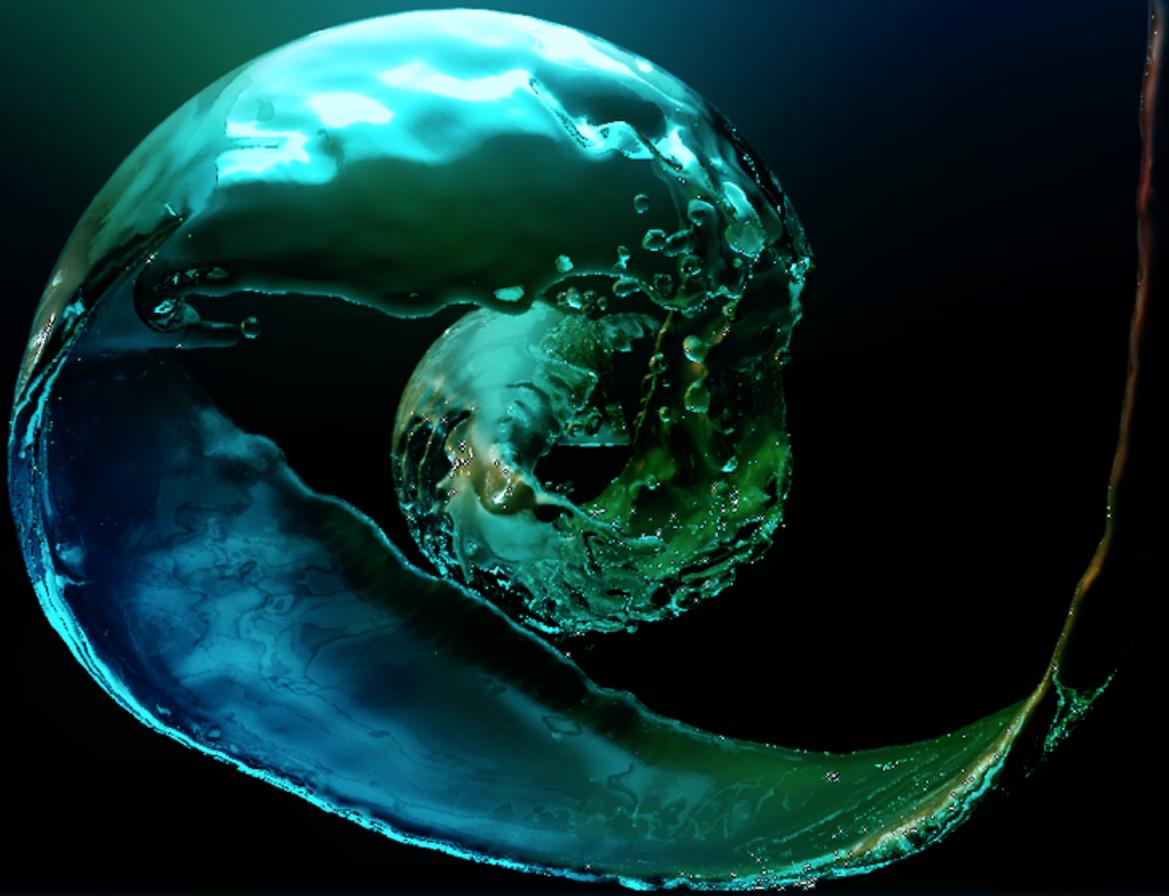


DEMO - COPIA DI VALUTAZIONE

MECCANICA DEI FLUIDI

Equazioni fondamentali
Fluidi reali e moti dell'aria



Carlo Sigmund

Ingegneria

Civile & Ambientale
Idraulica e Fluidodinamica

First Edition

• Ebook •



Copyright © 2015 carlo.sigmund@tiscali.it

All rights reserved. No part of this work may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the publisher. Contact carlo.sigmund@tiscali.it

Editore e autore: Carlo Sigmund

Foto in copertina: www.compadre.org (Liquid Drop Art Image)

Prima edizione, Febbraio 2015

Sigmund Carlo

Meccanica dei Fluidi - Equazioni fondamentali

ISBN n.: 978-1-326-10658-4

Titolo del libro: Meccanica dei Fluidi - Equazioni fondamentali

Meccanica, Macchine a Fluido.

Nessuna parte del presente documento può essere riprodotta, memorizzata in un sistema che ne permetta l'elaborazione, né trasmessa in qualsivoglia forma e con qualsivoglia mezzo elettronico o meccanico, né può essere fotocopiata, riprodotta o registrata altrimenti, senza proprio consenso scritto dell'editore, tranne nel caso di brevi citazioni contenute in articoli di critica o recensioni.

La presente pubblicazione contiene opinioni dell'autore e ha lo scopo di fornire informazioni precise e accurate. L'elaborazione dei testi, anche se curata con scrupolosa attenzione, non può comportare specifici responsabilità in capo all'autore e/o all'editore per eventuali errori, refusi e/o incertezze.

L'autore detiene i diritti per tutti i testi, le tabelle e le illustrazioni contenute in questo documento.

SOMMARIO

CAPITOLO 1.	Schemi di mezzo continuo	pag. 1
1.1	Il tensore degli sforzi	1
1.1.1	<i>Il tetraedro di Cauchy</i>	1
1.1.2	<i>La reciprocità dello sforzo di taglio</i>	4
1.1.3	<i>Il teorema di Cauchy per i fluidi in quiete</i>	7
CAPITOLO 2.	Equazioni della Termodinamica	pag. 9
2.1	Le equazioni fondamentali per i fluidi viscosi	9
2.1.1	<i>1° Principio della Termodinamica</i>	9
2.1.2	<i>Interpretazione energetica dell'integrale degli sforzi di superficie nell'equazione del 1° Principio della Termodinamica</i>	11
CAPITOLO 3.	Considerazioni sull'equazione di Navier Stokes	pag. 19
3.1	Il tensore degli sforzi nei fluidi viscosi	19
3.1.1	<i>Il teorema dei lavori virtuali applicato all'elemento fluido infinitesimo</i>	24
3.2	Considerazioni geometriche sui cinematismi di deformazione	28
3.2.1	<i>Cinematismo di deformazione di un elemento infinitesimo piano</i>	29
3.3	Le equazioni meccaniche dei fluidi newtoniani	32
3.3.1	<i>Definizione di pressione isotropa</i>	32
3.3.2	<i>Equazione indefinita del moto: equazione di Stokes</i>	33
CAPITOLO 4.	Applicazione dell'equazione di Navier stokes	pag. 35
4.1	Le equazioni del bilancio della quantità di moto	35
4.1.1	<i>Introduzione alle equazioni di Navier Stokes per i fluidi viscosi</i>	35
4.1.2	<i>Moto in tubi ad asse rettilineo</i>	36
4.2	Equazione di Navier Stokes in sistemi di riferimento non inerziali	39
4.2.1	<i>Relazioni tra sistemi inerziali e relativi</i>	39
4.2.2	<i>Applicazione dell'equazione di Navier Stokes ai sistemi relativi non inerziali</i>	41
4.2.3	<i>Osservazioni sul termine inerziale di Coriolis</i>	42

4.2.4	<i>L'equazione di Navier Stokes trasportata in un riferimento relativo non inerziale</i>	43
4.2.5	<i>Equazioni di Navier Stokes nei moti turbolenti</i>	45
4.3	Il tensore degli sforzi di Reynolds	47
4.3.1	<i>Equazioni della turbolenza</i>	47
4.3.2	<i>Ipotesi di Bousinesque</i>	48
4.3.3	<i>Moti a turbolenza sviluppata</i>	49
4.3.4	<i>Equazioni di Navier Stokes per fluidi incomprimibili: riepilogo equazioni generali</i>	50
CAPITOLO 5.	Osservazioni sull'equazione meccanica dell'energia	pag. 51
5.1	L'equazione meccanica dell'energia	51
5.1.1	<i>Note sulla potenza meccanica</i>	51
5.1.2	<i>Bilancio dell'energia totale per una massa fluida evolvente attraverso un condotto</i>	54
5.2	L'equazione del moto	59
5.2.1	<i>Equazioni fondamentali</i>	59
5.2.2	<i>L'equazione dell'energia</i>	63
5.2.3	<i>Le equazioni fondamentali del moto rispetto ad un sistema relativo (rotore)</i>	65
CAPITOLO 6.	Termodinamica dei fluidi reali	pag. 69
6.1	Equazioni termodinamiche cardinali	69
6.2	Aspetti dell'equazione dell'energia	71
6.2.1	<i>Sull'equazione del teorema delle potenze cinetiche applicato ai fluidi incompressibili</i>	72
6.2.2	<i>L'equazione dell'energia per i fluidi nel caso generale</i>	77
6.2.3	<i>L'equazione di bilancio dell'entalpia specifica</i>	84
6.2.4	<i>Osservazioni sul primo principio della termodinamica</i>	85
CAPITOLO 7.	Strato limite atmosferico	pag. 87
7.1	Energia cinetica turbolenta nello strato limite	87
7.1.1	<i>L'equazione di continuità per la massa fluttuante</i>	87
7.1.2	<i>Bilancio locale delle energie cinetiche turbolente (nello strato limite)</i>	88
7.2	Atmosfera e fluidi aeriformi	92
7.2.1	<i>Equazioni di stato</i>	92
7.2.2	<i>Temperatura potenziale</i>	93
7.3	Osservazioni sull'equazione di bilancio locale dell'energia cinetica turbolenta	96
7.3.1	<i>Premessa</i>	96
7.3.2	<i>Teoria della lunghezza di mescolamento</i>	96
7.3.3	<i>I termini di galleggiamento</i>	98
7.4	Parametri locali per la caratterizzazione dello strato limite atmosferico	99
7.4.1	<i>Numero di Richardson</i>	99
7.4.2	<i>Lunghezza di Monin-Obukov</i>	101

CAPITOLO 8.	Equazioni di bilancio per l'energia cinetica	pag. 103
8.1	Equazione di bilancio della massa	103
8.2	Equazioni di Navier Stokes (riferimento assoluto) nel moto turbolento	104
8.2.1	<i>L'equazione del moto medio</i>	104
8.2.2	<i>Bilancio dell'energia cinetica del moto medio per la componente i-esima</i>	106
8.2.3	<i>Equazione di bilancio dell'energia cinetica del moto totale</i>	107
CAPITOLO 9.	L'energia cinetica turbolenta	pag. 109
9.1	Equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta	109
9.1.1	<i>Equazioni generali del bilancio della quantità di moto nel riferimento relativo</i>	109
9.1.2	<i>Equazioni in termini delle grandezze fluttuanti</i>	110
9.2	Equazioni della gerarchia turbolenta	115
9.2.1	<i>Equazioni di bilancio per il tensore degli sforzi di Reynolds</i>	115
CAPITOLO 10.	Atmosfera: moti dell'aria	pag. 117
10.1	Equazioni e analisi di scala	117
10.1.1	<i>Premessa</i>	117
10.1.2	<i>Adimensionalizzazione delle equazioni di Navier Stokes (riferimento relativo non inerziale)</i>	117
10.1.3	<i>Scala locale</i>	119
10.1.4	<i>Equilibrio geostrofico</i>	120
10.1.5	<i>Spirale di Ekman</i>	123
10.1.6	<i>Scala sinottica</i>	129
10.1.7	<i>Stabilità dei venti zonali</i>	136
10.1.8	<i>Moti baroclinici</i>	140
CAPITOLO 11.	Descrizione Euleriana della dispersione	pag. 143
11.1	L'equazione della diffusione-dispersione	143
11.1.1	<i>Equazione di bilancio di massa per un inquinante in seno ad un fluido</i>	143
APPENDICE A.	Dinamica della vorticità	pag. I
A.1	La vorticità nei fluidi viscosi	I
A.1.1	<i>Teoremi sulla vorticità</i>	I
A.1.2	<i>Equazione generale di bilancio della vorticità</i>	V
A.1.3	<i>Bilancio della vorticità nel caso di moti piani isocori</i>	VII
A.1.4	<i>Equazione di Beltrami</i>	VIII
A.1.5	<i>Equazione di bilancio della vorticità nel caso bidimensionale ricavata direttamente dalle proiezioni dell'equazione di Navier Stokes (per fluido incompressibile)</i>	IX

CAPITOLO 1

Schemi di mezzo continuo

Il Tensore degli Sforzi

Dal Libro: "Meccanica dei Fluidi" di E. Marchi e A. Rubatta.

In questa parte vengono presentati i concetti fondamentali relativi al tensore degli sforzi per fluidi viscosi newtoniani.

1.1 Il tensore degli sforzi

1.1.1 Il tetraedro di Cauchy

Gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ che agiscono sulla superficie A di una massa fluida di massa $m = \rho V$ dipendono anche dalla superficie A attraverso la quale agiscono. Si dimostra cioè che la $\boldsymbol{\tau}$ in un punto e in un istante assegnati assume valori diversi modificando l'orientamento locale della superficie A che passa per il punto in questione. Questo fatto viene ricordato scrivendo: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}; t; \mathbf{n})$, oppure $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$; dove con \mathbf{n} si indica appunto la normale interna, entrante dentro il volume fluido attraverso la superficie A , nel punto considerato. Tenendo conto dell'equazione di continuità e del *teorema del trasporto*, è possibile scrivere l'equazione cardinale della dinamica nella forma:

L'integrale a secondo membro dell'equazione cardinale della dinamica è stato trasformato opportunamente, tenendo conto del teorema del trasporto e dell'equazione di continuità.

