i} - \frac{\partial\,q_k}{\partial\,x_k};$$

$$\rho\left[\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] = \mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f} - div(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - div\mathbf{q}$$

$$= \mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f} - div(p\mathbf{v}) - div\mathbf{q}.$$

In pratica, però, per fluido aeriforme non ha senso pratico considerare l'energia di posizione, per cui l'equazione di bilancio (*primo principio della Termodinamica*) diventa:

$$\rho\left(\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + v_k\frac{Dv_k}{Dt}\right) = -\frac{\partial\,(v_k\sigma_{ik})}{\partial\,x_i} - \frac{\partial\,q_k}{\partial\,x_k}$$

$$\rho\left[\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] = -\,div(p\mathbf{v}) - div\mathbf{q} := -\,div(\boldsymbol{\Upsilon}), \qquad \text{(D–78)}$$

avendo, solo formalmente, introdotto il *vettore risultante densità di flusso energetico di pressione e termico* (componente $k-esima$): $\boldsymbol{\Upsilon} := p\mathbf{v} + \mathbf{q} \;\Rightarrow\; \Upsilon_k := pv_k + q_k$.
È opportuno precisare, osservando queste ultime equazioni per il caso generale di fluido reale viscoso, che l'effetto degli attriti deve risultare già conteggiato implicitamente nel termine di bilancio della derivata sostanziale dell'energia interna specifica,[(xvi)] essendo quest'ultima infatti sommata alla derivata intrinseca della potenza cinetica per unità di massa. Integrando la (D–78) sul volume V, si ottiene:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\boldsymbol{u}\,dV + \frac{D}{Dt}\int_V \rho\frac{v^2}{2}dV = -\int_V div(p\mathbf{v})dV - \int_V div\mathbf{q}\,dV, \quad \text{però con } \mathscr{p}_d \geq 0.$$

(xvi) Nel caso di fluido reale viscoso, la variazione intrinseca di energia interna conterrà, in più rispetto al caso di fluido ideale, anche la componente dissipativa per attriti interni.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Si osserva, in particolare, che il primo termine a II membro della divergenza del vettore $p\mathbf{v}$ può essere sviluppato (formalmente) come se si trattasse il caso di un fluido ideale in cui il tensore degli sforzi è ridotto a isotropo in ogni punto della superficie esterna A. In questo caso, però, stiamo di fatto supponendo implicita la condizione di fluido reale ($\mu_d \geq 0$):

$$\begin{aligned}
\oint_A \mathbf{v}\cdot p\mathbf{n}\,dA &= -\int_V div(p\mathbf{v})\,dV = -\int_V [p\,div\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot grad p]\,dV \\
&= -\int_V \left[p\,div\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot grad\int\frac{dp}{\rho}\right]dV \\
&= -\int_V \left[p\,div\mathbf{v} + \rho\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{dp}{\rho}\right)}_{=0} + \mathbf{v}\cdot grad\int\frac{dp}{\rho}\right]dV \\
&= -\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV + \int_V \rho\frac{D}{Dt}\left(-\int\frac{dp}{\rho}\right)dV. \qquad \text{(D–79)}
\end{aligned}$$

➲ IMPORTANTE

avendo considerato qui ρ e p indipendenti dal tempo (posizione lecita per le applicazioni tecniche sulle macchine a fluido). Da cui, sostituendo, l'ulteriore forma integrale dell'equazione di bilancio delle energie:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\boldsymbol{u}\,dV + \frac{D}{Dt}\int_V \rho\frac{v^2}{2}\,dV + \frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)dV = -\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV - \int_V div\mathbf{q}\,dV.$$

Nel caso di fluido ideale (dovendo essere $\mu_d = 0$), il bilancio dell'energia interna si riduce come già visto alla forma:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\boldsymbol{u}\,dV = -\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV - \int_V div\mathbf{q}\,dV,$$

e l'equazione di bilancio (per fluido ideale, appunto) si riduce di conseguenza nelle:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\frac{v^2}{2}\,dV + \frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)dV = 0 \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} = \text{cost}. \qquad \text{(D–80)}$$

Nel caso invece di fluido reale (quindi viscoso, con $\mu_d > 0$), l'equazione generale di bilancio dell'energia interna (si veda la prima delle (D–45) a pagina d-66 e si tenga conto della (D–47)), conglobando in sé necessariamente anche l'entità (effetti) degli attriti, porge:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\int_V \rho\boldsymbol{u}\,dV &= -\int_V p\,div\mathbf{v}\,dV - \int_V div\mathbf{q}\,dV + \int_V \rho\mu_d\,dV \\
&= \left(\frac{D}{Dt}\int_V \rho\boldsymbol{u}\,dV\right)_{\mu_d=0} + \int_V \rho\mu_d\,dV.
\end{aligned}$$

Il bilancio dell'energia interna risulta pari, infatti, al contributo dello schema di fluido ideale più il contributo delle azioni termiche dissipative che completano il fluido da ideale a reale. L'equazione di bilancio dell'energia risulta in tal caso:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\frac{v^2}{2}\,dV + \frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)dV = -\int_V \rho\mu_d\,dV = -\mathscr{P}_d$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho}\right)dV = -\int_V \rho\mu_d\,dV \;\Rightarrow\; \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho}\right) = -\mu_d, \qquad \text{(D–81)}$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Tenendo al solito, conto dell'equazione di continuità, si arriva alla forma indefinita:

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{i} + E_c) = \boldsymbol{p}_{est} + \boldsymbol{p}_t \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{i}} + \dot{E}_c = \boldsymbol{p}_{est} + \boldsymbol{p}_t, \tag{D–85}$$

➲ IMPORTANTE espressa in termini di bilancio di potenze specifiche. In sostanza, supposto che ρ e p siano indipendenti dal tempo, l'apporto esterno di energia (meccanica e di calore) incrementa l'energia entalpica e meccanica del sistema fluido.

Le formulazioni operative delle equazioni di bilancio dell'energia

In base a quanto finora trattato – stante la posizione pratica di considerare la densità ρ e la pressione p indipendenti dal tempo – si possono stilare le seguenti espressioni delle equazioni di bilancio dell'energia meccanica E_m:

$$dE_m := d\left(gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cost} \quad \text{(ideale)} \tag{D–86}$$

$$dE_m := d\left(gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = -\,\mathscr{P}_d\, dt := dL_{attriti} < 0 \quad \text{(reale)}, \tag{D–87}$$

e del bilancio globale dell'energia in termici entalpici e cinetici (per unità di massa fluida):

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{i} + E_c) = \boldsymbol{p}_{est} + \boldsymbol{p}_t \;\Rightarrow\; \dot{\boldsymbol{i}} + \dot{E}_c = \boldsymbol{p}_{est} + \boldsymbol{p}_t \tag{D–88}$$

$$d\boldsymbol{i} + dE_c = dL_{est,1} + dq_{est}, \tag{D–89}$$

con $dL_{est,1}$ da riferire all'unità di massa e avendo adottato la posizione $dq_{est} := \boldsymbol{p}_t dt$, di energia di calore (per unità di massa) scambiata reversibilmente fra fluido e ambiente esterno (positiva, se trasmessa dall'ambiente esterno al fluido e negativa se rilasciata dal sistema fluido all'ambiente esterno),[xvii] da cui il legame con la (D–13) a pagina d-56:

$$\frac{dQ_{rev}}{dt} = \mathscr{P}_t = \int_V \rho\, \boldsymbol{p}_t(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_V \rho\left(\frac{dq_{est}}{dt}\right) dV = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\, q_{est}\, dV, \quad \text{quindi con:}$$

$$Q_{rev} = \int_V \rho\, q_{est}\, dV.$$

Osservazioni. Nel caso di applicazione delle equazioni di bilancio dell'energia per le macchine a fluido, la forma nettamente più rilevante di energia è quella entalpica, almeno come bilancio globale; essendo l'energia cinetica rilevante nelle sue variazioni solo internamente o nella sezione del distributore o in quella dello statore, di volta in volta considerati nel bilancio singolarmente.

Pertanto, poiché nelle macchine a fluido (soprattutto nelle turbine e nei compressori a gas) gli scambi di calore reversibili con l'esterno si rivelano praticamente assenti (di fatto impossibili, se non altro per le altissime velocità di flusso di attraversamento dello stadio), l'equazione dell'energia si riduce alle forme operative:

- nello stadio (statore-rotore per presenza di palettature mobili): $(d\boldsymbol{i})_{stadio} = dL_{est,1}$;[xviii]

(xvii) La convenzione fissata per le energie scambiate con l'esterno è ovvia se si pensa che se, ad esempio, si trasmette dall'esterno energia al fluido ($L_{est,1} > 0$) il suo quantitativo energetico deve aumentare ($E_m > 0$). Idem se si trasferisce calore al sistema dall'esterno (da $Q_{est} > 0$ deve seguire un incremento dell'entalpia del fluido).
(xviii) Nel rotore, la scambio di energia con l'esterno avviene sostanzialmente per variazione dell'energia di

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$-\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D} = -[-\mu'(div\mathbf{v})\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}] : \mathbf{D} = \mu'(div\mathbf{v})\mathbf{I} : \mathbf{D} + 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D}$$
$$= \mu'(div\mathbf{v})^2 + 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D} = \rho\,\mathcal{P}_d, \qquad \text{(D–94)}$$

che misura proprio l'entità della potenza specifica meccanica, dissipata per unità di volume fluido. Al contempo, si osserva che valgono le seguenti relazioni sulla divergenza della sola componente deviatorica degli sforzi (da imputare quindi a sole dissipazioni):

$$-div\boldsymbol{\sigma}' = -div[-\mu'(div\mathbf{v})\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{D}] = -\big[grad(-\mu' div\mathbf{v}) - div(2\mu\mathbf{D})\big]$$
$$= \mu' grad(div\mathbf{v}) + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mu\, grad(div\mathbf{v})$$
$$= (\mu' + \mu)grad(div\mathbf{v}) + \mu\nabla^2\mathbf{v}. \qquad \text{(D–95)}$$

Risulta immediatamente, ricordando le forme indefinite native dell'equazione di STOKES:

$$\rho\mathbf{f} - div\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \qquad \text{(D–96)}$$

$$\rho\mathbf{f} - gradp + (\mu' + \mu)grad(div\mathbf{v}) + \mu\nabla^2\mathbf{v} = \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

che, stante il legame trovato nella (D–95), l'equazione indefinita può così porsi anche nella forma equivalente:

$$\rho\mathbf{f} - gradp - div\boldsymbol{\sigma}' = \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}; \qquad \text{(D–97)}$$

espressione che risulta, per semplice confronto con la (D–96), coerente con la forma dell'equazione tensoriale costitutiva dei fluidi newtoniani ($\sigma_{ik} = p\delta_{ik} + \sigma_{ik}'$):

$$div\boldsymbol{\sigma} = gradp + div\boldsymbol{\sigma}' \;\Rightarrow\; \frac{\partial\,\sigma_{ik}}{\partial\,x_i} = \frac{\partial\,p}{\partial\,x_k} + \frac{\partial\,\sigma_{ik}'}{\partial\,x_i}$$
$$= \frac{\partial\,(p\delta_{ik})}{\partial\,x_i} + \frac{\partial\,\sigma_{ik}'}{\partial\,x_i} = \frac{\partial\,(p\delta_{ik} + \sigma_{ik}')}{\partial\,x_i}.$$

Ulteriori forme delle equazioni di bilancio energetico

Tutto ciò porta a considerare l'equazione di bilancio della potenza cinetica in questa forma:

$$\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f} - \mathbf{v}\cdot gradp - \mathbf{v}\cdot div\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{v}\cdot\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) \qquad \text{(D–98)}$$

e, stante l'identità (D–92), anche in quest'altra:

$$\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f} - \mathbf{v}\cdot gradp + \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D} = \mathbf{v}\cdot\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) \qquad \text{(D–99)}$$

e quindi direttamente in funzione della potenza specifica di dissipazione meccanica per unità di volume:

$$\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f} - \mathbf{v}\cdot gradp - \rho\,\mathcal{P}_d = \mathbf{v}\cdot\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right); \qquad \text{(D–100)}$$

cosicché, qualora si eseguisse il bilancio dell'energia globale in termini anche di energia interna (o entalpica), il lavoro delle forze di superficie per unità di tempo, matematicamente da esplicitare (formalmente, se si volesse impostare l'equazione di equilibrio di un volume elementare di fluido in un sistema cartesiano), sarebbe solo quello delle forze di pressione ($-\mathbf{v}\cdot gradp$), risultando la quota di potenza reversibile elastica e quella irreversibile at-

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho E_{u,c}\,dV = \oint_A \boldsymbol{\Upsilon}\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_A p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA + \oint_A \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dA, \tag{D–108}$$

nell'ipotesi implicita di considerare per n il versore locale su A diretto verso l'interno del volume V racchiuso, e avendo definito con $E_{u,c}$ l'energia generale del fluido per unità di massa:

$$E_{u,c} := gz + \left(\boldsymbol{u} + \frac{v^2}{2}\right)$$

dove, in particolare, si è isolato tra parentesi il contributo di energia essenziale nel caso di fluido aeriforme, essendo per questi l'energia di posizione assolutamente irrilevante.

Tenendo conto di quest'ultima definizione del trinomio energetico (di posizione, temperatura e cinetica), integrando l'equazione (D–106) tenendo conto dell'equazione di continuità, si arriva alla:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho E_{u,c}\,dV = \int_V \left(\frac{\partial\,(\rho E_{u,c})}{\partial\,t} + div(\rho E_{u,c}\,\mathbf{v})\right)dV = -\int_V div(\boldsymbol{\Upsilon})\,dV \tag{D–109}$$

avendo applicato il teorema del trasporto per lo scalare $\rho E_{u,c}$. Per l'arbitrarietà di V, per fluido continuo, barotropico, caratterizzabile da stati di equilibrio termodinamico a pressione e temperatura uniformi, si ha quindi (in termini di energia per unità di volume):

$$\frac{\partial\,(\rho E_{u,c})}{\partial\,t} + div(\rho E_{u,c}\,\mathbf{v}) = div(\boldsymbol{\Upsilon}). \tag{D–110}$$

Nel caso particolare di evoluzioni stazionarie con $E_{u,c} > p/\rho$, il vettore della velocità $\mathbf{v}$ locale risulta parallelo ed equiverso al vettore $\mathbf{q}$: $\boldsymbol{\Upsilon} = \rho E_{u,c}\,\mathbf{v} = p\mathbf{v} + \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q} = (\rho E_{u,c} - p)\mathbf{v}$.

Equazione di bilancio in termini entalpici. Occorre subito notare che la variabile di stato termodinamica *entalpia* rappresenta l'insieme dell'energia di calore (energia interna) e dell'energia di pressione. Pertanto, osservando la definizione del vettore $\boldsymbol{\Upsilon} = p\mathbf{v} + \mathbf{q} = \mathbf{i_k}(p\,v_k + q_k)$ e la forma dell'equazione del bilancio delle potenze (D–106), risulta chiaro che l'energia (nell'unità di tempo) *potenziale* di pressione del fluido non può che essere data proprio dalla componente:

$$\varphi_p := \frac{1}{\rho}div(\boldsymbol{\Upsilon})_p := \frac{1}{\rho}div(p\mathbf{v}).$$

Dovendo l'entalpia (specifica) comunque essere rappresentata dalle due componenti di energia di calore (energia specifica interna) ed energia potenziale di pressione φ_p, si può immediatamente imporre il bilancio dell'entalpia in forma indefinita (con ρ e p stazionari):

$$\frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \frac{D\varphi_p}{Dt} \;\Rightarrow\; \frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}div(p\mathbf{v}) \;\Rightarrow\; \frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} - \frac{1}{\rho}div(p\mathbf{v}) = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}.$$

Aggiungendo ad entrambi i membri dell'ultima equazione il termine $-(div\mathbf{q})/\rho = \boldsymbol{p}_t$:

$$\frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} - \frac{1}{\rho}div(p\mathbf{v}) - \frac{1}{\rho}div\mathbf{q} = \boldsymbol{p}_t + \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} \;\Rightarrow\; \frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} - \frac{1}{\rho}div(\boldsymbol{\Upsilon}) = \boldsymbol{p}_t + \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}$$

e tenendo conto della (D–106) ma considerando $E_c := v^2/2$ per aeriformi, si può scrivere:

$$\frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} + \left[\frac{D}{Dt}(E_c) + \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\right] = \boldsymbol{p}_t + \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} \;\Rightarrow\; \frac{D\boldsymbol{i}}{Dt} + \frac{D}{Dt}(E_c) = \boldsymbol{p}_t, \tag{D–111}$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

mobili (rotori e palettature), si trova l'equazione dell'energia in termini generali (indipendentemente dalla stazionarietà o meno per le funzioni densità ρ e pressione p):

$$\frac{D}{Dt}\left(i + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{dp}{\rho}\right) + \mu_{est} + \mu_t \tag{D–117}$$

dove, si ricorda:

$$\mu_t(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} div\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_k}{\partial x_k};$$

$$\mathscr{P}_t = \oint_A w\, dA = \oint_A \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dA = -\int_V div\mathbf{q}\, dV = \int_V \rho\mu_t(\mathbf{x}, t)\, dV;$$

$$\mathscr{P}_{est} = dL_{est}/dt = \int_V \rho\mu_{est}\, dV.$$

Volendo, infine, ricondurre tutti i fluidi newtoniani alla medesima equazione formale di bilancio, per poi specializzarla in funzione del tipo di moto e di fluido (liquido o aeriforme) è sufficiente, è sufficiente aggiungere alle due forme di energia anche quella di posizione:

$$\frac{D}{Dt}\left(i + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{dp}{\rho}\right) + \mu_{est} + \mu_t. \tag{D–118}$$

Moltiplicando ambo i membri per la massa elementare $dM = \rho dV$, integrando sul volume e considerando l'equazione di continuità, si ottiene:

$$\frac{D}{Dt}\left[\int_V \rho i\, dV + \int_V \rho\frac{v^2}{2} dV + \int_V (-\rho\phi)\, dV\right] =$$
$$= \int_V \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{dp}{\rho}\right) dV + \int_V \rho\mu_{est}\, dV + \int_V \rho\mu_t\, dV.$$

A questo punto, se per l'intera massa fluida considerata si introducono le seguenti energie:

- *entalpica*:
  $$\mathscr{I} = \int_V \rho i\, dV$$
- *cinetica*:
  $$\mathscr{C} = \int_V \rho\frac{v^2}{2} dV$$
- *potenziale* (di posizione):
  $$\mathscr{Z} = \int_V (-\rho\phi)\, dV = Mgz,$$

e si richiamano per comodità di lettura le espressioni delle potenze di scambio esterne, precedentemente definite:

- potenza meccanica per presenza di palettature o organi rotanti (nulla nel caso di assenza di organi o palettature mobili):
  $$\mathscr{P}_{est} = dL_{est}/dt = \int_V \rho\mu_{est}\, dV$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Ciò significa, ad esempio, che per un'evoluzione adiabatica in cui il fluido aeriforme parte dalla pressione p_1 (e alla temperatura T_1) e arriva alla pressione $p_2 > p_1$ (e quindi alla temperatura T_2, lungo un'evoluzione adiabatica di compressione, con $dL_{est} > 0$)[xxiii] si avrà:

- per schema di fluido reale (presenza di attriti, quindi evoluzione *politropica equivalente* per rappresentare l'evoluzione adiabatica reale irreversibile):
  $(d\mathscr{I})_{reale} = (dL_{est})_{politropica} > (dL_{est})_{ideale} > 0$, essendo: $(dL_{est})_{politropica} \equiv (dL_{est})_{reale}$
- per schema di fluido ideale (assenza di viscosità, evoluzione *isentropica* con raggiungimento della pressione p_2 ad una temperatura $T_{2,is}$ minore però di quella T_2 dell'analoga evoluzione reale, perché in condizioni ideali è considerato assente qualsiasi apporto di calore interno attritivo e quindi assente anche l'aggravio del "controrecupero"):
  $(d\mathscr{I})_{ideale} = (d\mathscr{I})_{isentropica} = (dL_{est})_{ideale} > 0.$