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v} dV. \quad (1.1)$$

A questo punto, è interessante applicare l'equazione suddetta ad una particolare porzione di fluido, di forma tetraedrica e di dimensioni infinitesime. Sia dato il versore \mathbf{n} entrante dentro il volume dV attraverso la superficie obliqua A_0 (vedere **Figura 1.1**); mentre \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y ed \mathbf{i}_z sono i versori normali principali degli assi di riferimento x , y e z . Le aree delle tre superfici del tetraedro che giacciono sui piani xy , yz e zx sono rispettivamente: $|n_z|A_0 = -n_z A_0$; $|n_x|A_0 = -n_x A_0$ e $|n_y|A_0 = -n_y A_0$. Applicando la prima equazione cardinale al fluido racchiuso nel tetraedro infinitesimo, e considerando che per un volume infinitesimo tutte le forze di volume sono trascurabili rispetto alle forze di superficie, si scriverà:

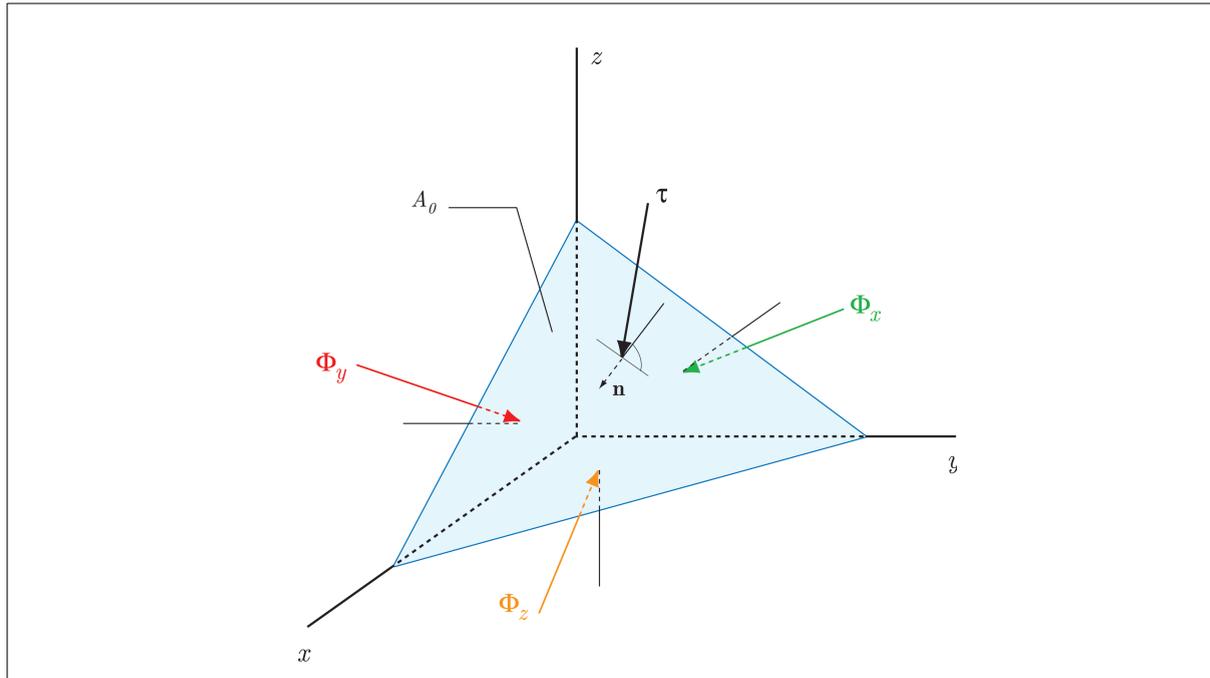


Figura 1.1. Equilibrio delle forze risultanti agenti sulle facce del tetraedro infinitesimo.

$$\lim_{V \rightarrow 0} \int_A \boldsymbol{\tau} dA = A_0 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) - n_x A_0 \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{i}_x) - n_y A_0 \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{i}_y) - n_z A_0 \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{i}_z) = 0; \quad (1.2)$$

Facendo tendere l'elemento di volume fluido a zero si riconosce che le forze di volume $\Phi_i dx dy dz$ sono infinitesimi di ordine superiore rispetto alle forze di superficie $\Phi_i dx dy$. Pertanto, nell'equazione cardinale della dinamica risultano rilevanti solo le forze di superficie.

ovvero:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{A_0} \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) - n_x \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) - n_y \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) - n_z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z) = 0 \quad (1.2_a)$$

avendo indicato formalmente: $\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{\tau}$. A tutto ciò segue l'importantissima relazione vettoriale:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = n_x \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) + n_y \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) + n_z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z). \quad (1.3)$$

Si vede quindi che gli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ relativi a tre facce ortogonali orientate sono sufficienti a descrivere compiutamente lo stato di tensione locale, consentendo il calcolo dello sforzo $\boldsymbol{\tau}$ coordinato a ciascun altro elemento orientato di superficie. L'EQ. (1.3) è la nota formulazione matematica del *teorema di Cauchy*; tale teorema indica che i vettori $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x)$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y)$ e $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z)$ costituiscono le componenti vettoriali di un tensore del secondo ordine dipendente solo dal punto e dall'istante considerati.

Il tensore degli sforzi. È uso rappresentare questo tensore con la scritta:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

e chiamarlo *tensore degli sforzi*. L'espressione vettoriale di $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ risulta dall'equilibrio di tre vettori $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_i)$ che agiscono ciascuno su tre superfici, parallele (o appartenenti) ai piani yz , zx e xy . Ad esempio, il vettore $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x)$ è la forza risultante dovuta ad uno sforzo di pressione e a due sforzi di taglio, agenti sull'elemento di superficie fluida disposta parallelamente (o sul) piano yz . Per mettere in evidenza le componenti scalari T_{ik} di \mathbf{T} basta scrivere le sue componenti vettoriali in funzione delle rispettive componenti scalari:

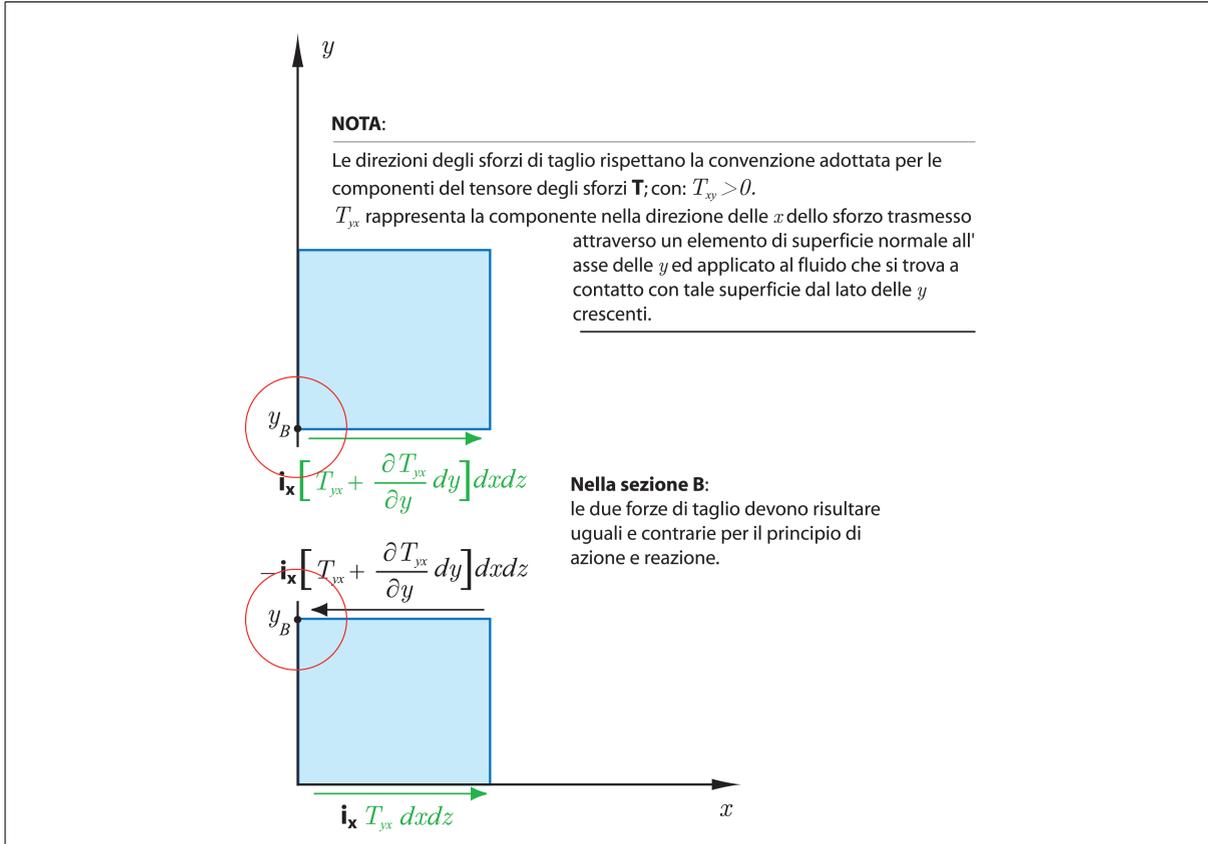


Figura 1.2. Equilibrio degli sforzi di taglio lungo una superficie che divida due porzioni di fluido contigue nel punto y_B . Le relative forze di taglio sono orientate rispettando la convenzione stabilita dalla definizione del tensore degli sforzi.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) &= T_{xx}\mathbf{i}_x + T_{xy}\mathbf{i}_y + T_{xz}\mathbf{i}_z \\
 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) &= T_{yx}\mathbf{i}_x + T_{yy}\mathbf{i}_y + T_{yz}\mathbf{i}_z \\
 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z) &= T_{zx}\mathbf{i}_x + T_{zy}\mathbf{i}_y + T_{zz}\mathbf{i}_z
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$



NOTA. Si deve intendere, ad esempio, che T_{xy} rappresenti la componente nella direzione dell'asse y dello sforzo trasmesso attraverso un elemento di superficie normale all'asse delle x , ed applicato al fluido che si trova a contatto con tale superficie normale all'asse delle x crescenti.

Componenti scalari del tensore degli sforzi. Le componenti scalari T_{ik} di \mathbf{T} vanno riunite nella notazione compatta tensoriale:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} .$$

Le componenti diagonali del tensore degli sforzi, contraddistinte con indici uguali, rappresentano sforzi normali, mentre le altre componenti rappresentano sforzi tangenziali.

Il *teorema di Cauchy* porge la relazione $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = n_x \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x) + n_y \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y) + n_z \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z)$, che sviluppata appare nella forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) &= n_x(T_{xx}\mathbf{i}_x + T_{xy}\mathbf{i}_y + T_{xz}\mathbf{i}_z) + \\ &+ n_y(T_{yx}\mathbf{i}_x + T_{yy}\mathbf{i}_y + T_{yz}\mathbf{i}_z) + \\ &+ n_z(T_{zx}\mathbf{i}_x + T_{zy}\mathbf{i}_y + T_{zz}\mathbf{i}_z)\end{aligned}\quad (1.6)$$

Indicate ora con $\boldsymbol{\tau}_x(\mathbf{n})$, $\boldsymbol{\tau}_y(\mathbf{n})$ e $\boldsymbol{\tau}_z(\mathbf{n})$ le componenti di $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ secondo gli assi coordinati, il teorema di Cauchy porge (vedere **EQ. (1.6)**):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_x(\mathbf{n}) &= n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx} \\ \boldsymbol{\tau}_y(\mathbf{n}) &= n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy} \\ \boldsymbol{\tau}_z(\mathbf{n}) &= n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz}\end{aligned}\quad (1.7)$$

ossia:

$$\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{n}) = \sum_I^3 n_I T_{Ik} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}]_k.$$

Ne segue la scrittura fondamentale:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (1.8)$$

che esprime in forma compatta tensoriale il teorema di Cauchy.

Il modulo del vettore $\boldsymbol{\tau}$, le sue componenti e le sue componenti scalari del tensore \mathbf{T} vanno misurati tutti in *newton* su *metro quadro*, $N m^{-2}$.

Nota sull'equilibrio del tetraedro di Cauchy...

Il tensore degli sforzi è una diretta conseguenza dell'aver imposto l'equilibrio delle forze in una porzione infinitesima di fluido, teoricamente in un punto del fluido. La forza $A_0 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ che agisce sulla superficie

inclinata A_0 del tetraedro è equilibrata dalla risultante delle tre forze agenti sulle rimanenti superfici del tetraedro: $-n_x A_0 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_x)$, $-n_y A_0 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_y)$ e $-n_z A_0 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{i}_z)$. È importante osservare che queste ultime tre forze non sono, in genere, complanari e né tantomeno orientate lungo gli assi coordinati.

1.1.2 La reciprocità dello sforzo di taglio

Sia dato un elemento infinitesimo di volume fluido. Si vogliono calcolare i momenti delle forze che agiscono sull'elemento fluido infinitesimo durante il suo generico moto.

È opportuno osservare che, durante il moto dell'elemento fluido infinitesimo, tutte le forze di volume e le forze inerziali, essendo infinitesimi di ordine superiore alle forze di superficie, risultano trascurabili rispetto alle forze di superficie stesse. Pertanto, potendo trascurare le forze di volume e le forze inerziali, l'equazione dei momenti riguarderà solamente forze di superficie, dovute a sforzi normali e di taglio.

Si consideri, quindi, l'elemento infinitesimo $ABCD$, e si consideri l'equazione dei momenti rispetto all'asse passante per il suo baricentro G ; asse disposto parallelo all'asse coordinato z (vedere **Figura 1.3**). Con tale disposizione, si può subito osservare che le forze dipendenti dagli sforzi di pressione che giacciono su piani paralleli al piano xy hanno momento nullo rispetto all'asse passante per G e perpendicolare al piano xy . Infatti, tali forze presentano retta d'azione passante proprio il baricentro G . Inoltre, tutte le forze applicate sulle due facce parallele al piano xy passano per l'asse passante per G , pertanto presentano braccio delle forze nullo

rispetto a tale asse. Rimangono, quindi, da considerare le sole forze tangenziali che sono schematizzate in **Figura 1.3**.

Nota importante



Definizione di momento di una forza

In queste condizioni – trascurando, in particolare, le forze inerziali – l’equazione dei momenti delle forze agenti durante il moto di un volumetto fluido infinitesimo coincide con un’equazione di equilibrio dei momenti delle sole forze di superficie.

È noto, che il momento m_Ω di una forza f , calcolato rispetto ad un polo Ω , è definito come il *prodotto vettoriale* tra il *raggio vettore* ΩP che unisce il polo Ω con il *punto di applicazione* P della forza e il vettore forza stesso:

$$m = \Omega P \times f.$$

È altrettanto noto che il prodotto vettoriale tra due vettori ΩP e f – per semplicità supposti appartenenti al piano xy – è calcolabile come:

$$\begin{aligned} \Omega P \times f &= (x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + 0\mathbf{i}_z) \times (f_x\mathbf{i}_x + f_y\mathbf{i}_y + 0\mathbf{i}_z) = \\ &= \mathbf{i}_z(xf_y - yf_x). \end{aligned} \tag{I.9}$$

Per il calcolo del vettore momento, i vettori ΩP e f vanno riferiti all’origine del sistema di riferimento degli assi coordinati.

Si è, infatti, considerato il fatto che $\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z$; $\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_x = -\mathbf{i}_z$ e che $\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_x = 0$ e anche $\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_y = 0$.