Osservazioni. Nel caso invece di un'espansione in turbina accade l'esatto opposto: l'energia effettivamente ceduta dal fluido ($dL_{est} < 0$) alle palettature della girante è sempre minore (in modulo) di quella ceduta in condizioni ideali in assenza di attriti, pur considerando in questo caso, il "recupero" dovuto all'espansione per apporto di calore attritivo interno. Pertanto, per ottenere il rapporto di decompressione $p_2/p_1 < 1$ di progetto:

$$\left|(d\mathscr{I})_{reale}\right| = \left|(dL_{est})_{reale}\right| < \left|(dL_{est})_{ideale}\right| = \left|(d\mathscr{I})_{ideale}\right|$$

il fluido dovrà cedere un quantitativo maggiore (in modulo) di energia proprio per compensare globalmente le perdite nette[xxiv] attritive in calore entropico. Sempre in termini di valori assoluti, si avrà:

- per schema di fluido reale (adiabatica irreversibile, quindi lungo un'evoluzione *politropica equivalente*, per la rappresentazione dell'evoluzione reale dissipativa, che porti il fluido dalla pressione p_1 e temperatura T_1 alla pressione finale $p_2 < p_1$ e temperatura effettiva finale T_2):
  $\left|(d\mathscr{I})_{reale}\right| = \left|(dL_{est})_{politropica}\right| < \left|(dL_{est})_{ideale}\right|$, essendo: $(dL_{est})_{politropica} \equiv (dL_{est})_{reale}$
- per schema di fluido ideale (assenza di viscosità, evoluzione *isentropica* senza "recupero" per assenza di calori interni irreversibili di natura attritiva del tutto assenti, quindi con pressione finale $p_2 < p_2$ e temperatura finale $T_{2,is} < T_2$):
  $\left|(d\mathscr{I})_{ideale}\right| = \left|(d\mathscr{I})_{isentropica}\right| = \left|(dL_{est})_{ideale}\right|.$

In sostanza, ragionando in termini di unità di massa evoluente e osservando l'ultima relazione della (D–121), si può osservare che la variazione sostanziale del lavoro termodinamico scambiato dal fluido aeriforme (fatto durante le espansioni e ricevuto durante le compressioni) nella sua evoluzione adiabatica (trascurando, nello stadio, le variazioni

(xxiii) Risulta quindi conveniente assumere la convenzione di considerare L_{est} (oppure dL_{est}) positivo quando la macchina cede energia al fluido, aumentandola.
(xxiv) Nette perché, in un'espansione reale, gli attriti interni fornendo calore in maniera irreversibile al fluido "aiutano" in qualche modo l'espansione in turbina, diminuendo la quantità (appunto netta) di calore perso definitivamente in aumento dell'entropia del sistema fluido evoluente.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

che in forma integrale assume la connotazione:

$$\frac{D\mathscr{I}}{Dt} = \mathscr{P}_t + \mathscr{P}_d + \frac{D}{Dt}\int_V \left(\frac{p}{\rho}\right)\rho\, dV.$$

Sostituendo quindi quest'ultima espressione nell'equazione generale (D–119), si trova:

$$\frac{D}{Dt}(\mathscr{C}_p + \mathscr{C} + \mathscr{Z}) = \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \mathscr{P}_{est} - \mathscr{P}_d \qquad \text{(D–123)}$$

avendo considerato che per i liquidi è $\rho = \text{cost}$ e avendo introdotto l'energia di pressione di tipo p/ρ per unità di massa:

$$\mathscr{C}_p = \int_V \left(\frac{p}{\rho}\right)\rho\, dV.$$

Come si può vedere, nel caso di fluidi incomprimibili, l'equazione di bilancio delle energie può essere enunciata dicendo che solo la quota di potenza meccanica depurata dalla quota dissipata in calore dagli attriti va ad incrementare effettivamente il trinomio energetico di pressione, energia cinetica e di posizione (altezza, rispetto al campo gravitazionale).

Analogamente a quanto già fatto, moltiplicando ambo i membri per l'intervallo elementare, si ottiene:

$$d(\mathscr{C}_p + \mathscr{C} + \mathscr{Z}) = \left[\int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV\right] dt + dL_{est} - \left| dL_{attriti} \right|$$

che, in condizioni stazionarie, si riduce al semplice aspetto:

$$d(\mathscr{C}_p + \mathscr{C} + \mathscr{Z}) = dL_{est} - \left| dL_{attriti} \right| \qquad \text{(D–124)}$$

mostrando chiaramente che, per fluido reale, l'incremento energetico è imputabile solo dalla quota effettivamente depurata dagli attriti. Nel caso di fluido ideale, con lavoro degli attriti identicamente nullo, deve risultare:

$$d(\mathscr{C}_p + \mathscr{C} + \mathscr{Z}) = dL_{est} \quad \text{(fluido ideale).} \qquad \text{(D–125)}$$

Ad esempio, ragionando in termini di unità di massa (pertanto il lavoro elementare sarà indicato con $dL_{est,1}$), l'equazione (D–124) può essere posta in termini differenziali, espressa mediante le funzioni termodinamiche specifiche, in questo modo:

$$d\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = dL_{est,1} - \left| dL_{attriti,1} \right|.$$

Integrando lungo i due punti $(1 \to 2)$ di una generica traiettoria (media) del flusso:

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2\right) = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1\right) + L_{est,1} - \left| L_{attriti,1} \right|,$$

$$H_2 = H_1 + \left(L_{est,1} - \left| L_{attriti,1} \right|\right)$$

avendo indicato il trinomio energetico con il simbolo "H". Come si nota immediatamente dalla struttura dell'equazione di bilancio, il carico energetico H tende sempre a diminuire lungo il tratto di traiettoria $1 \to 2$ quando è negativa la differenza $\Delta H = L_{est,1} - \left| L_{attriti,1} \right|$ (quando il lavoro degli attriti è maggiore di quello fornito) e rimane costante quando:

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

In particolare, è opportuno osservare che l'equazione ammette che sia $\mathscr{P}_t \neq 0$ (anche se il termine non compare esplicitamente nell'equazione meccanica, rientrando invece nell'equazione di bilancio dell'entropia specifica data dalla (D–126)). Pertanto, si deve utilizzare l'equazione di bilancio (D–128) con la condizione implicita di $\mathscr{P}_t \neq 0$: fluido che scambia calore reversibilmente con l'ambiente esterno (apporti o sottrazione di calore tramite sorgenti a temperatura differente da quella del fluido in moto).

Ad esempio, in un condotto a sezione costante $A_1 = A_2 = A$ ad un aumento di volume specifico[xxvii] del fluido (che in assenza di attriti può essere solo conseguenza di apporti reversibili di calore con l'esterno $\mathscr{P}_t \neq 0$)[xxviii] corrisponde sempre una riduzione della pressione nel senso del moto (che si può annullare soltanto quando cessa il moto); ciò perché, dilatandosi il fluido per effetto del riscaldamento esterno (quindi se $\mathscr{P}_t > 0$) e dovendo per la conservazione della massa essere rispettata la (D–129) per il caso particolare di A costante, la portata volumetrica Av deve crescere progressivamente lungo il moto nella tubazione: $v_2 > v_1$. Pertanto, dovendo essere in questa ipotesi $v_2 > v_1$ con $\rho_2 < \rho_1$ e per la continuità:

$$\dot{m} = \text{cost} \;\Rightarrow\; \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \;\Rightarrow\; \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} > 1 \;\Rightarrow\; v_2 > v_1,$$

➲ IMPORTANTE

la relazione (D–128) può essere così congruente solo con decrementi di pressione (di fatto una sorta di perdita di pressione per *contropressioni d'inerzia*, imputabili all'accelerazione del fluido nella tubazione perché scaldata dall'esterno), per poter mantenere la continuità lungo la traiettoria. Si riconosce che qualitativamente (per questo esempio):

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\overline{\rho}}(p_1 - p_2) > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} v_2 > v_1 \\ p_1 < p_2 \end{cases} \qquad \text{(D–130)}$$

avendo introdotto il valore medio della densità $\overline{\rho} = (\rho_2 + \rho_1)/2$ tra le due sezioni di estremità, per il teorema del valore medio sugli integrali di funzioni.

Equazione del moto per comprimibili ideali. Si considera il caso, frequente nella pratica tecnica, di flusso di fluido compressibile ideale in tubazione a sezione costante con scambio reversibile di calore con l'esterno, per gradienti di temperatura fra fluido e ambiente circostante ($\mathscr{P}_t \neq 0$). Intanto, per l'equazione di continuità si ha:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = \kappa = \text{cost} = \overline{\rho}\overline{v} = \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \qquad \text{(D–131)}$$

avendola imposta valida anche al prodotto dei relativi valori medi di densità e velocità di trasporto tra le due sezioni di estremità della tubazione ($1 \to 2$).

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione di continuità (riferita ai valori medi) per la differenza $v_2 - v_1$, si ottiene (tenendo conto della (D–130)):

$$(v_2 - v_1)\kappa = \overline{\rho}(v_2 - v_1)\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \;\Rightarrow\; (v_2 - v_1)\kappa = \overline{\rho}\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) = p_1 - p_2.$$

A questo punto, poiché per la continuità di un fluido comprimibile in moto, lungo una tubazione a sezione costante A, deve essere costante $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = \kappa$, l'equazione precedente si particolarizza la forma:

(xxvii) A cui consegue una diminuzione della densità lungo il senso del moto.
(xxviii) Ad esempio, mediante semplice riscaldamento dall'esterno (tramite scambiatori di calore, etc.).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$p_1 - p_2 = \rho_1 v_1^2 (r_{12} - 1) = (10^3\ \text{kg/m}^3)(10\ \text{m/s})^2 (33,45 - 1)$$
$$\cong 3,25 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2 = 32,5\ \text{bar}.$$

Come si vede, avendo considerato lo schema di fluido ideale, risulta un valore cospicuo della contropressione d'inerzia, dovuta alle forze d'inerzia su un volume di fluido comprimibile che accelera per mantenere costante la portata in massa quando viene riscaldato.

Osservazioni. Per questa ragione è pratica consueta dei costruttivi di generatori di vapore monotubolari quella di ramificare via via il condotto, con lo scopo di dimezzare la velocità di ingresso dei tubi ad ogni bivio, in modo da ridurre l'entità di v_1 e così quella delle contropressioni d'inerzia.

Al progettista, come in tutti i problemi tecnici, è riservata la scelta del giusto compromesso tra gli oneri economici dell'impianto (che crescono riducendo le velocità dell'efflusso: aumento del numero di tubazioni utilizzate) e gli oneri di esercizio (che crescono aumentando la velocità d'efflusso: scelta di un limitato numero di tubazioni per la caldaia e quindi maggiori perdite di carico; cui consegue una maggiore potenza da installare alle pompe di alimentazione della caldaia).

ESEMPIO D–2

Espansione attraverso un iniettore

Si consideri un *iniettore* che deve servire per l'alimento di una caldaia che produce vapore surriscaldato a $p = 1$ MPa (assoluta) e a $T = 300°$C, mentre la pressione dell'acqua d'alimento (nella camera di miscela) è di 0,1 MPa (assoluta). Ipotizzato $\eta = 0{,}75$ come rendimento di espansione (comprensivo anche delle altre perdite di processo), valutare la velocità media v_2 del flusso, all'entrata della camera di miscela, ottenuta tramite l'espansione con accelerazione da velocità iniziale praticamente nulla ($v_1 \cong 0$).

Ipotizzando poi che le portate in massa della fase del miscuglio acqua-vapore vivo, veicolato dall'*iniettore-diffusore*, siano nel rapporto di $1/20$ rispettivamente, valutare l'entità della velocità v_3 del miscuglio all'entrata (3) del diffusore, tenendo conto che la velocità v_4 nella sezione finale (4) del diffusore (a sviluppo-asse orizzontale) è trascurabile rispetto a quella di entrata.

Soluzione

Il vapore è disponibile, nel condotto di mandata della caldaia, alla pressione p e alla temperatura T. Una parte della sua portata viene derivata verso l'iniettore e subisce nell'ugello un'espansione che lo accelera da velocità praticamente nulla ($v_1 \cong 0$) alla velocità v_2. Nella camera di miscela la vena di vapore (condensato) si mescola con il liquido a pressione p_0 (di regola prossima a quella atmosferica) e una certa portata di questa viene interessata dall'evoluzione del fluido in movimento con una certa velocità di entrata v_0. Dal piano di MOLLIER, (*entalpia-entropia*) si legge una caduta entalpica ideale (isentropica), dalla sezione a monte dell'iniettore (p_1, T_1, i_1) fino alla camera di miscela (p_0, T_0, i_0), di:

$$(\Delta i)_{ideale} = (i_p - i_{p0})_{is} = -\ 115\ \text{kcal/kg}.$$

La caduta entalpica reale, si calcola mediante il rendimento di espansione fissato:

$$\eta = \frac{(\Delta i)_{reale}}{(\Delta i)_{ideale}} < 1 \Rightarrow (\Delta i)_{reale} = \eta (\Delta i)_{ideale} = -\ 0,75 \cdot (115\ \text{kcal/kg}) \cong -\ 86\ \text{kcal/kg}.$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

nell'ipotesi che la velocità di ingresso sia trascurabile rispetto a quella di uscita. Secondo questo semplice esempio, da 1 kg di vapore vivo si è in grado di trascinare, comprimendoli, 19 kg di acqua di alimento; sicché l'alimentazione della caldaia tramite iniettore si spende (in condizioni ideali) $1/20$ del vapore prodotto.

È opportuno precisare, in generale, che in alcuni casi (ad esempio nei turboreattori) non è lecito trascurare a priori la velocità a monte perché in alcune sezioni tipiche di queste macchine (efflussi attraverso ugelli) la velocità di ingresso del fluido riveste una notevole importanza. Viceversa, in alcune sezioni delle turbine a vapore (per efflussi nei condotti fissi acceleranti) la velocità a monte dell'evoluzione energetica può essere talvolta trascurata.

ESEMPIO D–3

Espansione in un eiettore

Sia lo stadio di un eiettore con sezione (1) in arrivo vapore vivo (motore) alla pressione $p_1 = 2{,}04$ MPa e temperatura $T_1 = 360°\text{C}$ ($i_1 = 755$ kcal/kg; $1/\rho = 0{,}144$ m^{3}kg^{-1}). Alla bocca di aspirazione (0), la pressione sia $p_0 = 4{,}6$ kPa con temperatura $T_0 = 30°\text{C}$ di saturazione. Valutare la velocità del vapore traente alla sezione (2) degli ugelli nella camera di miscelazione e la velocità nella sezione (3) di entrata nel tratto convergente a monte del tratto centrale in cui effluisce la miscela prima dell'immissione nel tratto diffusore (divergente). Si assuma una velocità trascurabile ($v_4 \cong 0$) sulla sezione (4) di scarico del diffusore e del vapore secco in ingresso ($v_0 \cong 0$) alla bocca del tronco di aspirazione verso la camera di miscelazione.

Ipotizzando che la miscelazione porti la pressione nella sezione (3) a $p_3 = 7$ kPa e che sia richiesta una pressione allo scarico nella sezione (4) di $p_4 = 28$ kPa, si calcoli il rapporto di trascinamento (limite) dell'eiettore.

Soluzione

Dal piano di MOLLIER (entalpia-entropia), con espansione isentropica dalla sezione (1), si legge per la sezione (2): $i_{2,\text{is}} = 505$ kcal kg^{-1}. Sicché la caduta entalpica ideale (isentropica) nell'ugello dell'eiettore è:

$$(\Delta i)_{ideale} = \Delta i_{1\to 2,is} = (i_2 - i_1)_{is} = (505 - 755) = -\,250 \text{ kcal/kg}.$$

Assumendo un rendimento dell'espansione attraverso l'ugello pari a $\eta = 0{,}90$:

$$(\Delta i)_{reale} = \eta(\Delta i)_{ideale} = -\,0{,}90 \cdot 250 = -\,225 \text{ kcal/kg}.$$

Utilizzando l'equazione dell'energia in forma entalpica per evoluzione adiabatica reale lungo l'ugello (il condotto fisso in assenza di apporti di energia interna):

$$\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right)_{reale} = -(\Delta i)_{reale} > 0 \;\Rightarrow\; -(\Delta i)_{reale} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \cong \frac{v_2^2}{2}$$

da cui la relazione operativa se l'entalpia è espressa in kcal kg^{-1}:

$$v_2 \cong \sqrt{2\left|(\Delta i)_{reale}\right|} \;\Rightarrow\; v_2 \cong 91{,}5\sqrt{\left|(\Delta i)_{reale}\right|} = 91{,}5\sqrt{(225 \text{ kcal/kg})} \cong 1370 \text{ m/s}.$$

Per valutare il rapporto di trascinamento (limite) occorre determinare il valore della velocità nella sezione (3), applicando l'equazione dell'energia per fluido ideale comprimibile (si veda la forma (D–130) a pagina d-101) fra le sezioni (3) e (4). In questo caso, però, conviene semplificare l'equazione dell'energia adottando il valore medio (aritmetico) della massa

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Sezione E

Teorema di Bernoulli: aspetti teorici

In questa sezione si riporta la trattazione teorica per la deduzione rigorosa del teorema di Bernoulli, partendo dallo schema di fluido ideale secondo l'equazione di Euler. Verranno poi accennati alcuni utilizzi pratici del noto teorema.

E–1 ASPETTI GENERALI DEL MOTO DEI FLUIDI IDEALI

Per un fluido newtoniano in moto, la semplice struttura isotropa del tensore degli sforzi $(\sigma_{ik} = p\delta_{ik})$, sperimentalmente verificata nel caso di fluido in quiete, non risulta più soddisfatta a causa degli effetti della viscosità. Possono però verificarsi casi in cui le componenti normali del tensore degli sforzi siano alquanto maggiori delle relative componenti tangenziali $(p\delta_{ik} \gg \sigma_{ik}')$ e che le variazioni delle prime nello spazio e nel tempo siano maggiormente determinanti ed incisive rispetto alle seconde. In casi di questo genere, uno schema di fluido che prescinda dagli sforzi tangenziali e che tenga solo conto delle pressioni normali può riuscire particolarmente utile per descrivere sostanzialmente il problema senza apprezzabili errori.

Lo schema di fluido ideale

Il tensore degli sforzi coincide con la sua componente isotropa $(\sigma_{ik} = p\delta_{ik})$ e lo schema è completato richiedendo che le pressioni normali restino quelle p collegate all'equazione di stato del fluido $\rho = \rho(p, T)$ alla densità ρ e alla temperatura T.

L'ipotesi che il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ abbia solo componenti normali, tutte uguali a p, equivale alle posizioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\tau} = p\,\mathbf{n} \tag{E–1}$$

che caratterizzano l'equazione cardinale del moto nelle formulazioni integrali:

$$\int_V \rho\mathbf{f}\,dV + \oint_A \boldsymbol{\tau}\,dA = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\mathbf{v}\,dV \;\Rightarrow\; \int_V \rho\mathbf{f}\,dV + \oint_A p\,\mathbf{n}\,dA = \frac{D}{Dt}\int_V \rho\mathbf{v}\,dV$$

alle seguenti formulazioni indefinite:

$$\rho\mathbf{f} - div\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \;\Rightarrow\; \rho\mathbf{f} - grad\,p = \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \tag{E–2}$$

Quest'ultima relazione, con risultante delle forze di superficie ridotte ai soli gradienti delle pressioni, è nota come equazione di Euler (risalente al 1757).

La seconda equazione indefinita del moto notoriamente richiede, in generale, che il tensore degli sforzi sia simmetrico, ed è quindi automaticamente soddisfatta dall'assunto che lo stesso tensore sia addirittura isotropo (valori nulli tranne che nella diagonale del tensore $\boldsymbol{\sigma}$).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

➲ IMPORTANTE

esterne (secondo integrale della (E–3) non nullo), l'entropia varia in ogni trasformazione termodinamica (per fluido ideale, necessariamente reversibile) che porti il sistema fluido V da uno stato termodinamico iniziale A a uno finale B fra loro non coincidenti, secondo la sola uguaglianza:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e\, dV = \int_A \frac{w}{T} dA \quad \text{(lungo il percorso } A \rightsquigarrow B\text{, con } A \neq B\text{)},$$

essendo in tal caso l'integrale di CLAUSIUS coincidente con la variazione di entropia del sistema fluido V considerato.