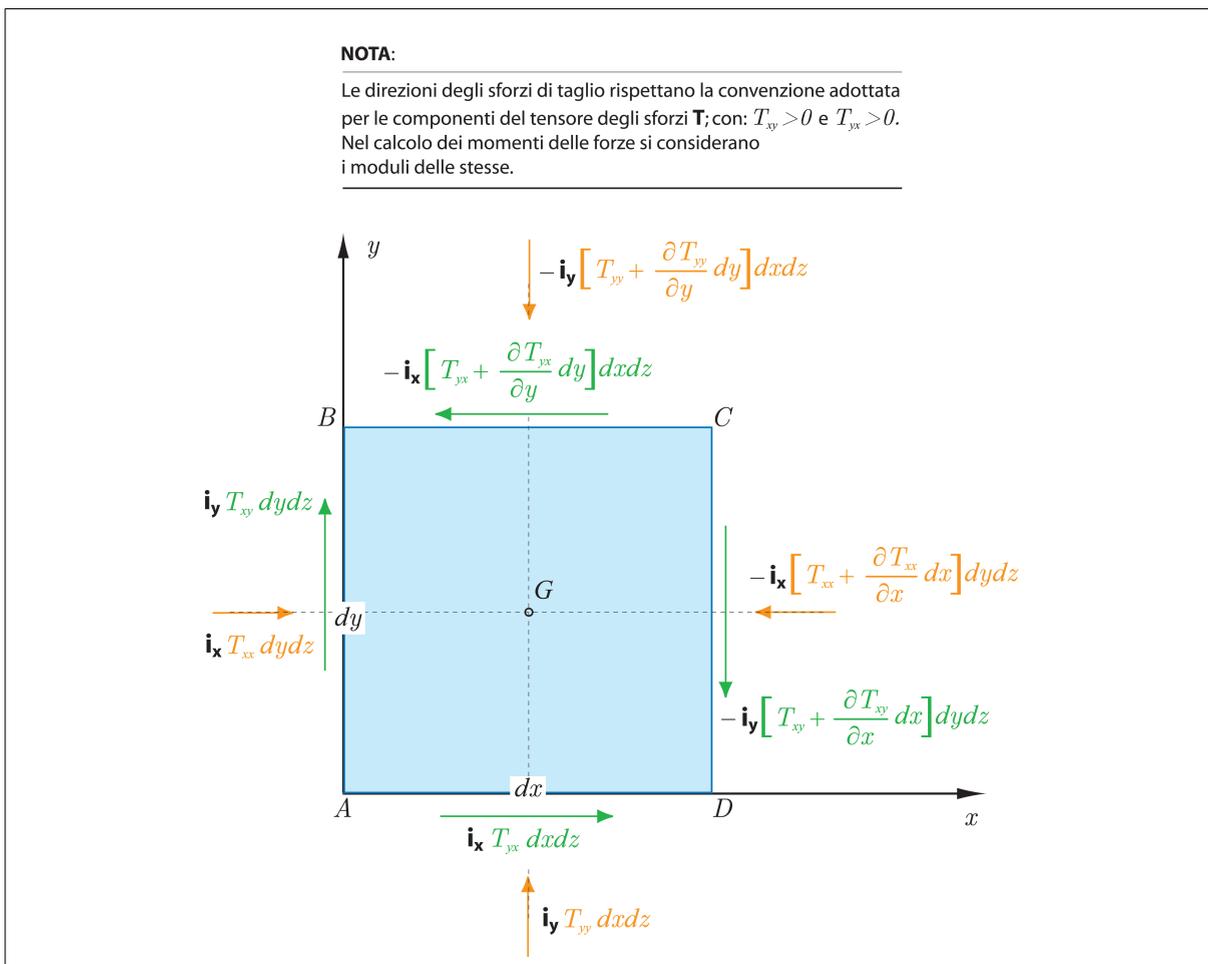


Figura 1.3. Schema delle forze (di superficie) agenti sulle facce di un volumetto fluido infinitesimo $dx dy dz$, raffigurato in pianta. I versi e i segni dati alle forze di superficie rispettano la convenzione adottata nella definizione del tensore degli sforzi.

Ad esempio – facendo riferimento alle forze rappresentate in **Figura 1.3** – si consideri il prodotto vettoriale $\mathbf{m}_G^{(BC)}$ tra la forza tangenziale f_{BC} agente sulla superficie $dx dz$ (avente la traccia BC sul piano xy):

$$\mathbf{f}_{BC} = -\mathbf{i}_x \left[T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \right] dx dz .$$

e il raggio vettore infinitesimo

$$GP = \mathbf{i}_y \frac{dy}{2} ,$$

avente polo $\Omega \equiv G$ che congiunge l'asse passante per G con il punto P di applicazione della suddetta forza (traccia segmento $dy/2$, che congiunge il punto G con il punto medio del segmento BC).



NOTA. Secondo la convenzione sui segni degli sforzi si ha che (vedere **Figura 1.2** a pag. 3):

$$T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy > 0 ;$$

Applicando, dunque, la definizione matematica di prodotto vettoriale tra due forze (fare riferimento all'**EQ. (I.9)**) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_G^{(BC)} &= \mathbf{i}_z \left(0f_y - \frac{dy}{2}f_x \right) = \mathbf{i}_z \left\{ 0 \cdot 0 - \frac{dy}{2} \left(- \left[T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \right] dx dz \right) \right\} = \\ &= \mathbf{i}_z \left[T_{yx} \frac{dy}{2} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \frac{dy}{2} \right] dx dz \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

che, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, diventa:

$$\mathbf{m}_G^{(BC)} = \mathbf{i}_z \left(T_{yx} \frac{dy}{2} dx dz \right) . \quad (\text{I.11})$$

Analogamente, se si volesse calcolare il momento $\mathbf{m}_G^{(AD)}$ della forza agente sulla superficie $dy dz$, avente come traccia il segmento DC sul piano xy , si avrebbe:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_G^{(AD)} &= \mathbf{i}_z \left(\frac{dx}{2} f_y - 0f_x \right) = \mathbf{i}_z \left\{ \frac{dx}{2} \left(- \left[T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx \right] dy dz \right) - 0 \cdot 0 \right\} = \\ &= -\mathbf{i}_z \left[T_{xy} \frac{dx}{2} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx \frac{dx}{2} \right] dy dz \end{aligned}$$

che, sempre trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si riduce all'equazione:

$$\mathbf{m}_G^{(AD)} = -\mathbf{i}_z \left(T_{xy} \frac{dx}{2} dy dz \right) .$$



NOTA. Si poteva calcolare più agevolmente tale prodotto vettoriale rifacendosi ad una procedura più spedita, ovvero moltiplicando tra loro i moduli delle due forze e moltiplicandoli infine per il seno dell'angolo θ che si ottiene sovrapponendo la retta d'azione del raggio vettore con la retta d'azione della forza medesima. Il prodotto vettoriale andrà considerato di modulo positivo se l'angolo θ è antiorario, negativo se orario.

Calcolo dei momenti delle forze agenti. Ciò posto, se si calcolano i momenti delle forze agenti sul volumetto infinitesimo – si ricorda che le forze rilevanti sono solo quelle tangenziali di superficie – si scrive, facendo riferimento alla **Figura 1.3**:

$$m_G^{(BC)} + m_G^{(AD)} + m_G^{(DC)} + m_G^{(AB)} = 0 ; \quad (I.12)$$

dove:

- $m_G^{(BC)}$ è il momento della forza di taglio applicata sulla superficie $dx dz$, avente traccia BC sul piano xy ;
- $m_G^{(AD)}$ è il momento della forza di taglio applicata sulla superficie $dx dz$, avente traccia AD sul piano xy ;
- $m_G^{(DC)}$ è il momento della forza di taglio applicata sulla superficie $dx dz$, avente traccia DC sul piano xy ;
- $m_G^{(AB)}$ è il momento della forza di taglio applicata sulla superficie $dx dz$, avente traccia AB sul piano xy .

Calcolando i prodotti vettoriali si arriva all'equazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_z \left(T_{yx} \frac{dy}{2} dx dz \right) + \mathbf{i}_z \left(T_{yx} \frac{dy}{2} dx dz \right) - \mathbf{i}_z \left(T_{xy} \frac{dx}{2} dy dz \right) - \\ - \mathbf{i}_z \left(T_{xy} \frac{dx}{2} dy dz \right) = 0 . \end{aligned} \quad (I.13)$$

Tale equazione se sviluppata e semplificata porta all'importantissima relazione: $T_{xy} = T_{yx}$. Tale relazione, calcolata facendo riferimento al particolare piano xy , può essere applicata considerando una volta il piano xz e una volta il piano yz . In questo modo si può controllare che, globalmente, esistono sempre le seguenti relazioni in un arbitrario punto del fluido in moto:

$$\begin{aligned} T_{xy} &= T_{yx} \\ T_{xz} &= T_{zx} \\ T_{yz} &= T_{zy} \end{aligned} \quad (I.14)$$

Quest'ultime tre relazioni testimoniano la caratteristica nota del taglio, detta appunto *reciprocità del taglio*.

1.1.3 Il teorema di Cauchy per i fluidi in quiete

L'assenza di velocità ha conseguenze incisive sull'assetto degli sforzi interni. L'indagine sperimentale ha permesso infatti di accertare che in seno ad un fluido in condizioni di quiete non si presentano sforzi tangenziali. Pertanto, avendo posto nulli tutti gli sforzi tangenziali, il teorema di Cauchy fornisce la seguente particolare relazione:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = T_{nn} \mathbf{n} = T_{nn}(n_x \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + n_z \mathbf{i}_z)} = T_{xx} n_x \mathbf{i}_x + T_{yy} n_y \mathbf{i}_y + T_{zz} n_z \mathbf{i}_z ; \quad (I.15)$$

dove lo sforzo $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ è uno di pressione di modulo T_{nn} e direzione lungo il versore \mathbf{n} :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = T_{nn} \mathbf{n} .$$

La relazione

$$T_{nn}(n_x \mathbf{i}_x + n_y \mathbf{i}_y + n_z \mathbf{i}_z) = T_{xx} n_x \mathbf{i}_x + T_{yy} n_y \mathbf{i}_y + T_{zz} n_z \mathbf{i}_z \quad (I.16)$$

può essere soddisfatta solo se gli sforzi normali assumono tutti lo stesso valore, indipendentemente dalla direzione \mathbf{n} lungo la quale agiscono. Infatti i due vettori a I° e II° membro dell'EQ. (1.16) sono uguali se e solo se sono uguali le relative componenti omologhe, ovvero:

$$\begin{aligned} T_{nn}n_x &= T_{xx}n_x \\ T_{nn}n_y &= T_{yy}n_y \\ T_{nn}n_z &= T_{zz}n_z \end{aligned} \quad (1.17)$$

che è come dire:

$$T_{nn} = T_{xx} = T_{yy} = T_{zz}$$

È evidente, a questo punto, che il valore di T_{nn} deve coincidere, nel caso appunto di fluido in quiete, al valore locale ed istantaneo della pressione p del fluido. Il tensore degli sforzi in seno ad un fluido in quiete assume dunque la forma isotropa:

$$\mathbf{T} = p\mathbf{I}, \quad (1.18)$$

in cui il tensore \mathbf{T} degli sforzi nel punto \mathbf{x} e all'istante di tempo t è calcolabile come prodotto del valore di p (nel punto $(\mathbf{x};t)$ al tempo t) con il tensore unità:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, in virtù del teorema di Cauchy, lo sforzo $\boldsymbol{\tau}$ ammette l'espressione:

$$\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{n}. \quad (1.19)$$



NOTA. In particolare, applicando l'operatore *divergenza* al tensore degli sforzi nella forma $\mathbf{T} = p\mathbf{I}$, si ottiene: $div\mathbf{T} = grad p$.

CAPITOLO 2



Equazioni della Termodinamica

Fluidi viscosi newtoniani.

Dal libro: "Meccanica dei Fluidi" di E. Marchi e A. Rubatta. (Cap. IV).

In questa parte si vuole fissare l'attenzione sul significato energetico di alcuni integrali particolari che compaiono nell'equazione globale dell'energia.

2.1 Le equazioni fondamentali per i fluidi viscosi

2.1.1 I° Principio della Termodinamica

Quando le variabili che figurano nelle forme cardinali dei due principi della Termodinamica soddisfano adeguate condizioni di continuità, risulta possibile dedurre da tali espressioni integrali altrettante forme indefinite. Se si indica con ρ la densità, con u l'energia interna specifica, con \dot{w} la potenza termica (somministrata reversibilmente dall'esterno attraverso l'unità di area di volume fluido); con \mathbf{v} la velocità, e con $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ gli sforzi di superficie di classe C^1 , il primo principio della Termodinamica si esprime:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA + \int_A \dot{w} dA, \quad (\text{II.1})$$

che può essere scritto nella forma:

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} (u + \frac{1}{2} v^2) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_V \sum_{I,k}^3 \frac{\partial (v_k T_{ik})}{\partial x_i} dV + \int_A \dot{w} dA \quad (\text{II.1}_a)$$

avendo impiegato il teorema del trasporto e l'equazione di continuità. Un'ulteriore semplificazione può essere data all'integrale di volume, a secondo membro della precedente equazione, in cui compare il simbolo di sommatoria. Infatti, si dimostra che vale la seguente relazione:^(2.1)

$$\sum_{l,k}^3 \frac{\partial(v_k T_{lk})}{\partial x_l} = \sum_{l,k}^3 T_{lk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} . \quad (II.2)$$

Nota importante



Inoltre, poiché il tensore \mathbf{T} è simmetrico (vedere la *reciprocità del taglio*) ed il tensore delle rotazioni rigide $\mathbf{\Omega}$ è emisimmetrico, esistono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{l,k}^3 T_{lk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} &= \sum_{l,k}^3 T_{lk} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \right] = \\ &= \sum_{l,k}^3 T_{lk} (D_{lk} + \Omega_{lk}) = \sum_{l,k}^3 T_{lk} D_{lk} = \mathbf{T} : \mathbf{D} . \end{aligned} \quad (II.3)$$



NOTA. Da questa ultima equazione è possibile notare un particolare che si potrà constatare più in là per altra via (vedere pag. 13, (EQ. II.11)); ovvero, risultando in un medesimo arbitrario punto x_0 :

$$T_{lk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = T_{lk} D_{lk} = T_{lk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)$$

si deduce che deve essere verificata la seguente relazione (ovviamente tutte le grandezze in questione fanno riferimento al medesimo punto x_0 , e pertanto vanno calcolate nel punto stesso):

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right),$$

che semplificata porta a concludere che localmente nel punto arbitrario x_0 deve valere la relazione:

$$2 \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k},$$

Reciprocità (locale) delle deformazioni angolari

ovvero, semplificando:

$$\left. \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right|_{x_0} \quad (II.4)$$

È interessante notare che il doppio prodotto scalare tra il tensore degli sforzi T_{lk} e il tensore delle velocità di rotazione rigida Ω_{lk} dà sempre valore nullo. Pertanto, le dissipazioni non dipendono da moti di rotazione rigida della massa fluida, ma (come si vedrà più avanti) solamente dalle deformazioni.

Potenza meccanica di superficie. In definitiva, l'integrale che misura la potenza meccanica trasmessa dagli sforzi di superficie può essere scisso in due contributi:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA &= - \int_V \sum_{l,k}^3 \frac{\partial(v_k T_{lk})}{\partial x_l} dV = \\ &= - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} dV . \end{aligned} \quad (II.5)$$

Si dimostrerà in seguito che l'integrale di volume dipendente dal *doppio prodotto scalare* $\mathbf{T} : \mathbf{D}$ rappresenta tutte le dissipazioni di energia meccanica per deformazioni isocore all'interno della massa fluida (distorsioni a volume costante) e per dilatazioni/contrazioni del volume fluido. Mentre, l'integrale di volume dipendente dal prodotto scalare della velocità \mathbf{v} con la divergenza del tensore degli sforzi \mathbf{T} rappresenta quella particolare frazione di potenza meccanica di superficie che effettiva-

(2.1) Vedere a tal proposito il testo: "Meccanica dei Fluidi" a pag. 82.

mente incrementa, nell'unità di tempo, la sola energia cinetica della massa fluida. Quest'ultima affermazione è possibile confermarla immediatamente. Basta, infatti, ricordare la *prima equazione indefinita del moto*:

$$\rho \mathbf{f} - \text{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

e il relativo teorema dell'energia cinetica (computato in termini di potenze):

$$\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} v^2 \right\}.$$

Si riconosce che il termine $\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}$ incrementa l'energia cinetica $\rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} v^2 \right\}$ del fluido.