Qualora invece, la trasformazione termodinamica porti il sistema fluido V da uno stato termodinamico iniziale e finale coincidenti allora deve risultare (sempre per fluido ideale):

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho e\, dV = 0 \quad \text{(lungo il percorso } A \rightsquigarrow B\text{, ciclico con } A \equiv B\text{)}.$$

Si è già osservato che il differenziale totale dell'energia interna (globale $\mathscr{U}$) è in generale:

$$d\mathscr{U} = T\, d\mathscr{E} - p\, dV \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{Dt}\int_V \rho u(\mathbf{x}, t) dV = T\frac{D}{Dt}\int_V \rho e\, dV - p\frac{D}{Dt}\int_V dV$$

da cui l'ulteriore passaggio (tenendo conto dell'equazione di continuità):

$$\int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV = \int_V \rho T \frac{De}{Dt} dV - \int_V p\, dV$$

e avendo, in particolare, considerato un sistema fluido, di volume continuo finito V, tale da risultare mediamente sottoposto a pressione e temperatura uniformi. Conseguentemente,

➲ IMPORTANTE

vista l'arbitrarietà del dominio d'integrazione, l'energia di pressione p/γ riferita alla massa unitaria $m_1 = \rho V = 1$, si può rapportare all'energia della massa effettiva $dM = \rho\, dV$ tramite il legame $m_1 p/\rho = pV$ arrivando a scrivere la relazione indefinita:

$$\frac{Du}{Dt} = T\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} div\mathbf{v}. \tag{E–4}$$

Nel caso di fluido ideale, essendo assenti per definizione apporti di calore irreversibili per assenza di viscosità, il bilancio locale dell'entropia risulta dipendere solo dagli apporti reversibili di calore con sorgenti esterne $(-div\mathbf{q} = \rho\, \mu_t)$, ottenendo così:

$$\frac{Du}{Dt} = -\, div\mathbf{q} - \frac{p}{\rho} div\mathbf{v}. \tag{E–5}$$

Osservazioni. Sebbene il teorema di BERNOULLI poggi le sue basi sull'assunzione di uno schema di fluido ideale, è immediatamente possibile estendere l'asserto di tale teorema anche al caso di fluido reale (quindi viscoso), tenendo indirettamente conto delle perdite attritive e quindi dei reali fenomeni termodinamici che contraddistinguono le trasformazioni reali da quelle ideali.

In sostanza, ciò viene semplicemente fatto associando tutte le perdite di energia meccanica al lavoro dissipativo degli attriti che vanno ad aumentare l'entropia del sistema e che fanno registrare sostanzialmente una diminuzione di energia di pressione (perdita di carico) al procedere dell'evoluzione termodinamica.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

E–2 ASPETTI ENERGETICI DEI FLUIDI

Nello schema di fluido ideale, vale localmente l'equazione di EULER (si veda la (E–2)), sempre che la densità ρ, la pressione p e la velocità $\mathbf{v}$ siano di classe C^1, e sempre che le forze specifiche di massa f siano di classe C^0. Nei casi di interesse tecnico, le forze specifiche di massa ammettono un potenziale ϕ, che porge:

$$\mathbf{f} = grad\phi = grad(-gz). \tag{E–6}$$

Se ciò avviene, anche le accelerazioni $\mathbf{a}$ ammettono potenziale se e solo se ammette potenziale l'espressione $\rho^{-1} grad\, p$. Si è già fatto notare che $\rho^{-1} grad\, p$ ammette potenziale quando si verifica una delle tre condizioni di:

- pressione uniforme;
- densità uniforme;
- esistenza di un legame diretto fra densità e pressione.

Moto barotropico

In altre parole, il moto del fluido è barotropico quando esiste una funzione tale per cui: $f(\rho, p, t) = 0$. In tal caso, poiché la densità può esprimersi come funzione della pressione ($\rho = \rho(p)$) risulta, per la derivata di funzione di funzione:

$$grad\left(\int \frac{dp}{\rho(p)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial p}\int \frac{dp}{\rho(p)}\right) grad\, p = \frac{1}{\rho(p)} grad\, p. \tag{E–7}$$

In conclusione, i moti barotropici di fluido ideale, soggetti a forze di massa conservative (come il campo gravitazionale), ammettono un potenziale univoco per le accelerazioni, riuscendo:

$$\mathbf{a} = grad\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho}\right) = -\, grad\left(gz + \int \frac{dp}{\rho}\right) \tag{E–8}$$

essendo $\phi = -\, gz$, se l'asse verticale z del sistema di riferimento cartesiano è diretto dal basso verso l'alto. Stante la (E–8), se il campo della velocità $\mathbf{v}$ è anche di classe C^2, a parità di altre condizioni si ha che il campo delle accelerazioni è irrotazionale:

$$rot\mathbf{a} = rot\left[grad\left(\phi - \int \frac{dp}{\rho}\right)\right] = 0 \tag{E–9}$$

risulta identicamente nullo per definizione di rotore di un gradiente.

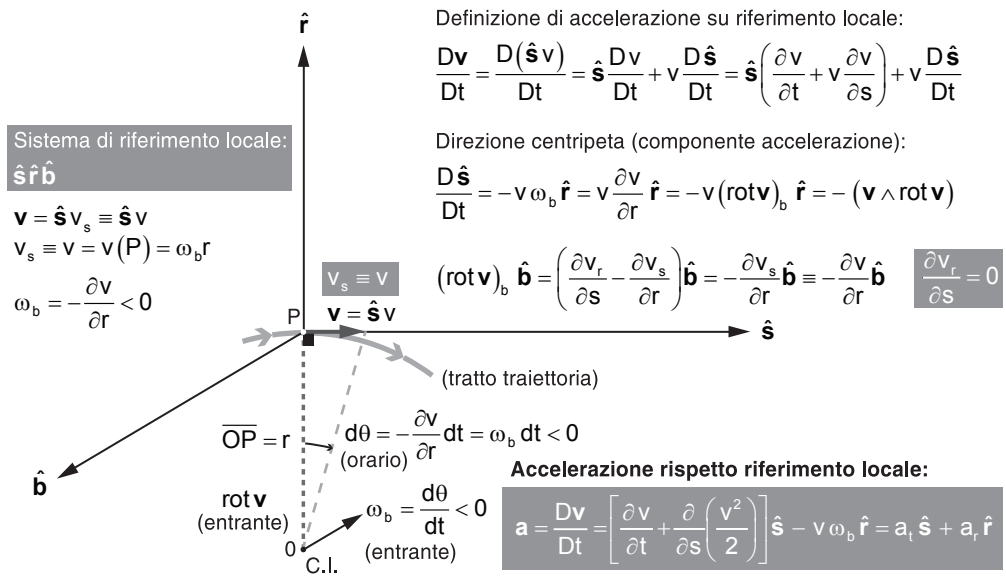
Osservazioni. La condizione che le forze specifiche di massa ammettano un potenziale e quella che il moto sia barotropico sono verificate in molti fenomeni tecnicamente importanti, ma non comprendono la totalità di questi. Forze prive di potenziale, come quelle di CORIOLIS, oppure stati di *moto baroclinico*,[iii] con superfici isobare distinte da quelle *isopicnotiche*,[iv] si presentano anche loro in casi altrettanto importanti.

(iii) Moto baroclinico si distingue dal moto barotropico perché in quest'ultimo le superfici isobare coincidono con le superfici a densità costante. In altri termini, è detto baroclinico un moto per cui manca il legame diretto $f(\rho, p, t) = 0$ come invece verificato per il moto barotropico. Nei moti baroclinici le accelerazioni non ammettono potenziale. Un particolare esempio di moto baroclinico sono le "brezze di mare" in prossimità delle coste.
(iv) Sono dette "isopicnotiche" le curve di livello a densità costante.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Figura E–1

Sistema di riferimento locale per tratto di traiettoria tangente al cerchio osculatore con raggio r.



versori mutuamente perpendicolari $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{b}}$, e considerato un tratto circolare elementare di traiettoria nel piano $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}$, il vettore velocità sarà espresso dalla relazione $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{s}}v$ avendo implicitamente indicato il modulo v della velocità $\mathbf{v}$ coincidente con la componente v_s secondo l'asse $\hat{\mathbf{s}}$ tangente alla traiettoria sul cerchio osculatore di raggio r (dettagli in Figura E–1). Come noto, il rotore del campo della velocità ($rot\,\mathbf{v}$) è localmente perpendicolare al vettore della velocità $\mathbf{v}$ stessa, ed è orientato (entrante o uscente dal piano del foglio) coerentemente con il verso della rotazione elementare $d\theta$ della particella rispetto al centro istantaneo di rotazione (C.I.).[(v)]

Osservando gli schemi in figura in alto, si deduce immediatamente che l'espressione vettoriale dell'accelerazione (nella formulazione lagrangiana) è suscettibile della seguente interpretazione, se si sceglie il sistema di riferimento solidale con la particella nel suo moto:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\left[\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,t} + grad\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]}_{\text{Tangenziale}} + \underbrace{(-\,\mathbf{v}\wedge rot\mathbf{v})}_{\text{Centripeta}} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r, \qquad \text{(E–14)}$$

nell'ipotesi appunto che il sistema di riferimento sia locale, con: $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{s}}v \equiv \hat{\mathbf{s}}v_s$. Si riconosce, quindi, l'importanza dell'espressione lagrangiana dell'accelerazione nella forma locale (di una componente tangenziale e centripeta sul cerchio osculatore di raggio r):

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{\mathbf{s}} - v\,\omega_b\,\hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial\,v}{\partial\,t} + v\frac{\partial\,v}{\partial\,s}\right)\hat{\mathbf{s}} - v\,\omega_b\,\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r \qquad \text{(E–15)}$$

essendo appunto (per definizione di gradiente):

$$v\frac{\partial\,v}{\partial\,s} = \frac{\partial}{\partial\,s}\left(\frac{v^2}{2}\right) = grad\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

(v) Quando una particella (vista come punto materiale dotato di accelerazione) descrive un arco elementare di circonferenza, rispetto al centro istantaneo di rotazione C.I. descrive una rotazione angolare ($d\theta < 0$, orario nel caso in figura) a cui compete una velocità angolare ω_b. Tale velocità angolare risulta necessariamente diversa da quella ω di rotazione rigida della particella stessa, associata invece alla metà del valore locale del rotore del campo della velocità.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

presentando un rotore non nullo: $2\omega_t = rot\mathbf{v} \neq 0$. Questo fatto può dimostrarsi immediatamente ricordando ad esempio che, per un sistema in equilibrio in un sistema di riferimento non inerziale,[vi] in una traiettoria di moto circolare uniforme ($\omega_t = \text{cost}$), l'accelerazione è sempre scomponibile in una componente tangenziale (con velocità $v = \omega_t r$, funzione della posizione della traiettoria circolare descritta a distanza r dall'asse di rotazione) e in una componente centripeta (diretta sempre verso l'asse di rotazione in direzione ad esso perpendicolare). In questo caso, la componente centripeta è data dal termine:

$$\mathbf{a}_r = -\mathbf{v} \wedge rot\mathbf{v} = rot\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{r}}\, 2\omega_t v = -\hat{\mathbf{r}}\, 2\omega_t^2 r = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial\left(\omega_t^2 r^2\right)}{\partial r}$$

mentre la rimanente variazione della componente tangenziale[vii] non può che associarsi al termine:

$$\mathbf{a}_t = grad\left(\frac{v^2}{2}\right) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega_t^2 r^2}{2}\right)$$

potendo infatti il modulo v della velocità (tangenziale) $\mathbf{v}$ variare solo in funzione del raggio r per la supposta ipotesi di vettore di velocità angolare ω_t costante. A questo punto, se si sommano vettorialmente membro a membro le due precedenti relazioni vettoriali, si ha:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial\left(\omega_t^2 r^2\right)}{\partial r} + \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega_t^2 r^2}{2}\right) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\omega_t^2 r^2}{2}\right) \tag{E–20}$$

da cui si deduce immediatamente l'espressione del potenziale dell'accelerazione:

$$\Phi = \varphi_r + \varphi_v = -\omega_t^2 r^2 + \frac{\omega_t^2 r^2}{2} = -\frac{\omega_t^2 r^2}{2} \tag{E–21}$$

$$\mathbf{a} = grad\,\Phi = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\omega_t^2 r^2}{2}\right). \tag{E–22}$$

Il teorema di Bernoulli in campo rotazionale

Partendo quindi dallo schema di fluido ideale (equazione di Euler) e nell'ipotesi aggiuntiva che le forze specifiche di massa ammettano anch'esse un potenziale:

$$\mathbf{f} = grad\,\phi = grad(-gz),$$

da cui l'esistenza di un potenziale per il campo delle accelerazioni, se infine il moto è schematizzabile come barotropico:

$$\frac{1}{\rho} grad\, p = grad \int \frac{dp}{\rho}.$$

dalla (E–18) a pagina e-115 si arriva alla relazione (rispetto a un riferimento inerziale):

$$grad\left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = \mathbf{v} \wedge rot\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{E–23}$$

(vi) Ad esempio, il moto rotatorio che può generarsi in una massa fluida quando il recipiente che lo contiene ruota attorno ad un asse fisso crea una situazione in cui il fluido è in equilibrio rispetto al recipiente, ruotando solidalmente con esso.

(vii) Il fatto che la componente di accelerazione tangenziale abbia per pedice "t" lo stesso della velocità angolare ω_t non implica nulla: il pedice "t" per la velocità angolare sta per "trascinamento", qualora in generale si tratti di moti studiati rispetto a sistemi di riferimento non inerziali (si veda pi avanti).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

per il sistema di recipiente rotante – sistema non inerziale – coincide con il doppio della velocità angolare del recipiente: $2\omega_t = rot\mathbf{v}$).

Dalla (E–26), ponendo $p_B = p = 0$ (a cui si faccia corrispondere $z_B = z = 0$) si va praticamente a cercare l'equazione della superficie di interfaccia liquido-atmosfera su cui la pressione relativa è necessariamente nulla (per definizione). Si trova quindi l'equazione del cosiddetto *paraboloide* di rivoluzione intorno all'asse di rotazione (in altri termini la superficie curva, e depressa maggiormente in corrispondenza dell'asse di rotazione) che il fluido assume all'equilibrio durante il moto rotatorio:

$$z(r) = \frac{\omega_t^2}{2g} r^2 + h_{\min,0}. \qquad \text{(E–27)}$$

Si è in particolare indicato con $h_{\min,0}$ l'altezza liquida in corrispondenza dell'asse di rotazione (che risulta la minima a causa dell'affondamento massimo in corrispondenza dell'asse di rotazione dovuta all'effetto centrifugo di tutta la massa fluida).

Il teorema di Bernoulli in campo irrotazionale

Ammettendo che il moto sia irrotazionale $rot\mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = grad\varphi$, allora la (E–23) a pagina e-116 si riduce alla forma:

$$grad\left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mathbf{v} \wedge rot\mathbf{v} = 0. \qquad \text{(E–28)}$$

Se, inoltre, riescono immutabili nel tempo il potenziale del campo gravitazionale ϕ, il potenziale φ del campo della velocità $\mathbf{v}$ $(\partial \varphi / \partial t = 0)$, la pressione p e la densità ρ, allora anche il trinomio H assume valore costante nel tempo in un qualsiasi arbitrario punto del dominio $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = 0. \qquad \text{(E–29)}$$

Quest'ultima relazione, unita alla (E–28) nella forma:

$$grad\,H = grad\left(gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

fornisce l'importante relazione:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot grad\,H = \frac{D}{Dt}\left(gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{(E–30)}$$

che è appunto l'espressione del teorema di Bernoulli per fluido ideale (assenza di perdite di energia per viscosità) in condizioni di moto irrotazionale (campo delle velocità dotato di potenziale scalare univoco), ampiamente frequente in campo tecnico per masse fluide che presentano anche densità praticamente uniforme e permanente. La relazione (E–30) sintetizza questo:

- scelta una qualsiasi traiettoria fluida, la somma H dei tre contributi energetici si mantiene sempre inalterata in valore;
- pur scegliendo due punti (partenza e arrivo) ciascuno su traiettorie diverse, la somma H dei tre contributi energetici si mantiene inalterata in valore (questo fatto è direttamente dovuto al fatto che il moto è stato ipotizzato irrotazionale: diversamente non sarebbe più vero nel passare da una traiettoria all'altra).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(v_\infty^2 - v^2), \text{ e coefficiente di pressione: } c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 \quad \text{(E–35)}$$

dove, quindi, sia applicata la (E–33) fra un generico punto $\mathbf{x}_1(p, v)$ del campo del moto e un punto dove la corrente risulti praticamente completamente indisturbata $\mathbf{x}_\infty(p_\infty, v_\infty)$.

Il binomio (energetico) di Bernoulli, stante le ipotesi fissate (di fluido ideale, unitamente alla condizione di moto irrotazionale), è costante lungo ogni singola traiettoria, sia andando verso valle (seguendo il verso della portata), sia verso monte. In particolare, se tutte le traiettorie provengono (nascono) da una zona (superficie) del dominio dove velocità e pressione sono costanti, allora il binomio è necessariamente costante in tutto il dominio.

Osservazioni. È opportuno far notare che se si applica l'equazione del bilancio della quantità di moto ad una corrente comprimibile[ix] (oppure se si accosta il teorema di Bernoulli all'equazione di bilancio delle masse, quest'ultima applicata però sui soli valori mediati, di velocità e densità, fra due sezioni lungo una medesima traiettoria) si arriva[x] a definire l'equazione del moto di fluidi aeriformi (privi di attrito, o schematizzabili come tali) in condotti a sezione costante (non necessariamente orizzontali):

$$p + \rho v^2 = \text{cost} \quad \text{(E–36)}$$

dove riescono misurabili cospicue contropressioni d'inerzia – dovute all'aumento di volume specifico $\mathrm{v} = 1/\rho$ del fluido, imputabile in grande misura agli apporti di calore reversibili dall'esterno – e quindi forti riduzioni della pressione nel verso del moto della portata.

Per questo tipo di efflussi la perdita di pressione conseguente è completamente differente rispetto alla perdita di pressione per presenza di attriti (infatti qui si è sempre premesso e utilizzato lo schema di fluido ideale). In questo caso, infatti, si tratta di un fenomeno tipicamente inerziale originato dal fatto fisico che, dilatandosi il fluido per effetto del riscaldamento dall'esterno e dovendo per la continuità rimanere immutata la portata massica ($\dot{m} = \rho v A = \text{cost}$), la portata volumetrica $Q_\mathrm{V} = vA$ progressivamente cresce, a causa della continua riduzione di densità ρ; la quale ultima diminuisce a causa della dilatazione del fluido per apporto di calore dall'esterno.

Teorema di Bernoulli per liquidi. Per i liquidi, la densità è ovunque costante e gli effetti della temperatura sono irrilevanti ai fini energetici. Pertanto, sempre sotto l'ipotesi di fluido ideale e di moto irrotazionale, il trinomio energetico H, così espresso:

$$H = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cost} \qquad [\text{joule}\,\text{kg}^{-1}] \quad \text{(E–37)}$$

è ovunque costante (sia sulla singola traiettoria, sia su punti appartenenti a differenti traiettorie). Nel caso di moto rotazionale, però, la costanza del trinomio H vale evidentemente solo sulla singola traiettoria. È opportuno precisare che con H fin qui si è inteso il carico energetico per unità di massa fluida (infatti, ad esempio, l'energia potenziale gravitazionale per una massa fluida m come noto deve essere: mgz). Volendo esprimere invece il trinomio

(ix) Considerando quindi la densità variabile lungo la traiettoria e dunque applicando la formulazione generale per aeriformi data dalla prima delle (E–32).

(x) La deduzione della formulazione (E–36) è stata affrontata nella sezione precedente, trattando di "equazione del moto per comprimibili ideali", alla quale si rimanda per più particolari delucidazioni.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

H in termini di energia per unità di peso, il risultato del teorema di Bernoulli si scriverà notoriamente:

$$H_{(mg)} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost} \qquad [\text{metri}] = [\text{joule newton}^{-1}]. \tag{E–38}$$

È uso indicare carico piezometrico la somma:

$$h := z + \frac{p}{\gamma} \quad (\text{con } \gamma = \rho g \text{ del liquido in questione})$$

e con altezza cinetica il rimanente contributo $h_c := v^2/2g$. Il carico totale, per fluido ideale, viene indicato come:

$$H_{(mg)} = h + h_c = h + \frac{v^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost} \tag{E–39}$$

in termini quindi di somma di energie per unità di massa (ciascuna esprimibile equivalentemente in metri di colonna di liquido). Per un liquido in quiete (v ovunque nullo), il risultato del teorema di Bernoulli si riduce alla relazione della statica dei fluidi:

$$h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \;\Rightarrow\; h_1 = h_2 \;\Rightarrow\; z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \tag{E–40}$$

risultando infatti la legge di Stevino:

$$p_2 = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) \tag{E–41}$$

applicata fra due punti qualsiasi di un liquido in quiete. Nel caso particolare in cui il punto 2 sia situato sul fondo del liquido, con $z_2 = z = 0$ (essendo implicita l'ipotesi di asse di riferimento z, verticale e diretto verso l'alto) e il punto 1 sulla superficie di interfaccia liquido-atmosfera (dove la pressione relativa è $p_1 = 0$), si riscontra che la pressione in 2 ($p_2 = p$) è causata proprio dal peso della colonna d'acqua sovrastante (di altezza $z_1 = z$):[xi]

$$p_2 = \gamma z_1 \;\Rightarrow\; p = \gamma z \;\Rightarrow\; z = \frac{p}{\gamma}.$$

Da questo semplice esempio si riconosce il perché le energie di posizione (in termini di distanze-altezze z) siano interscambiabili a delle energie di pressione p/γ e viceversa, e così tutto il carico energetico in generale.