In altri termini, il bilancio della sola energia cinetica nell'unità di tempo si scrive:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \left\{ \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \left(- \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \right) \right\}} \quad (11.6)$$

2.1.2 Interpretazione energetica dell'integrale degli sforzi di superficie nell'equazione del I° Principio della Termodinamica

Si è visto che è possibile, tramite opportuni calcoli matematici, scindere la potenza meccanica di superficie in due differenti contributi:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} dV. \quad (11.7)$$

Si consideri l'integrale di volume dipendente dal doppio prodotto scalare $\mathbf{T} : \mathbf{D}$. Si può dimostrare che tale integrale è l'effetto di tutte le dissipazioni di potenza meccanica di superficie che accadono all'interno del volume fluido ad opera della viscosità, e dal fatto che il fluido vari il suo volume durante il moto.

Calcolo delle potenze di deformazione. Come esempio, si consideri un elemento fluido infinitesimo (**Figura 2.1**) sottoposto a degli sforzi di taglio e degli sforzi normali. Si vogliono calcolare, in particolare, i lavori di deformazione che, nell'unità di tempo, gli sforzi di taglio esercitano sul volumetto fluido in questione. A tal proposito si immagini un generico cinematismo di deformazione, in cui le varie deformazioni vengono riferite ad un sistema di assi coordinati xyz .

Si depuri dal cinematismo la componente di traslazione e rotazione rigida. Volendo calcolare, per ora, i lavori delle sole forze di taglio nell'unità di tempo in cui si suppone si svolga la deformazione, si deve scrivere:

$$\begin{aligned} & - (T_{xy} dy dz) \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) - (T_{yx} dx dz) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) + \\ & + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) \left\{ - \left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \right\} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) \left\{ - \left(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \right\}. \end{aligned}$$

Potenza di deformazione

A questo punto, trascurando ancora gli infinitesimi di ordine superiore, si calcola la potenza di deformazione per l'elemento fluido infinitesimo:

$$d\mathcal{P}_{def}^{(sup)} = -T_{yx} dx dz \frac{\partial v_x}{\partial y} dy - T_{xy} dy dz \frac{\partial v_y}{\partial x} dx. \quad (II.8)$$

Ovvero, considerando che $dV = dx dy dz$ e riordinando opportunamente, si ha:

$$d\mathcal{P}_{def}^{(sup)} = \left(-T_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} - T_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dV. \quad (II.8_a)$$

Nota importante



A questo punto conviene fare un'importante osservazione: durante la deformazione del volumetto fluido si può osservare (vedere il particolare cinematismo ipotizzato in **Figura 2.1**) che la variazione angolare (in questo caso positiva) dell'angolo $B\hat{A}D$ inizialmente retto in A (durante l'unità di tempo) è proprio data dalla somma delle ampiezze (di conseguenza positive) degli angoli $B'\hat{A}B$ e $D'\hat{A}D$. Risulta, infatti:

$$B'\hat{A}B \cong -\frac{\partial v_x}{\partial y} dy = -\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$$

$$D'\hat{A}D \cong -\frac{\partial v_y}{\partial x} dx = -\frac{\partial v_y}{\partial x} > 0$$

NB:

Gli spostamenti nell'unità di tempo dv_x e dv_y sono negativi, come ipotizzato nel cinematismo di deformazione. Pertanto, per il computo delle ampiezze angolari (positive) si dovranno considerare esplicitati i segni "meno".

NOTA:

Le direzioni degli sforzi di taglio rispettano la convenzione adottata per le componenti del tensore degli sforzi \mathbf{T} ; con: $T_{xy} > 0$ e $T_{yx} > 0$.
 Le componenti della velocità e le relative derivate parziali sono grandezze già intrinsecamente dotate di segno.

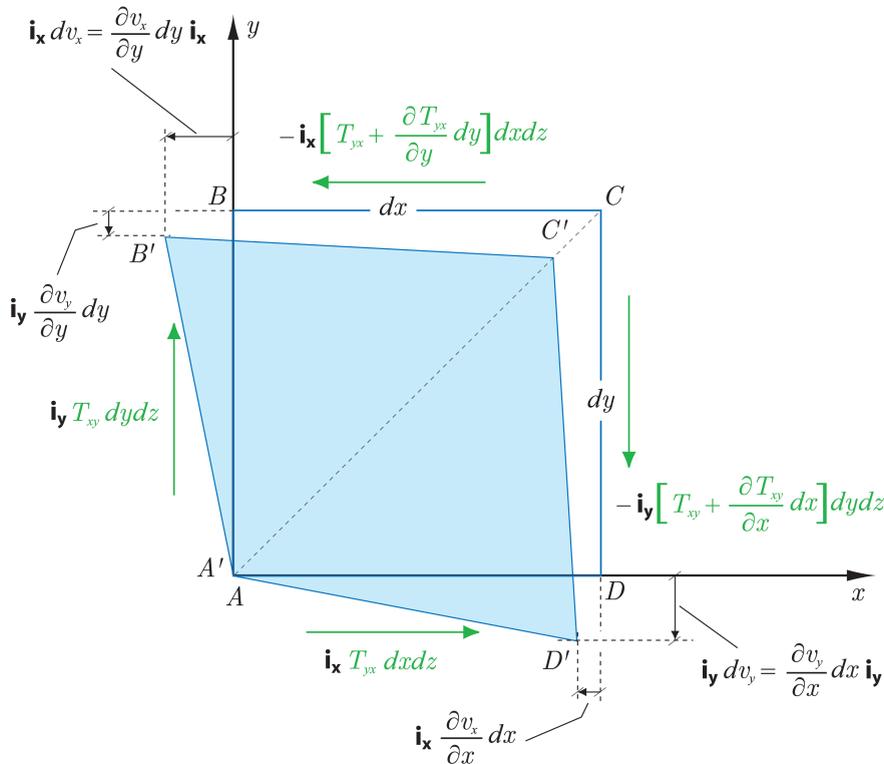


Figura 2.1. Esempio di cinematismo (nell'unità di tempo) di deformazione generale di un elemento fluido infinitesimo di volume $dV = dx dy dz$, durante il moto. Facendo tendere il volume infinitesimo a zero, il cinematismo rappresentato in figura mostra ciò che accade, localmente, in un punto di un fluido viscoso (ci si riferisce, in particolare, al punto A , origine degli assi). (Non si sono mostrati gli sforzi normali agenti).

Pertanto la deformazione angolare nell'unità di tempo $d\gamma_{xy}/dt$ risulta pari a:

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = (D' \hat{A} D + B' \hat{A} B) = - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) > 0 \quad (II.9)$$

Essendo, inoltre, dalla definizione del tensore \mathbf{D} delle deformazioni la relazione:

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right),$$

ed essendo il tensore D_{ik} simmetrico, si ha che risulta, in particolare:

$$D_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = D_{yx}.$$

Per cui, si può scrivere, relativamente alle deformazioni del piano xy :

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = -2D_{xy} = -2D_{yx}. \quad (II.10)$$

NOTA. In virtù della validità della reciprocità del taglio $T_{xy} = T_{yx}$ (ovvero esiste, localmente, l'uguaglianza dei tagli) e poiché gli sforzi sono proporzionali alle velocità di deformazione ($T_{xy} \propto D_{xy}$ e $T_{yx} \propto D_{yx}$), si può con certezza dedurre che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, le variazioni angolari di deformazione ($D' \hat{A} D + B' \hat{A} B$) – che gli sforzi di taglio hanno indotto sugli angoli inizialmente retti del volumetto fluido – devono essere uguali:^(2.2)

$$D' \hat{A} D = - \frac{\partial v_y}{\partial x} = - \frac{\partial v_x}{\partial y} = B' \hat{A} B > 0 \quad (II.11)$$

perché sono uguali T_{xy} e T_{yx} . Quindi, relativamente al cinematismo ipotizzato sul piano xy , si può imporre che esistano, contemporaneamente alla relazione dell'EQ. (II.10), le ulteriori relazioni:

$$\begin{aligned} -D_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = - \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ -D_{yx} &= \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (II.12)$$

ovvero, in un medesimo punto del fluido:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= D_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= D_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned}$$

Nota importante



Infatti, come conseguenza di quanto detto sopra relativamente alla reciprocità del taglio e della proporzionalità degli sforzi di taglio con le velocità di deformazione, si deve avere (per l'ipotizzato cinematismo di deformazione con $T_{xy} = T_{yx}$):

$$- \frac{\partial v_y}{\partial x} = - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{xy}}{dt},$$

e quindi, la nota espressione della velocità di deformazione angolare:

(2.2) Vedere, inoltre, quanto osservato a proposito dell'equazione (II.4).

NB:
Relativamente al particolare cinematismo di deformazione adottato, rispetto alla terna cartesiana, si può notare che i termini $\partial v_y/\partial x$ e $\partial v_x/\partial y$ risultano di segno (intrinseco) negativo. Pertanto, l'ampiezza (appunto positiva) delle relative deformazioni angolari vanno considerate col segno "meno", per avere ampiezze angolari positive.

$$\boxed{-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{d\gamma_{xy}}{dt}}$$

Si è dimostrato precedentemente che in un punto del fluido vale sempre la relazione di simmetria delle deformazioni angolari; come anche la condizione di reciprocità dei tagli. (Vedere pag. 10, (EQ. II.4)).

Allora, in virtù delle relazioni espresse nell'EQ. (II.12), si può esprimere l'espressione della potenza di deformazione degli sforzi di taglio (nell'EQ. (II.8_a) a pag. 12) in questa forma:

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_{def}^{(sup)} &= \left(-T_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} - T_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dV = \\ &= (-T_{xy} D_{xy} - T_{yx} D_{xy}) dV. \end{aligned}$$

Con analogo ragionamento i lavori di deformazione (di volume) causati dalle forze di pressione agenti sull'elementino si calcoleranno come:

$$-(T_{xx} D_{xx} + T_{yy} D_{yy} + T_{zz} D_{zz}) dV.$$

Pertanto, il lavoro globale di deformazione, calcolato tenendo conto di tutti gli sforzi agenti, e quindi considerando anche le variazioni di volume indotte dall'esistenza di sforzi normali, avrà la forma:

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_{def}^{(sup)} &= -(T_{xx} D_{xx} + T_{yy} D_{yy} + T_{zz} D_{zz}) dV + \\ &+ (T_{xy} D_{xy} + T_{yx} D_{xy} + \dots) dV; \end{aligned} \quad (II.13)$$

ovvero, sfruttando la definizione di *doppio prodotto scalare* tra due tensori **T** e **D**:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{D} &= \sum_{i,k}^3 T_{ik} D_{ik} = T_{xx} D_{xx} + T_{xy} D_{xy} + T_{xz} D_{xz} + \\ &+ T_{yx} D_{yx} + T_{yy} D_{yy} + T_{yz} D_{yz} \\ &+ T_{zx} D_{zx} + T_{zy} D_{zy} + T_{zz} D_{zz} \end{aligned}$$

si può affermare che la potenza di deformazione degli sforzi di superficie è stimabile come:

$$d\mathcal{P}_{def}^{(sup)} = -\mathbf{T} : \mathbf{D} dV. \quad (II.14)$$

Estendendo a tutto il volume, si ha la quota parte di potenza meccanica di superficie che viene dissipata a causa delle deformazioni interne alla massa fluida finita di volume V :

$$\mathcal{P}_{def}^{(sup)} = - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV. \quad (II.15)$$

Calcolo della potenza meccanica utile. In base al teorema dell'energia cinetica, computato in termini di potenze:

$$\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} v^2 \right\}.$$

si evince che il termine $-\mathbf{v} \cdot \text{div}\mathbf{T}$ è legato alla potenza meccanica di superficie che incrementa la sola energia cinetica della massa fluida. A questo punto, è utile fare un'osservazione importante: la potenza meccanica totale di superficie che gli sforzi esterni applicano sulla superficie della massa fluida V di cui si studia il moto è esprimibile come somma di due integrali:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \left[- \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div}\mathbf{T} dV \right], ,$$

dove si è dimostrato che il primo integrale a secondo membro esprime la potenza dissipata in calore, causa le deformazioni per viscosità della massa fluida. Pertanto, l'altro integrale a secondo membro, andando ad incrementare l'energia cinetica e non essendo interessato da deformazioni fluide, dovrà riguardare la particolare componente di moto di un elementino fluido in cui non è associato alcun cinematismo di deformazione (componente di moto di sola traslazione). Infatti, poiché l'integrale

$$- \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div}\mathbf{T} dV$$

dipende dal vettore velocità \mathbf{v} , converrà schematizzare un generico cinematismo di sola traslazione per una massetta fluida infinitesima $dV = dx dy dz$ in un piano (per esempio il piano xy). Quindi, si può affermare che l'integrale

Nota importante



$$- \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV$$

è associato alla sola componente distorsiva del moto (distorsioni a volume costante ed, eventualmente, dilatazioni/contrazioni del volume fluido), mentre l'integrale:

$$- \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div}\mathbf{T} dV$$

risulta associato alla sola componente traslazionale del moto. Pertanto, se si considera un elemento fluido di dimensioni infinitesime, e si computano solo i lavori che attuano la sola variazione dell'energia cinetica (no lavori di deformazione dell'elemento), si analizzerebbe di fatto il movimento dell'elementino fluido a prescindere dalle deformazioni della sua forma; per cui il suo moto è individuabile dall'esame del moto di uno solo dei suoi punti. A tale proposito, si scelga, viste le dimensioni infinitesime dell'elementino, il suo baricentro G come punto cui associare il vettore velocità \mathbf{v} dell'elementino stesso, quindi del fluido.

Dall'analisi della **Figura 2.2** si è schematizzata la sola componente traslazionale del moto della generica particella fluida. Si è scomposto vettorialmente lo spostamento, nell'unità di tempo, del baricentro G dell'elementino fluido, pensato come corpo rigido: appunto, no deformazioni. Pertanto, in virtù della nota definizione di potenza di una forza (caso semplice di forze e moti piani sul piano xy):

$$\frac{dL}{dt} = P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y,$$

si valutino i lavori delle forze rappresentate in figura, in cui per ora, solo per semplicità di trattazione e di scrittura, si prescinde dagli sforzi di pressione. I lavori nell'unità di tempo delle forze tangenziali considerate sono:

- relativamente allo sforzo sulla superficie $dydz$ di traccia CD sul piano considerato xy :

·
·

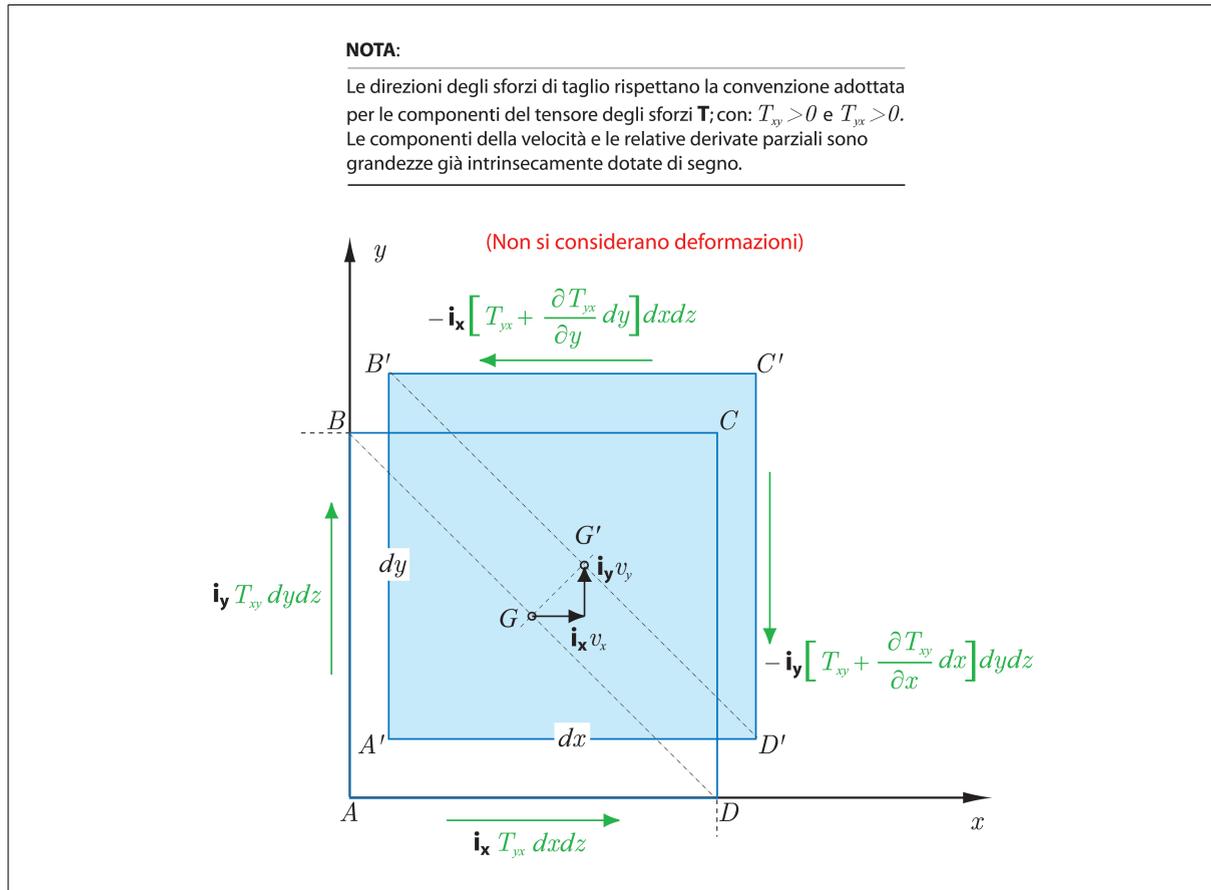


Figura 2.2. Schematizzazione di cinematico di pura traslazione (nessun cinematico di deformazione preso in considerazione) per un elemento fluido infinitesimo. Si prescinde, per il momento, dagli sforzi normali.

$$d\mathcal{P}_{CD} = - \left(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz v_y ;$$

- relativamente allo sforzo sulla superficie $dx dz$ di traccia CB sul piano considerato xy :

$$d\mathcal{P}_{CB} = - \left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz v_x ;$$

- relativamente allo sforzo sulla superficie $dy dz$ di traccia BA sul piano considerato xy :

$$d\mathcal{P}_{BA} = T_{xy} dy dz v_y ;$$

- relativamente allo sforzo sulla superficie $dx dz$ di traccia AD sul piano considerato xy :

$$d\mathcal{P}_{AD} = T_{yx} dx dz v_x .$$

Volendo valutare la potenza (infinitesima) totale esplicitata sul singolo elementino fluido (mantenuto indeformato), si ha:

$$d\mathcal{P}^{(cin)} = \sum_i d\mathcal{P}_i = d\mathcal{P}_{CD} + d\mathcal{P}_{CB} + d\mathcal{P}_{BA} + d\mathcal{P}_{AD} ; \quad (II.16)$$

che, riordinando ed eliminando i termini uguali ed opposti, risulta uguale a:

$$d\mathcal{P}^{(cin)} = -v_x \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dx dy dz - v_y \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx dy dz. \quad (II.17)$$

A questo punto, se si ricorda la definizione del vettore $div\mathbf{T}$, nel caso del solo piano xy , e prescindendo ancora dagli sforzi normali ($T_{xx} = T_{yy} = 0$), si ha:

$$div\mathbf{T} = \mathbf{i}_x \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \mathbf{i}_y \frac{\partial T_{xy}}{\partial x};$$

si può scrivere, tenendo conto che $\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y$, la seguente relazione:

$$d\mathcal{P}^{(cin)} = -v_x \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dV - v_y \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dV = -\mathbf{v} \cdot div\mathbf{T} dV. \quad (II.17_a)$$

Pertanto, integrando sull'intero volume fluido V , si può scrivere:

$$\mathcal{P}^{(cin)} = - \int_V \mathbf{v} \cdot div\mathbf{T} dV; \quad (II.18)$$

che rappresenta il lavoro fatto nell'unità di tempo dalle forze di superficie sulla componente di sola traslazione del moto del volume fluido, prescindendo quindi dalle deformazioni. L'EQ. (II.18), ricavata nel caso particolare di cinematico piano e prescindendo dall'azione degli sforzi normali, ha invece validità del tutto generale. Si può infatti dimostrare che tale integrale rappresenta la frazione (netta, effettiva) di potenza meccanica – esplicitata sul fluido da tutte le forze di superficie su di esso agenti sul suo contorno – responsabile dell'incremento della sola energia cinetica.

Nota importante



CAPITOLO 3



Considerazioni sull'equazione di Navier Stokes

**Il tensore degli sforzi. Considerazione geometriche
sui cinematismi di deformazione.**

**Consultati i testi: “Meccanica dei Fluidi
(Marchi & Rubatta); “Idraulica (Citrini &
Noseda).**

Ciò che viene qui riportato è una riflessione sui concetti fondamentali che hanno portato alla formulazione e alla costruzione dell'equazione di Navier Stokes per i fluidi. Si focalizzerà l'attenzione sul concetto di sforzo di taglio e sul concetto di viscosità e sulle relazioni geometriche esistenti nelle schematizzazioni delle deformazioni.

3.1 Il tensore degli sforzi nei fluidi viscosi

Lo stato di sforzo di un fluido può pensarsi, sostanzialmente, come il risultato della sovrapposizione di due distinti contributi: uno dovuto alla componente idrostatica – costituita, quindi, dalla sola pressione (*sforzo puramente normale*) – la rimanente causata dall'azione della viscosità, la quale si estrinseca solo durante i movimenti reciproci dei singoli elementi fluidi.

Il primo contributo caratterizza perfettamente il fluido cosiddetto *perfetto*, in quanto, come tale, non presenta sforzi di taglio ma solo componenti di forze normali in ogni punto alla pellicola che riveste qualsiasi elemento fluido cui può pensarsi “smembrata” l'intera massa finita fluida. Ciò posto, possiamo pensare di scomporre il tensore degli sforzi nella somma di una parte che potremmo definire, appunto, idrostatica e di una parte che trae origine dal solo movimento degli elementi fluidi e che chiameremo deviatore degli sforzi. Concettualmente, quindi, è possibile esprimere il tensore degli sforzi come la somma di due tensori: un tensore idrostatico (sola componente idrostatica: tensore diagonale) e un tensore legato alla viscosità del fluido.

Il tensore degli sforzi può scomporsi in una parte idrostatica pura e in una parte di pura deformazione cinematica.

Il tensore degli sforzi risulta legato direttamente allo stato di deformazione locale del fluido e alla velocità di deformazione locale in atto. In sintesi si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{xx}-p & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy}-p & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{yy}-p \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Si può osservare che, quando il fluido raggiunge la quiete, il secondo termine a secondo membro si annulla, rimanendo il solo primo tensore a testimoniare l'esistenza dell'equilibrio idrostatico: fluido fermo!

Prima di procedere oltre, si ponga l'attenzione sul parametro viscosità. È noto che la viscosità agisce solo quando è presente un movimento in seno al fluido tra gli elementi che lo compongono. È noto, altresì, che il movimento generico di una singola particella fluida elementare può scomporsi, in ogni istante del suo moto, in tre differenti tipi di movimento:

1. rotazione rigida (particella che ruota come un tutt'uno rigido: nessuna variazione di volume, nessuna variazione di forma);
2. distorsione isotropa: deformazione *anisocora*. Particella che senza ruotare, si dilata o si contrae in maniera omogenea lungo ogni direzione: la particella, in sostanza, senza ruotare conserva inalterata la sua forma ma non il suo volume;
3. deformazione a volume costante (*isocora*): la particella fluida nel suo moto cambia forma ma mantiene inalterato il suo volume.

Il moto di un elemento fluido è la sovrapposizione di un cinematismo anisocoro, isocoro, rigido rotatorio e puramente distorsivo.

Tutti assieme, e contemporaneamente sovrapposti in ogni istante, questi tipi di movimento contribuiscono a determinare la componente totale del movimento della singola particella fluida nel suo qualsivoglia moto.

Si può, dunque, pensare il movimento della singola particella come composto da una componente di movimento in cui varia solo il volume (*cinematismo anisocoro*) e una componente di movimento in cui non varia il volume (*cinematismo isocoro*). Analogamente, il moto si può pensare anche come composto da una componente irrotazionale (*traslazione e distorsione pura* dell'elemento fluido) e da una componente rotazionale (*rotazione rigida dell'elemento fluido*).

Volendo esprimere la funzione velocità con cui si svolge il moto, presente istante per istante nell'intorno del punto del campo \mathbf{x}_0 , si scrive come noto:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}_0) \quad (\text{III.2})$$

dove i simboli in neretto, presenti nello sviluppo in serie del I° ordine, significano:

- $\boldsymbol{\Omega}$ è il tensore delle velocità di rotazione rigida (calcolato nel punto \mathbf{x}_0);
- \mathbf{L} è la componente isotropa del tensore delle velocità di deformazione (calcolata nel punto \mathbf{x}_0);
- \mathbf{S} è la componente residua, detta tensore delle velocità di distorsione (calcolata nel punto \mathbf{x}_0).

La viscosità per taglio. Come noto, la viscosità μ agisce tramite sforzi tangenziali in seno al fluido. La legge che caratterizza il legame locale tra parametro viscosità e sforzi tangenziali è l'equazione di Newton; in cui, sostanzialmente, si afferma che dove ci sono i maggiori gradienti di velocità (quindi, in sostanza, dove sono presenti le più intense deformazioni) lì ci sono i più intensi sforzi di taglio. Lo sforzo di taglio puro risulta legato ad una *velocità di deformazione* angolare dell'elemento fluido (EQ. (III.3)).

Viscosità per variazione del volume. In maniera del tutto analoga si può definire ed introdurre una viscosità μ' , legata all'entità degli sforzi conseguenti ai soli moti

di contrazione o dilatazione del volume (quindi, più genericamente, un parametro legato alla velocità di variazione del volume dell'elemento fluido). Infatti, come la viscosità μ è legata alla velocità di deformazione angolare $d\gamma_{kj}/dt$ (nel piano cartesiano $x_k; x_j$) dell'elemento fluido, tramite appunto la legge di Newton, per cui risulta:

$$T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right); \quad (III.3)$$

così, analogamente, si può legare il parametro μ' alla *velocità di dilatazione* (o *contrazione*) per unità di volume ($div\mathbf{v}$) della particella di fluido elementare tramite l'introduzione di uno sforzo, in virtù del quale risulti^(3.1):

$$\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} = -\mu' \left[\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \right] = -\mu' div\mathbf{v}. \quad (III.4)$$

Si introduce una legge analoga a quella di Newton.

Si hanno, cioè, particolari sforzi $\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}$ legati ad aumenti di pressione che risultano direttamente proporzionali alla velocità con la quale ha luogo la riduzione percentuale del volume fluido V . Nel caso particolare di una contrazione ($div < 0$) consegue un incremento di pressione:

$$\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} = -\mu' \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}.$$

NOTA:
Quando si parla di sforzi normali, qui si intende solo le pressioni che sono causa di deformazioni di volume. Nel tensore deviatore degli sforzi, infatti, le pressioni idrostatiche non sono considerate.

Condizioni di equilibrio di un elemento infinitesimo di fluido. Si consideri ora, nel piano di **Figura 3.2** a pag. 23, il quadrilatero infinitesimo $ABCD$, e proponiamoci di riconoscere quale sia l'entità (all'istante t) dello sforzo normale $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$ agente al suo interno (distribuito su BD) e che trae origine dalla presenza degli sforzi esterni agenti sull'elementino fluido e, conseguentemente, da eventuali variazioni del suo volume (contrazioni/dilatazioni). Si può subito osservare che l'entità dello sforzo normale ($T_{\hat{k}\hat{k}} - p$) – nell'ipotesi di moto di deformazione caratterizzato anche da una contrazione dell'elemento fluido – deve in parte comprendere la reazione globale degli sforzi interni all'elemento ($-\mu' div\mathbf{v} > 0$) (che reagiscono alla contrazione dell'elementino fluido ad opera dei corrispondenti sforzi normali agenti sul restante contorno esterno) e contemporaneamente bilanciare l'azione dei rimanenti sforzi di taglio che si estrinsecano sempre sul contorno esterno dell'elementino fluido. Per valutare il legame esistente tra gli sforzi di taglio e lo sforzo $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$, conviene prima depurare quest'ultimo dall'incremento di pressione derivato dalla contrazione del volume dell'elementino ABD ad opera della risultante degli sforzi esterni normali. Quindi, considerare quella rimanente parte dello sforzo normale, distribuito su BD , estrinsecata per bilanciare l'effetto dei soli sforzi di puro taglio T_{kj} . In questo modo, la reale deformazione *anisocora* può venire studiata, matematicamente, come una deformazione puramente *isocora*. Ovvero, introducendo lo sforzo normale equivalente “depurato” dalla componente anisocora del moto:

$$[(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}]. \quad (III.5)$$

È importante puntualizzare che l'entità dello sforzo normale (**EQ. (III.5)**), agente lungo la direzione $\hat{k}\hat{k}$ (**Figura 3.5**), è da considerarsi, dal punto di vista dinamico, nel caso generale di $\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} \neq 0$ (ovvero $div\mathbf{v} \neq 0$). Dal punto di vista matematico, lo sforzo nell'**EQ. (III.5)** viene qui ipotizzato come la frazione dello sforzo normale $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$, lungo la direzione $\hat{k}\hat{k}$, a cui compete la componente isocora del moto ($div\mathbf{v} = 0$; in virtù della scomposizione della velocità nell'equazione **EQ. (III.2)**).