Adattamento del teorema di Bernoulli ai casi reali

Nei casi reali intervengono necessariamente le dissipazioni energetiche per viscosità. A rigori, lo schema di calcolo del fluido deve essere il fluido ideale. Per ovviare a questo è consuetudine estendere i risultati del teorema di Bernoulli tenendo conto dell'entità degli effetti delle dissipazioni in maniera diretta, mediante misurazione delle perdite di energia (essenzialmente di pressione) tra due sezioni di moto.

Poiché per il *secondo principio della Termodinamica* le perdite si hanno lungo il moto (lungo la direzione della portata massica), necessariamente l'energia meccanica deve diminuire lungo la direzione di movimento della massa fluida (mai viceversa). In tal caso, indicando con (1) la sezione iniziale (o quella di entrata in un fissato volume di controllo) e

(xi) In questo caso con "z" si è indicata una generica altezza di liquido, misurata dal fondo fino alla superficie del pelo libero.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

con (2) la sezione finale (o quella di uscita dal suddetto volume di controllo), l'entità degli attriti (il lavoro attritivo $L^{(\tau)}_{1\to 2}$ fatto lungo il percorso $(1) \rightsquigarrow (2)$) sarà computabile quale differenza dei valori dell'intero carico energetico fra le due sezioni considerate, nell'ordine:

$$H_2 + L^{(\tau)}_{1\to 2} = H_1 \;\Rightarrow\; L^{(\tau)}_{1\to 2} = H_1 - H_2 > 0 \qquad \text{(E–42)}$$

risultando sempre (in virtù del II principio della Termodinamica): $H_1 - H_2 > 0$.[xii] Questa schematizzazione, dell'effetto dissipativo energetico degli attriti, è valida del tutto in generale, sia per la formulazione del moto di fluidi aeriformi (comprimibili o meno) e sia per il moto di liquidi in generale.

ESEMPIO E–1

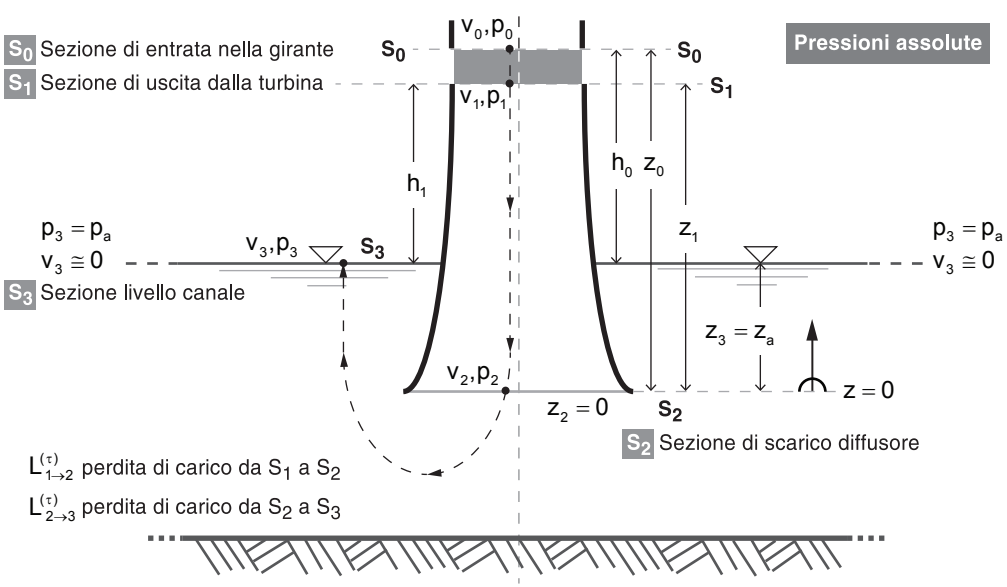
Recupero energetico allo scarico delle turbine idrauliche

Le turbine idrauliche non possono, di regola, essere poste al livello del pelo libero del canale di scarico perché i fabbricati che le contengono sono di regola fondati a quota più elevata, per cui la differenza di quota tra i livelli della bocca di scarico della turbina e dell'acqua nel canale di scarico, in assenza di adatti provvedimenti deve essere dedotta dal salto geodetico. Soprattutto per le turbine a reazione (a grande numero di giri) la perdita nel canale di scarico potrebbe essere considerevole a causa delle grosse portate e delle cadute talvolta molto ridotte, per cui il dislivello fra turbina e canale di scarico può costituire una frazione notevole della caduta idraulica. Sorge quindi l'esigenza di recuperare almeno buona parte di tale energia potenziale poiché – specie per le turbine KAPLAN – la corrente liquida nell'in-

Figura E–2

Schema di un diffusore di una turbina idraulica allo sbocco in un canale di scarico a livello idrico costante.

Nota: evidenziata una traiettoria generica assunta come rappresentativa del moto medio.



tero tragitto attraverso la macchina non viene in contatto con l'atmosfera e quindi vi si può controllare la distribuzione di pressione fino allo sbocco.

(xii) Attriti sempre di verso opposto al verso di propagazione della portata: si perde energia meccanica procedendo il moto da (1) a (2).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

la conservazione della portata volumetrica in un liquido (fluido incomprimibile). Pertanto, la (E–44) si riduce alla:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \left(\frac{p_a}{\gamma} - h_1\right) + L_{1\to 2}^{(\tau)} \tag{E–45}$$

venendo così recuperata – non potendo escludere le inevitabili perdite di carico[(xv)] – la sola energia relativa all'altezza residua h_1 e non più quella cinetica. Il condotto prende allora il nome di *tubo aspiratore*.

Il teorema di Bernoulli nei sistemi di riferimento non inerziali

Si consideri un particolare sistema di riferimento $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{b}}$ non inerziale, rotante con velocità angolare $\omega_t = \omega_t \hat{\mathbf{b}}$, costante in modulo e direzione, attorno all'asse $\hat{\mathbf{b}}$. Fissato quindi un punto P a distanza r sull'asse del versore $\hat{\mathbf{r}}$, questo descriverà una traiettoria circolare, caratterizzata da moto uniforme con accelerazione solo centripeta $\mathbf{a}_{\text{cen}} = -\omega_t^2 r \hat{\mathbf{r}}$.

L'equazione di Euler nel sistema relativo presenterà quindi una forza inerziale di trascinamento (centrifuga, diretta secondo il versore $\hat{\mathbf{r}}$ del sistema di riferimento rotante) e la forza inerziale di Coriolis $-2\omega_t \wedge \mathbf{w}$ (la cui accelerazione $\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2\omega_t \wedge \mathbf{w}$ interviene tutte le volte che esiste finita una velocità relativa $\mathbf{w} \neq 0$). Rispetto quindi al sistema di riferimento relativo, l'equazione di Euler si specializza nella seguente forma:

$$\rho \mathbf{f} - grad\, p + \omega_t^2 r \hat{\mathbf{r}} - 2\omega_t \wedge \mathbf{w} = \rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt}. \tag{E–46}$$

Analogamente, l'espressione vettoriale della derivata sostanziale della velocità relativa $\mathbf{w}$ assumerà la forma:

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{cen}} - \mathbf{a}_{\text{cor}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} = \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{w} \wedge rot\,\mathbf{w} + grad\left(\frac{w^2}{2}\right), \tag{E–47}$$

avendo in particolare indicato con w il modulo del vettore velocità relativa $\mathbf{w}$. Unendo queste due ultime equazioni vettoriali, si ottiene:

$$grad\left(-\phi + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{w^2}{2}\right) + grad\,\psi_{centr} = \mathbf{w} \wedge rot\,\mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - 2\omega_t \wedge \mathbf{w} \tag{E–48}$$

avendo indicato con ψ_{centr} il potenziale della forza inerziale centrifuga:

$$\psi_{centr} = -\frac{\omega_t^2 r^2}{2} = -\frac{u^2}{2} \quad \Rightarrow \quad grad\,\psi_{centr} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi_{centr}}{\partial r} = -\omega_t^2 r \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_{\text{cen}} \tag{E–49}$$

essendo $u = u(r) = \omega_t r$ la velocità periferica, del sistema di riferimento rotante, nel punto rappresentativo dove si misura/compone il vettore della velocità relativa media $\mathbf{w}$ della massa fluida transitante.

Dunque, l'espressione generale del teorema di Bernoulli, in un sistema di riferimento non inerziale rotante con velocità vettoriale angolare costante $\omega_t = \omega_t \hat{\mathbf{b}}$, risulta:

(xv) Le perdite di carico si possono al più contenere con uno studio fluidodinamico del condotto di scarico del diffusore; in questo modo si può tentare di diminuire il più possibile l'intensità della vorticità e quindi gli effetti viscosi sui vortici più piccoli che si frammentano in cascata lungo il flusso del moto.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

E–3 EQUAZIONI DI BILANCIO ENERGETICO PER LE TURBOMACCHINE

Il teorema di BERNOULLI trae la sua formulazione partendo dall'equazione meccanica del moto per schema di fluido ideale. Estendendo al caso di fluido reale (tenendo quindi conto delle perdite di energia meccanica quali entità misurabili fra due sezioni del moto) è possibile ricondurre i risultati del teorema di BERNOULLI all'equazione di bilancio dell'energia cinetica e da questa, introducendo il lavoro dissipativo degli attriti, formulare l'equazione di bilancio energetico vera e propria, in termini entalpici (frequentemente utilizzata per evoluzioni adiabatiche di fluidi aeriformi, dove la variazione di energia potenziale di posizione risulta assolutamente irrilevante ai fini della trasmissione energetica macchina-fluido.

Deduzione dell'equazione cinetica dell'energia

Dal punto di vista, invece, del riferimento assoluto (quindi inerziale), ipotizzando uno scambio energetico $L_{est,1} = L_{est}/M$ (in termini di unità di massa M) fra fluido e palettatura rotorica, il teorema dell'energia cinetica porge:

$$(\phi_2 - \phi_1) - \int_1^2 \frac{dp}{\rho} - L_{1\to 2}^{(\tau)} + L_{est,1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}, \tag{E–53}$$

non potendo misurare in questo caso alcuna forza inerziale (in particolare, centrifuga) agente sul fluido. A questo punto, sostituendo la (E–53) nella (E–52), si ottiene l'importante relazione:

$$L_{est,1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \tag{E–54}$$

che esprime l'entità dello scambio di energia fra fluido e palettatura rotorica, mediante una relazione scalare dipendente solo dai quadrati dei moduli delle velocità nelle sezioni di entrata (1) e di uscita (2) dei condotti di una palettatura rotorica di una macchina. In maniera implicita, in ciascuna delle sezioni di ingresso e uscita dalla girante della macchina, in generale, deve valere sempre la relazione vettoriale fra le velocità (triangolo delle velocità):

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i + \mathbf{u}_i \tag{E–55}$$

dove, nella generica sezione "i" $\mathbf{u}_i$ è la velocità di trascinamento (di rotazione della girante), $\mathbf{w}_i$ è la velocità di flusso relativa (rispetto ai condotti della girante pensata fissa) e $\mathbf{v}_i$ è la velocità assoluta della corrente fluida evoluente (come appare ad un osservatore che veda la girante girare).

Come si può subito notare, l'energia (per unità di massa fluida evoluente) trasmessa dalla macchina al fluido (macchina operatrice, caso ad esempio di un compressore) è da intendersi positiva $L_{est,1} > 0$ perché tende ad aumentare l'energia cinetica assoluta della corrente; dovendo poi aumentare la pressione da $(1) \rightarrow (2)$ (per $p_2 > p_1$ si deve infatti avere $w_2 < w_1$) è necessario che aumenti la velocità periferica $u_2 > u_1$, perché solo così può manifestarsi una componente centrifuga dei flussi che aumentino le pressioni attraverso i condotti di una palettatura in rotazione (effetto di aumento di pressione per centrifugazione della massa fluida).

Viceversa, nel caso di una turbina, l'energia trasmessa dal fluido alla palettatura rotorica della macchina deve intendersi come negativa $L_{est,1} < 0$, infatti ci deve essere una diminuzione di energia cinetica assoluta $v_1 > v_2$, una diminuzione di pressione $p_1 > p_2$ (e

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$(i_2 - i_1)_{rotore} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = L_{est,1}. \tag{E–58}$$

➲ IMPORTANTE

L'aver utilizzato anche qui, nelle (E–54), (E–58), nel simbolo $L_{est,1}$ il pedice "1" è per ricordare che ci si sta riferendo all'energia per unità di massa fluida evoluente (generalmente espressa per la forma entalpica in termini di $\mathrm{kcal\,kg^{-1}}$). Sostituendo ora l'espressione di $L_{est,1}$ della (E–54) nell'equazione di bilancio globale dell'energia della (E–58), si ottiene:

$$(i_2 - i_1)_{rotore} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \tag{E–59}$$

che fornisce la variazione entalpica nel rotore della macchina in funzione delle velocità di trascinamento e velocità relative di efflusso attraverso i condotti interpalari. D'altro canto, nell'equazione dell'energia per lo statore (dove le palettature sono effettivamente fisse e il flusso avviene nel verso $(0) \rightarrow (1)$) non è presente il termine del lavoro esterno e quindi si dovrà avere:

$$(i_1 - i_0)_{statore} + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = 0 \;\Rightarrow\; (i_1 - i_0)_{statore} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2}. \tag{E–60}$$

Poiché, però, alle estremità dello stadio (direzione del flusso $(0) \rightarrow (1)$) la velocità assoluta in ingresso allo statore (0) è generalmente pressoché uguale in modulo a quella all'uscita (2) dalle ultime schiere del rotore (all'interno del rotore, infatti, il flusso procede da $(1) \rightarrow (2)$), l'equazione di bilancio dell'energia nello statore può scriversi:

$$(i_1 - i_0)_{statore} \cong \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}. \tag{E–61}$$

A questo punto, sommando le differenze di entalpia fra statore e rotore si ottiene la differenza di entalpia dell'intero stadio della macchina:

$$(i_2 - i_0)_{stadio} = (i_1 - i_0)_{statore} + (i_2 - i_1)_{rotore} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$$

che, confrontata con la relazione (E–54) a pagina e-128, porge l'importante legame:

$$(i_2 - i_0)_{stadio} = L_{est,1} \tag{E–62}$$

che permette anche agevolmente di determinare il *grado di reazione* in una turbomacchina mediante il noto rapporto:

$$\begin{aligned} R = \frac{(\Delta i)_{rot}}{(\Delta i)_{tot}} = \frac{(i_2 - i_1)_{rotore}}{(i_2 - i_0)_{stadio}} &\cong \frac{(i_2 - i_1)_{rotore}}{L_{est}} \\ &= \frac{(u_2^2 - u_1^2) + (w_1^2 - w_2^2)}{(v_2^2 - v_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) + (w_1^2 - w_2^2)}, \end{aligned} \tag{E–63}$$

sempre e comunque positivo perché i numeratori e i denominatori risultano sempre con medesimo segno algebrico nello statore e nel rotore sia per le macchine operatrici (variazioni positive di entalpia) sia per le turbine (variazioni negative di entalpia).

Potendo considerare come visto $v_0 \cong v_2$ tra le due sezioni di estremità dello stadio, il grado di reazione è esprimibile anche nella forma più frequente:

$$R = \frac{(\Delta i)_{rot}}{(\Delta i)_{tot}} \cong \frac{(u_2^2 - u_1^2) + (w_1^2 - w_2^2)}{(v_0^2 - v_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) + (w_1^2 - w_2^2)}. \tag{E–64}$$

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

Equazione del moto isotermo per fluido aeriforme

Partendo dai risultati del teorema di BERNOULLI per fluido aeriforme ideale in condizioni di moto irrotazionale:

$$grad\left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mathbf{v} \wedge rot\mathbf{v} = 0, \tag{E–65}$$

estesi al caso di fluido reale (viscoso) in condizioni di moto permanente, per il bilancio delle energie lungo il verso di transito della massa (quindi da $(1) \rightsquigarrow (2)$), lungo la generica traiettoria del moto medio, si avrà (in virtù della (E–42) a pagina e-123):

$$grad\left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = -J = -\frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2} < 0 \tag{E–66}$$

avendo indicato con J il modulo della perdita di energia meccanica per unità di spostamento lungo la traiettoria del moto medio del flusso all'interno di una tubazione di sezione circolare di diametro D.

Si nota che il segno meno, davanti a una grandezza J definita positiva, sta appunto ad indicare che l'energia meccanica dell'aeriforme:

$$H = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dH}{ds} = J = \frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2}$$

deve sempre diminuire lungo la direzione del trasporto del moto (medio).[xviii] Esplicitando il gradiente del binomio energetico H in funzione dell'ascissa (in generale curvilinea) di movimento della portata, si ottiene:

$$grad\, H = grad\left(\int \frac{dp}{\rho}\right) + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2}. \tag{E–67}$$

Ipotizzando il moto barotropico, si ascriverà:

$$grad\, H = \frac{1}{\rho} grad\, p + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2}. \tag{E–68}$$

Esplicitando la variabile di spostamento "s" lungo la traiettoria del moto medio[xix] all'interno della tubazione, si ha:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} + v\frac{dv}{ds} = -\frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2}, \quad \text{da cui la:} \quad \frac{1}{\rho}dp + v\,dv = -\frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2}ds. \tag{E–69}$$

In virtù dell'equazione di continuità, avendo ipotizzato la sezione trasversale della tubazione costante ($A =$ cost), si deve imporre la costanza della portata in massa sull'unità di superficie interessata dal transito della corrente:

$$\rho v = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad v d\rho + \rho dv = 0 \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{v}{\rho}d\rho, \quad (v \text{ è la velocità media}). \tag{E–70}$$

A questo punto, si assume valida l'equazione di stato valida per gas molto rarefatti (schema di gas perfetto), ponendo:

$$p = \rho\frac{\mathscr{R}T}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\mathscr{R}T}{N} \tag{E–71}$$

(xviii) Ciò in virtù del secondo principio della Termodinamica.
(xix) Facendo riferimento al moto medio, con "v" è da intendersi la velocità media che si registra in una sezione trasversale della tubazione (ipotizzata circolare, di diametro D).

Copia parziale di valutazione - novembre 2017

$$p_1^2 - p_2^2 = (25{,}04 \cdot 10^{10} + 0{,}27 \cdot 10^{10}) = 25{,}31\ \mathrm{N^2m^{-4}}$$

da cui:

$$p_2 = \sqrt{(6{,}20^2 - 25{,}31) \cdot 10^{10}} \cong 3{,}62 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nm^{-2}}\,(3{,}62\ \mathrm{bar}).$$

La caduta di pressione richiesta per veicolare la portata richiesta alle condizioni imposte di progetto è perciò:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 6{,}20 - 3{,}62 = 2{,}58\ \mathrm{bar}$$

mentre, trascurando il termine logaritmico, sarebbe risultato $\Delta p = 2{,}54$ bar, con una differenza in meno del 1,6% circa.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Caputo C., *Le Turbomacchine*, vol. II, Masson Editoriale ESA, Milano, 1994.
Cenedese A., *Meccanica dei Fluidi*, McGraw-Hill, Milano, 2003.
Citrini D., Noseda G., *Idraulica*, CEA-Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1987.
Çengel Yunus A., Cimbala John M., *Fluid Mechanics: Foundamentals and Applications*, McGraw-Hill, New York, 2006.
Marchi E., Rubatta A., *Meccanica dei Fluidi, Principi e applicazioni*, UTET, Torino, 1997.

Copia parziale di valutazione - novembre 2017