Il termine legato alle contrazioni o dilatazioni del volume rappresenta l'effetto delle reazioni degli sforzi interni al volume fluido, conseguenti a quegli sforzi di pressione che agiscono, invece, esternamente sulla superficie, e sono responsabili delle contrazioni/dilatazioni del volume. L'entità della risultante di queste pressioni esterne risulta proporzionale alla velocità di variazione dell'unità di volume della massa fluida.

Dal punto di vista degli equilibri delle forze esterne all'elemento fluido in un cinematismo di deformazione isocora, quindi, hanno rilevanza e vanno considerate solo quelle forze che non inducono variazioni del volume.

(3.1) In base alla forma indefinita dell'equazione di continuità: $D\rho/Dt + \rho div\mathbf{v} = 0$, considerando la massa fluida costante ($dm = d(\rho V) = 0$), si arriva a scrivere: $-DV/Dt + Vdiv\mathbf{v} = 0$. Vedere “*Meccanica dei Fluidi*” di MARCHI e RUBATTA [pag. 69].

Cinematismo isocoro. In base alle precedenti considerazioni si è osservato che, introducendo lo sforzo dato dall'EQ. (III.5), è possibile trattare matematicamente il cinematismo generale del moto del volume fluido come se fosse un cinematismo a volume costante. Come noto, in base all'equazione di continuità, la condizione di moto isocoro porta a scrivere:

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{III.6}$$

Pertanto, l'adozione e l'impiego della particolare espressione data dall'EQ. (III.5) implica lo studio di una particolare deformazione, la cui geometria soddisfa in ogni istante l'EQ. (III.6).

Inoltre, in base alla teoria della cinematica dei fluidi, il tensore \mathbf{L} delle velocità di variazione del volume è un tensore *isotropo*, ed ha la forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{div} \mathbf{v}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\text{div} \mathbf{v}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{div} \mathbf{v}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{III.7}$$

Per costruzione \mathbf{L} è un tensore simmetrico e la traccia $L_{xx} + L_{yy} + L_{zz} = \text{div} \mathbf{v}$ è un *invariante*, e conserva lo stesso valore rispetto a qualsiasi sistema di riferimento.

Pertanto, nel caso di cinematismo isocoro, la condizione $\text{div} \mathbf{v} = 0$ comporta proprio:

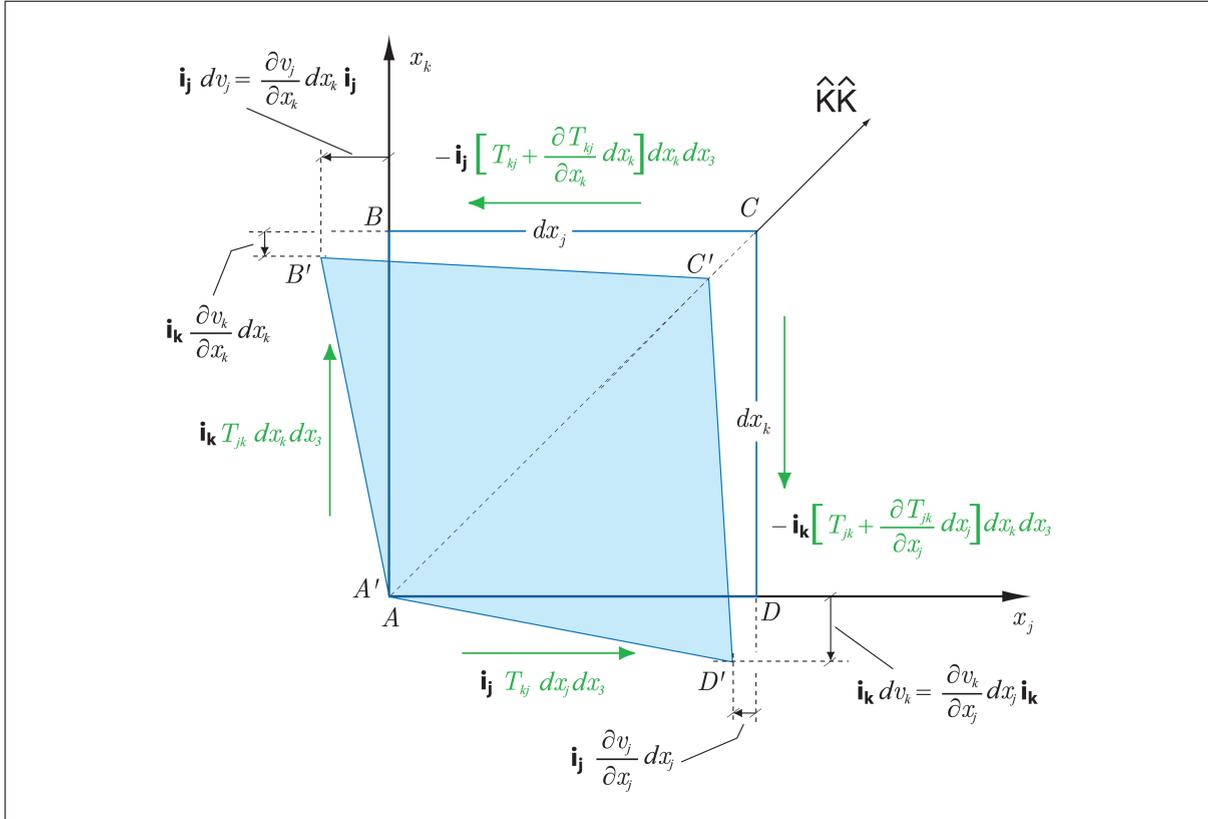


Figura 3.1. Generica deformazione – quindi anisocora – infinitesima (nell'unità di tempo) di un elementino fluido di dimensioni infinitesime nel generico piano $x_k; x_j$. È stato depurato dal cinematismo la componente traslazionale e quella rigida rotazionale. Si sono, anche, indicate le forze agenti, al tempo t , quando l'elemento è nella configurazione $ABCD$.

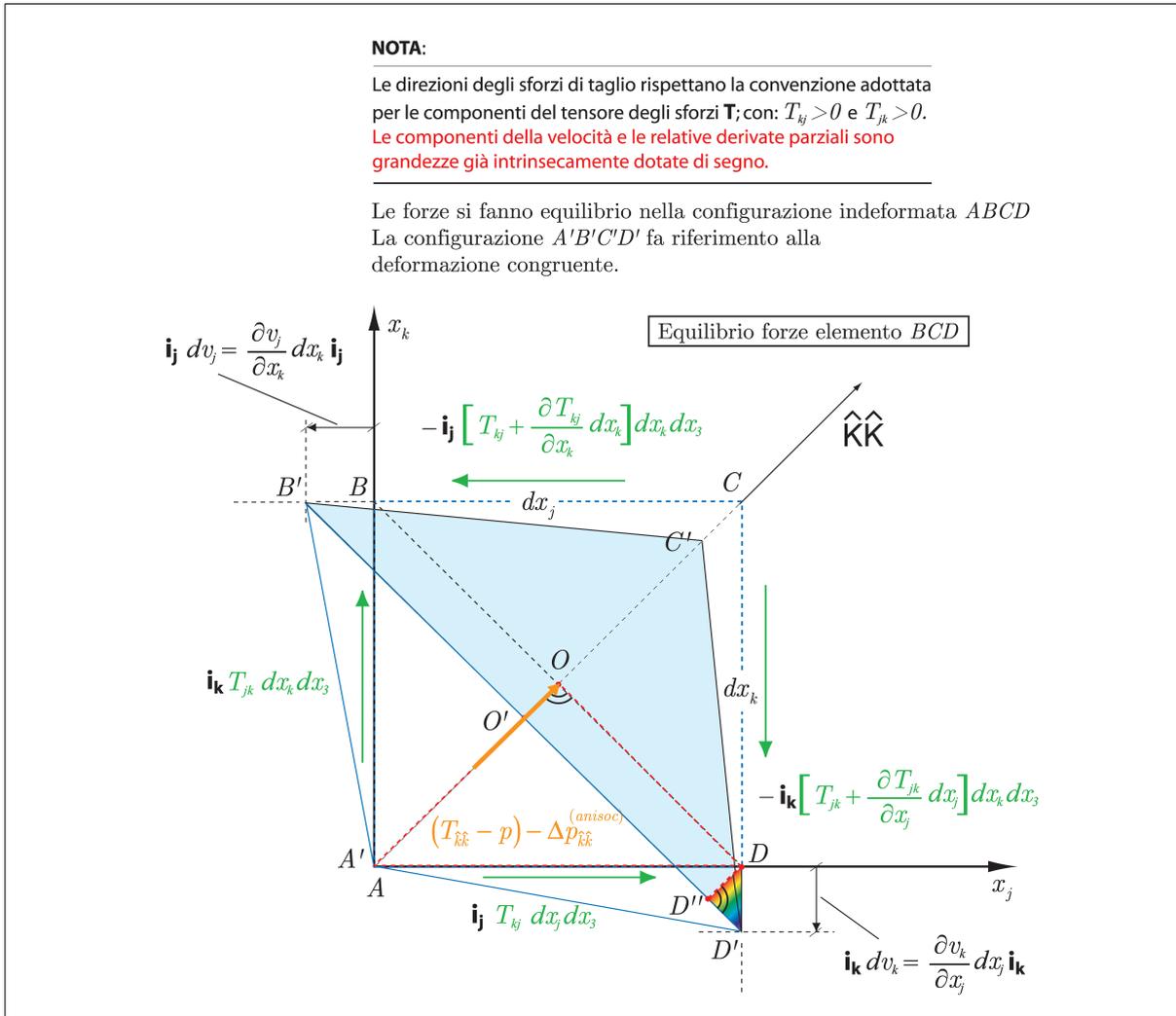


Figura 3.2. Deformazione isocora infinitesima (nell'unità di tempo) per elementino fluido di volume dV , nel generico piano $x_k; x_j$. Evidenziato, in particolare, il cinematiso di deformazione isocora del volumetto BCD di volume $dV/2$. Le forze fanno riferimento alla configurazione $ABCD$ all'equilibrio e all'istante t . Per il teorema dei lavori virtuali, all'equilibrio di un sistema di forze va associato un cinematiso di deformazione "congruente": $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$. Si sono, anche, indicate le forze agenti, al tempo t , quando l'elemento è nella configurazione $ABCD$.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{III.8}$$

Generico cinematiso anisocoro. Si consideri un sistema di assi coordinati $x_k; x_j$ e x_3 ; in cui si assume l'asse x_3 come l'asse perpendicolare al piano generico individuato dai due assi $x_k; x_j$ scelti. Nella **Figura 3.1** è rappresentato un generico cinematiso di deformazione (quindi, in generale, anisocoro). Si può notare dalla figura che i termini della divergenza della velocità non sono nulli, risultando:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \neq 0 \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \neq 0.$$

Viceversa, nel caso di un cinematiso isocoro nel medesimo piano generico, deve essere:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \tag{III.9}$$

Nota importante



Pertanto, il relativo cinematismo di deformazione isocora è quello rappresentato nella **Figura 3.2**. Quindi, nel caso di un elemento fluido infinitesimo, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si assume che in ognuno dei piani coordinati, localmente in un punto \mathbf{x}_0 , sia sempre verificata l'**EQ. (III.8)**, ovvero l'**EQ. (III.9)**. Queste considerazioni si ritengono applicabili a ciascuno dei tre piani coordinati; pertanto, si deve intendere l'**EQ. (III.9)** in modo da fare assumere ogni volta ai pedici k e j le tre coppie di valori: $(x; y)$; $(x; z)$ e $(z; y)$; in modo da prendere in esame tutti e tre i cinematismi piani, relativi ai tre piani individuati dagli assi coordinati x ; y e z . Concludendo, se si scelgono gli assi coordinati x ; y e z , deve essere in un punto \mathbf{x}_0 di un fluido in moto isocoro:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

3.1.1 Il teorema dei lavori virtuali applicato all'elemento fluido infinitesimo

Enunciato Teorema Lavori Virtuali:

Il lavoro virtuale complessivo compiuto dalle forze esterne e dalle reazioni vincolari (in equilibrio con le tensioni interne) durante spostamenti e cedimenti vincolari imposti – compatibili con le deformazioni interne – risulta uguale al lavoro virtuale delle tensioni interne nelle deformazioni congruenti (conseguenti) agli spostamenti e cedimenti vincolari imposti.

Il teorema dei lavori virtuali per sistemi deformabili presenta la nota espressione generale:

$$L_{est} + L_{RV} = L_{\sigma\tau}; \tag{III.10}$$

dove, una volta individuato al tempo t il sistema equilibrato tra le forze totali agenti (forze esterne e reazioni vincolari) e le relative tensioni interne al corpo deformabile, e una volta noto il relativo cinematismo di deformazione “congruente” con gli spostamenti imposti, si ha:

- L_{est} è il lavoro virtuale delle forze esterne applicate al sistema;
- L_{RV} è il lavoro virtuale delle eventuali reazioni vincolari (eventuali cedimenti dei vincoli presenti);
- $L_{\sigma\tau}$ è il lavoro virtuale fatto da tutti gli sforzi interni agenti sul sistema: nel caso di un fluido, si parlerà di sforzi normali e di taglio.

Volendo applicare tale teorema al sistema (deformabile) fluido $ABCD$, infinitesimo di volume dV (vedere la **Figura 3.2** a pag. 23), si deduce – in virtù anche delle considerazioni fatte a riguardo dell'espressione nell'**EQ. (III.5)** – che gli unici lavori non nulli sono quelli relativi agli sforzi interni al fluido: $T_{kj} = T_{jk}^{(3.2)}$ e $T_{\hat{k}\hat{k}}$. Non si considerano i lavori delle forze esterne di massa, in quanto come forze di volume, risultando degli infinitesimi di ordine superiore rispetto alle forze di superficie, possono essere trascurati. Tantomeno sono presenti o si considerano vincoli applicati all'elementino fluido infinitesimo preso in considerazione. Ciò posto, l'equazione dei lavori virtuali si riduce alla semplice relazione:

$$L_{\sigma\tau} = 0; \tag{III.10_a}$$

che in forma differenziale porge: $dL_{\sigma\tau} = 0$.



NOTA. Tenendo presenti tutte le considerazioni relative alla possibilità di trattare, dal punto di vista matematico, il generico cinematismo di deformazione come un semplice cinematismo isocoro, si può fare riferimento al cinematismo (appunto isocoro) rappresentato in **Figura 3.2**.

Lavoro virtuale degli sforzi di taglio. Innanzitutto, si osservi che il lavoro virtuale $dL_{\tau}^{(ABCD)}$ (infinitesimo) fatto dagli sforzi di taglio $T_{kj} = T_{jk}$ (durante il tempo dt) nella deformazione congruente per deformare l'elementino fluido dV

(3.2) Si è tenuto conto della nota proprietà di *reciprocità del taglio* in un punto del fluido.

N.B.:
L'asse x_3 è l'asse perpendicolare al piano generico individuato dagli altri due assi coordinati $x_k; x_j$.

dalla configurazione $ABCD$ al tempo t , alla configurazione $A'B'C'D'$ al tempo $t + dt$ è dato, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, dall'espressione:

$$dL_{\tau}^{(ABCD)} \approx - T_{kj} dx_j dx_3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx_k dt \right) - T_{jk} dx_k dx_3 \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j dt \right); \quad (III.11)$$

ovvero, tenendo conto della relazione di reciprocità del taglio $T_{kj} = T_{jk}$, e della definizione di velocità di variazione angolare nel piano kj :

$$\frac{d\gamma_{kj}}{dt} = - \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right), \quad (III.12)$$

si ha che il lavoro fatto dagli sforzi di taglio in dt sull'elementino fluido di volume dV è dato da:

$$dL_{\tau}^{(ABCD)} = T_{kj} d\gamma_{kj} dV; \quad (III.13)$$

essendo $dx_k dx_j dx_3 = dV$ il volume infinitesimo dell'elementino. Dalla forma dell'EQ. (III.13) si deduce che il lavoro virtuale fatto dagli sforzi di taglio nel tempo dt , durante una deformazione congruente isocora, per unità di volume della massa fluida è:

$$\frac{dL_{\tau}^{(ABCD)}}{dV} = T_{kj} d\gamma_{kj}. \quad (III.14)$$

Teorema dei lavori virtuali all'elementino BCD. Volendo, a questo punto, applicare il teorema dei lavori virtuali all'elementino fluido BCD , di volume $dV/2$ rispetto al volume dV dell'elementino $ABCD$, si ha per il lavoro virtuale delle forze di taglio:

$$dL_{\tau}^{(BCD)} = \frac{dV}{2} T_{kj} d\gamma_{kj} = \frac{1}{2} dL_{\tau}^{(ABCD)}. \quad (III.15)$$

Lavoro virtuale dello sforzo interno di pressione su AC. In base alle varie osservazioni riguardo alla possibilità di trattare il moto come se fosse isocoro, si è visto che è necessario introdurre il particolare sforzo normale:

$$[(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}].$$

Questo sforzo agisce, all'istante t , sulla superficie dS_{BD} che ha traccia \overline{BD} sul piano kj (vedere **Figura 3.2**). Durante la deformazione congruente che avviene nell'intervallo di tempo dt , si ha – come supposto nella figura – un accorciamento infinitesimo, lungo il particolare asse diagonale $\hat{k}\hat{k}$, pari in modulo a $\overline{OO'}$.

Se con $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} < 0$ si indica l'accorciamento unitario (quindi, di valore algebrico negativo), nell'intervallo di tempo dt , della deformazione della semidiagonale \overline{OA} lungo l'asse diagonale $\hat{k}\hat{k}$, allora il segmento $\overline{OO'}$ può essere espresso come:

$$\overline{OO'} = - \overline{OA} \cdot d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} > 0; \quad (III.16)$$

dove, la velocità di deformazione unitaria è:

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}. \quad (III.17)$$

In virtù dell'EQ. (III.16), il lavoro virtuale dello sforzo normale agente su \overline{BD} è negativo perché la relativa deformazione congruente è un accorciamento (vedere infatti **Figura 3.2** a pag. 23). Tale lavoro è dato quindi da:

$$dL_{\hat{k}\hat{k}}^{(BCD)} = \{[(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] dS_{BD}\} \overline{OA} \cdot d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} < 0. \quad (\text{III.18})$$

A questo punto, si può osservare che il prodotto $\overline{OA} \cdot dS_{BD}$ non è altro che il volume dell'intero elementino fluido $ABCD$. Infatti, come si può vedere dalla figura:

$$V_{ABCD} \equiv dV = \overline{OA} \cdot dS_{BD}.$$

Pertanto, il lavoro virtuale relativo allo sforzo normale agente sulla superficie di traccia \overline{BD} sul piano kj è:

$$dL_{\hat{k}\hat{k}}^{(BCD)} = [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] dV d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} < 0. \quad (\text{III.19})$$

A questo punto, l'espressione del teorema dei lavori virtuali data dall'EQ. (III.10_a) a pag. 24, porge in termini differenziali:

$$dL_{\tau}^{(BCD)} + dL_{\hat{k}\hat{k}}^{(BCD)} \equiv dL_{\sigma\tau} = 0; \quad (\text{III.20})$$

ovvero:

$$\frac{dV}{2} T_{kj} d\gamma_{kj} + [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] dV d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = dL_{\sigma\tau} = 0. \quad (\text{III.20}_a)$$

Questa equazione assume anche l'aspetto, in termini di velocità di deformazioni congruenti, dato da:

$$T_{kj} \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{kj}}{dt} + [(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)}] \frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = 0. \quad (\text{III.21})$$

Considerazioni sul cinematismo di deformazione congruente. Da pure considerazioni geometriche (relative al cinematismo di deformazione isocora del volume elementare di fluido relativamente al piano $x_k; x_j$), la relazione che lega la generica velocità di deformazione lineare $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}/dt$ dell'elementino (lungo la direzione $\hat{k}\hat{k}$) con la relativa velocità di deformazione angolare $d\gamma_{kj}/dt$ (dovuta a taglio puro con asse di rotazione perpendicolare al piano $x_k; x_j$) risulta (vedere Paragrafo 3.2 a pagina 28):

$$\frac{d\gamma_{kj}}{dt} = -2 \frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = -2 \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}, \quad (\text{III.22})$$

per cui l'equazione dello sforzo di taglio puro si può esprimere, relativamente al particolare sistema di riferimento adottato nella **Figura 3.5**, come:

$$\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(taglio)} \equiv T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = -2\mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}. \quad (\text{III.23})$$

Nota importante



A questo punto, sostituendo nell'EQ. (III.21) il legame evidenziato dall'EQ. (III.22) e semplificando, si ottiene l'importante relazione:

$$(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) - \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} = T_{kj} \quad (\text{III.24})$$

La pressione totale – depurata della parte idrostatica – in un punto della massa fluida è dovuta parte alla contrazione del volume operata sul fluido e parte causata dagli sforzi di taglio che si estrinsecano esternamente durante il moto.

Quest'ultima equazione, in virtù dell'EQ. (III.23), può essere ulteriormente interpretata in questo modo, scrivendo formalmente:^(3.3)

$$(T_{\hat{k}\hat{k}} - p) \equiv \Delta p_{\hat{k}\hat{k}} = \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} + \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(taglio)} \quad (III.25)$$

dove con il simbolo $\Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(taglio)} \equiv T_{k_j}$ si è, appunto, indicata quella parte della pressione totale $(T_{\hat{k}\hat{k}} - p)$, che è imputata alla componente della deformazione isocora.

La pressione totale, relativa alle sole deformazioni, consta di due contributi: uno che dipende dalle caratteristiche interne alla massa fluida (attriti conseguenti a variazioni di volume: componente anisocora della deformazione) e l'altro che dipende esclusivamente dalla componente isocora della deformazione.

Espressione del tensore deviatore degli sforzi. Sostituendo nell'EQ. (III.25) le espressioni descritte nelle due equazioni EQ. (III.23) e EQ. (III.4), si ottiene:

$$T_{\hat{k}\hat{k}} - p \equiv \Delta p_{\hat{k}\hat{k}} = \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(anisoc)} + \Delta p_{\hat{k}\hat{k}}^{(taglio)} = \left(-\mu' div \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} \right). \quad (III.26)$$

Nota importante

In generale, le espressioni^(3.4) generiche degli sforzi normali $(T_{\hat{k}\hat{k}} - p)$, che si estrinsecano solo durante il movimento del fluido (rappresentati dagli elementi diagonali del tensore degli sforzi che risulta legato alle deformazioni fluide), portano al seguente legame sul piano cartesiano $x_k; x_j$:

$$T_{\hat{k}\hat{k}} = p - \mu' div \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}. \quad (III.27)$$



NOTA. Tale relazione è stata calcolata ed è valida solo per sforzi normali conseguenti alle deformazioni nel moto degli elementi fluidi lungo la generica direzione $\hat{k}\hat{k}$. Inoltre, il valore dello sforzo normale, per come è caratterizzato nell'equazione EQ. (III.27), risulta dipendere solo dalla direzione $\hat{k}\hat{k}$ su cui lo si valuta. Ciò porta a concludere che in un sistema di riferimento cartesiano x, y, z , lungo le direzioni individuate dai tre assi valgono rispettivamente le seguenti relazioni^(3.5):

$$\begin{aligned} T_{xx} &= p - \mu' div \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ T_{yy} &= p - \mu' div \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ T_{zz} &= p - \mu' div \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (III.28)$$

In maniera del tutto analoga, dalla relazione degli sforzi puramente tangenziali (equazione che lega la velocità di deformazione angolare all'entità dello sforzo di taglio):

- (3.3) L'equazione indicata non è altro che l'espressione dello sforzo normale $T_{\hat{k}\hat{k}} - p$, agente su BD , in funzione degli sforzi di deformazione per taglio puro e in funzione degli sforzi legati alla velocità di variazione del volume della massa fluida.
- (3.4) Queste espressioni delle componenti normali degli sforzi viscosi assumono una forma più semplice nel caso di fluidi incompressibili ($\rho = 0$); in queste condizioni, infatti, l'equazione di bilancio delle masse fornisce $div \mathbf{v} = 0$ e perciò nelle equazioni scritte sopra si annulla il termine dipendente dall'operatore divergenza.
- (3.5) Quando le dissipazioni di energia meccanica connesse al moto di un fluido divengono fatto rilevante nel fenomeno da studiare, non risulta possibile prescindere dalle componenti tangenziali del tensore degli sforzi. Resta quindi in evidenza la dipendenza del tensore degli sforzi \mathbf{T} dalle velocità di deformazione, rappresentate dal tensore \mathbf{D} . Risulta cioè: $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$. Lo schema è completato assumendo che il legame ora indicato non dipenda dal particolare riferimento locale scelto e richiedendo che esso si riduca alla forma $\mathbf{T} = p\mathbf{I}$, valida nel caso statico, quando le velocità di deformazione si annullano ed il fluido raggiunge uno stato di quiete. Lo schema così completato è noto come schema di *fluida stokesiano*, in quanto suggerito da Stokes nel 1845.

$$T_{kj} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right), \quad (III.29)$$



risulta, permutando gli indici, un legame lineare tra le componenti del tensore degli sforzi \mathbf{T} e le relative componenti del tensore delle velocità di deformazione \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} T_{xy} &= -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -2\mu D_{xy} \\ T_{xz} &= -2\mu D_{xz} \quad T_{yz} = -2\mu D_{yz} \end{aligned} \quad (III.30)$$

Tenendo conto anche della nota condizione di *reciprocità del taglio* $T_{jk} = T_{kj}$, conseguenza dell'equazione di equilibrio dei momenti applicati all'elementino fluido infinitesimo, si possono condensare tutte le relazioni scritte sopra tramite l'utilizzo della scrittura compatta tensoriale, e quindi arrivare all'espressione sintetica^(3.6) del tensore degli sforzi per fluidi viscosi:

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}. \quad (III.31)$$

Essendo \mathbf{I} il tensore unità, e \mathbf{D} il tensore delle velocità di deformazione.

3.2 Considerazioni geometriche sui cinematismi di deformazione

Questa parte fa riferimento alle relazioni geometriche su un cinematismo semplice di deformazione per arrivare all'equazione di pag. 26, (EQ. III.22).

Per arrivare a calcolare la relazione data dall'EQ. (III.22) bisogna riesaminare la relazione di Newton precedentemente usata per introdurre il concetto di viscosità (pag. 21, (EQ. III.3)), allo scopo di darne una facile interpretazione cinematica, basata per capire tutte le considerazioni utilizzate per arrivare all'equazione di Navier Stokes. Si consideri la semplice situazione di un moto permanente (nel piano cartesiano $x_k; x_j$) con direzione secondo l'asse x_k , che risulta funzione della sola variabile x_k .

Sia AB una fila di particelle che in un dato istante sono allineate lungo un segmento dx_k parallelo all'asse x_k ; dopo un intervallo di tempo dt , dette particelle assumono la nuova posizione CD , tale che $AD = v_j dt$ e $BC = [v_j + (\partial v_j / \partial x_k) \cdot dx_k] \cdot dt$. L'originario angolo retto $B\hat{A}D$ ha perciò subito una variazione infinitesima (vedere **Figura 3.3**):

$$0 < -d\gamma_{kj} = \frac{BC - AD}{AB} = \frac{\left(v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j \right) dt - v_k dt}{dx_j} = \frac{dv_k}{dx_j} dt, \quad (III.32)$$

alla quale corrisponde la velocità di deformazione angolare (vedere **Figura 3.3**):

$$-\frac{d\gamma_{kj}}{dt} = \frac{dv_k}{dx_j}. \quad (III.33)$$

Sforzo tangenziale e relazione di Newton

La variazione di velocità lungo la normale alla direzione del movimento comporta la comparsa di uno sforzo tangenziale che, per la relazione di Newton, vale in modulo:

(3.6) I due coefficienti μ' e μ dipendono, in generale, dalla pressione e dalla temperatura. Nell'ambito dello schema newtoniano, però, si può tener conto solo della seconda di queste dipendenze: quella della pressione porterebbe ad un legame non più lineare tra \mathbf{T} e \mathbf{D} .

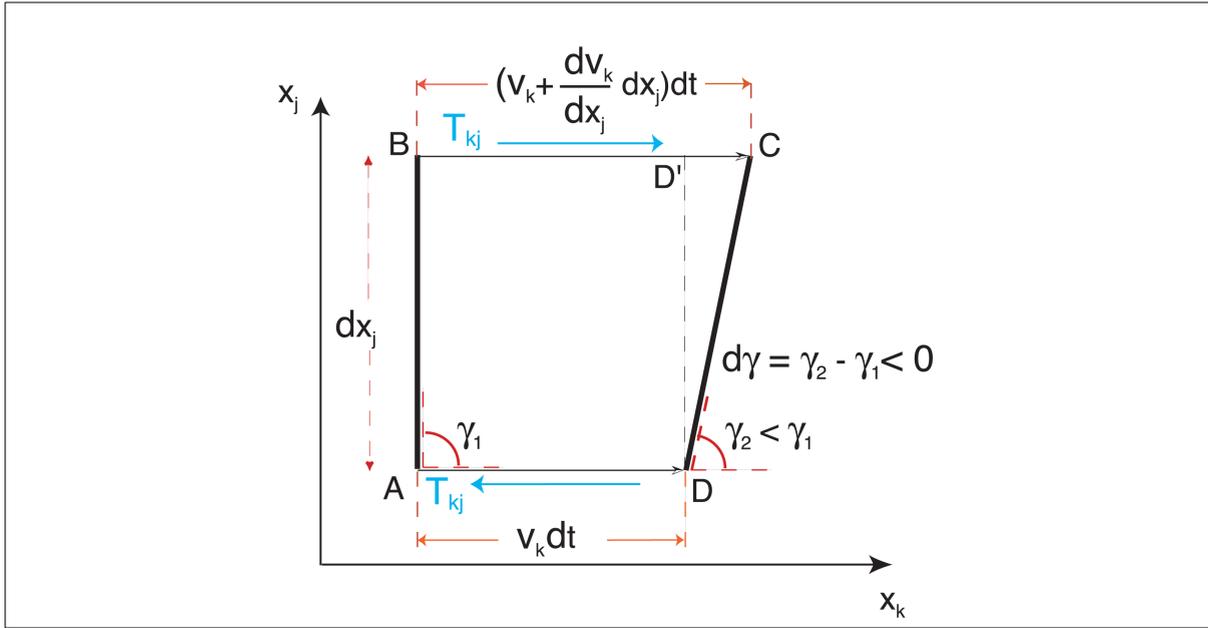


Figura 3.3. Variazione di assetto di una fila di particelle fluide $AB \rightarrow DC$ durante uno scorrimento sotto l'azione di uno sforzo di taglio, agente nell'intervallo di tempo infinitesimo dt .

$$|T_{kj}| = \mu \frac{dv_k}{dn} = \mu \frac{dv_k}{dx_j}, \tag{III.34}$$

e che sullo strato \overline{AD} agisce in direzione contraria al verso stabilito nella definizione del tensore degli sforzi; per tenere conto di ciò si assegna segno negativo e quindi, in definitiva, si può scrivere:

$$T_{kj} = -\mu \frac{dv_k}{dx_j}. \tag{III.35}$$

Ma tenuto conto della relazione **EQ. (III.33)**, questa espressione assume anche la forma:

$$T_{kj} = -\mu \frac{dv_k}{dx_j} = \mu \frac{d\gamma_{kj}}{dt}, \tag{III.36}$$

che mostra una proporzionalità diretta tra lo sforzo tangenziale e la velocità di deformazione angolare. Questa constatazione, dedotta per il caso semplice di un moto piano per strati paralleli, conduce a formulare l'ipotesi che anche in un movimento qualunque le componenti di origine viscosa siano funzioni lineari delle velocità di deformazione.

3.2.1 Cinematismo di deformazione di un elemento infinitesimo piano

Si consideri nel piano $x_k; x_j$ il quadrilatero infinitesimo $A'B'C'D'$ (**Figura 3.5** a pag. 31). Prima di arrivare alla relazione di pag. 26, (**EQ. III.22**), vista precedentemente nell'introduzione dell'equazione di Navier Stokes, è necessario valutare l'entità dell'accorciamento unitario dell'elementino nella direzione individuata dall'asse $\hat{k}\hat{k}$; durante la deformazione che lo porta dalla configurazione $A'B'C'D'$ alla configurazione $ABCD$.

Cinematica in termini di allungamenti unitari

Si ragioni d'ora in avanti in termini di allungamenti unitari anziché di accorciamenti, nel solo intento di rendere più chiaro il ragionamento sugli schemi proposti nelle figure, senza nulla togliere al carattere generale della trattazione. Si consideri, quindi, il caso illustrato in **Figura 3.4**. Si riconosce che l'allungamento unitario (infinitesimo) $d\varepsilon_k$ subito dall'elementino nel tempo dt lungo la generica direzione individuata dall'asse k è:

$$d\varepsilon_k = \frac{\frac{\partial v_k}{\partial x_k} dx_k dt}{dx_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dt, \tag{III.37}$$

sicché la velocità di allungamento nella direzione dell'asse k risulta:

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \tag{III.38}$$

Nel caso particolare di un accorciamento l'EQ. (III.38) rimane invariata, ovviamente risulterà cambiato solo il segno:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} < 0.$$

Entità dell'allungamento unitario infinitesimo nella deformazione dell'elemento fluido.

Ragionando, quindi, ancora in termini di allungamenti^(3.7), si riconosce dalla **Figura 3.5** che l'entità di un allungamento unitario $d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}$ infinitesimo, lungo la particolare direzione $\hat{k}\hat{k}$ nel tempo dt , dalla configurazione $ABCD$ a quella $A'B'C'D'$, può essere espresso dalla relazione:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = \frac{\overline{C'C}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{O'O'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{D''D'}}{\overline{AO}}. \tag{III.39}$$

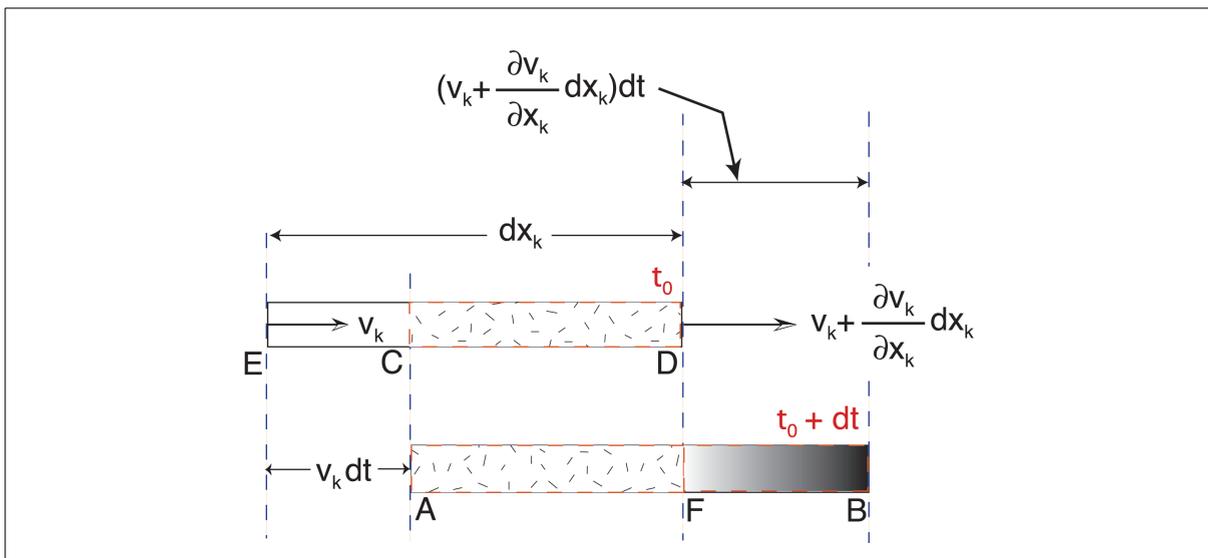


Figura 3.4. Allungamento unitario dell'elemento infinitesimo (durante il tempo dt) lungo la generica direzione k individuata dall'asse x_k .

(3.7) Vale la seguente relazione $\overline{C'C} = \overline{D'D''} = \overline{O'O'}$: si tratta di allungamento unitario dello stesso elemento infinitesimo, lungo la medesima direzione individuata dall'asse $\hat{k}\hat{k}$.

Si tracci ora, come disegnato in **Figura 3.5** (e come disegnato anche nella **Figura 3.2** a pag. 23), la perpendicolare $D'D''$ su OD , risulta allora valida la seguente proporzione, relativa ai due triangoli simili $D'D''D$ e AOD :

$$\overline{OD}/\overline{AD} = \overline{D''D'}/\overline{DD'} \tag{III.40}$$

analogamente, sempre per la similitudine dei triangoli simili $D''D'D$ e AOD , esiste la relazione seguente:

$$\frac{\overline{D''D'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}}, \tag{III.41}$$

si può osservare, inoltre, che:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = \frac{\overline{D''D'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{D''D'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}}, \quad 0 < \overline{DD'} = -\overline{AD} \cdot \left(\frac{d\gamma_{kj}}{2}\right). \tag{III.42}$$



NOTA. Analogamente a quanto visto nell'equazione di pag. 30, (**EQ. III.38**), si ha invece per la generica direzione $\hat{k}\hat{k}$ la seguente velocità di deformazione unitaria:

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}}, \quad \text{pari a: } \frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} \cdot \frac{1}{dt} = -\frac{d\gamma_{kj}}{2} \cdot \frac{1}{dt};$$



per cui si arriva alla relazione valida per il generico allungamento unitario dell'elemento fluido lungo la direzione $\hat{k}\hat{k}$:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = -\frac{d\gamma_{kj}}{2} > 0, \tag{III.43}$$

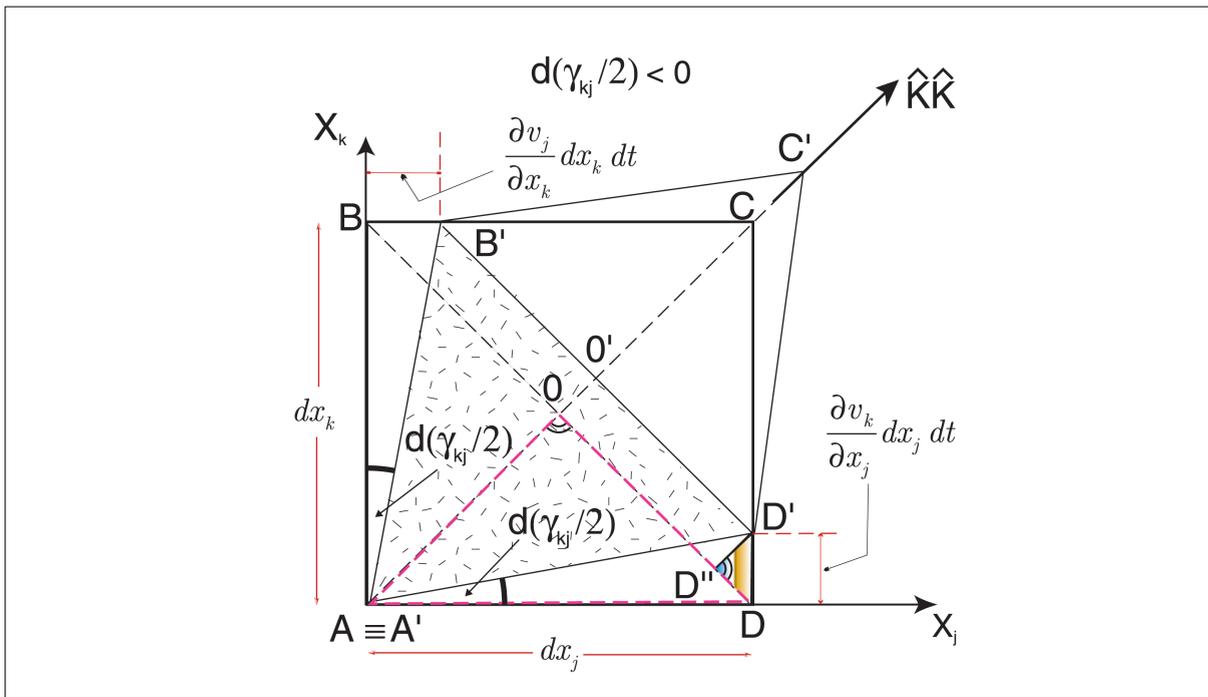


Figura 3.5. Cinematismo di deformazione (isocora) di un generico elemento infinitesimo piano, nel tempo elementare dt . Nel generico allungamento unitario $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$ si ha: $d(\gamma_{kj}/2) < 0$.

cui corrispondono le relative velocità di deformazione, legate alla relazione di pag. 26, (EQ. III.22):

$$\frac{d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}}}{dt} = \frac{\partial v_{\hat{k}}}{\partial x_{\hat{k}}} = -\frac{1}{2} \frac{d\gamma_{kj}}{dt}. \quad (\text{III.44})$$

Ovviamente, nel caso di un accorciamento, sarebbe risultato:

$$d\varepsilon_{\hat{k}\hat{k}} = -\frac{d\gamma_{kj}}{2} < 0, \quad (\text{III.43}_a)$$

variando solo il segno dell'angolo γ_{kj} ($d\gamma_{kj} > 0$), ma rimanendo invariata la forma dell'EQ. (III.43_a). (L'EQ. (III.44) è stata precedentemente sfruttata nel paragrafo 3.1, precisamente a pag. 26, (EQ. III.22)).

3.3 Le equazioni meccaniche dei fluidi newtoniani

3.3.1 Definizione di pressione isotropa

Si definisce pressione isotropa la media delle pressioni relative a tre facce mutualmente perpendicolari di un volumetto elementare di fluido, per cui si scriverà:

$$p_{(idrostatica)}^{(viscosa)} \equiv \frac{T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}}{3} = p_{idrostatica} + p_{viscosa} \quad (\text{III.45})$$

essendo i simboli presenti le componenti normali del tensore degli sforzi:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ T_{yy} &= p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ T_{zz} &= p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

risulta, quindi, sviluppando la relazione nell'EQ. (III.45) tramite le relazioni dell'EQ. (III.46):

$$p_{(isotropa)}^{(viscosa)} \equiv \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 T_{kk} = p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (\text{III.47})$$

e confrontando l'equazione EQ. (III.47) con la relazione dell'EQ. (III.45) risulta:

$$\begin{aligned} p_{idrostatica} &\equiv p \\ p_{viscosa} &\equiv -\mu' \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$



NOTA. Si assuma l'ipotesi che il valore della pressione viscosa sia una trascurabilissima parte della pressione isotropa viscosa, a prescindere della natura del tipo di moto (*isocoro* o *anisocoro*); vale a dire che, qualsiasi sia il valore della $\operatorname{div} \mathbf{v}$, deve risultare all'atto pratico:

$$p_{viscosa} = -\left(\mu' + \mu \frac{2}{3}\right) \operatorname{div} \mathbf{v} \cong 0, \quad (\text{III.49})$$

ovvero deve risultare:

$$\mu' + \mu \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \mu' = -\mu \frac{2}{3}. \quad (\text{III.50})$$

Comunque sia la velocità di variazione dell'unità di volume ($\operatorname{div} \mathbf{v}$), l'effetto della viscosità risulta, quindi, trascurabile.

3.3.2 Equazione indefinita del moto: equazione di Stokes

Le proiezioni dell'equazione fondamentale della dinamica dei fluidi, sui tre assi coordinati x , y e z , sono:

$$\begin{aligned} \rho \left(f_x - \frac{dv_x}{dt} \right) &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \\ \rho \left(f_y - \frac{dv_y}{dt} \right) &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \\ \rho \left(f_z - \frac{dv_z}{dt} \right) &= \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

(ove si intenda, ad esempio, che T_{xy} rappresenti la componente nella direzione dell'asse y dello sforzo trasmesso attraverso un elemento di superficie normale all'asse delle x , ed applicato al fluido che si trova in contatto con tale superficie dal lato delle x crescenti). Scrivendo le tre precedenti equazioni in forma compatta, si ottiene:

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (\text{III.52})$$

Questa equazione è nota con il nome di *equazione indefinita del moto*. Introducendo l'espressione del tensore degli sforzi

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D} \quad (\text{III.53})$$

nell'EQ. (III.52) si ottiene:

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div}(2\mu \mathbf{D}) = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (\text{III.54})$$

È infatti

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div}[(p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}] = \operatorname{grad}(p - \mu' \operatorname{div} \mathbf{v}) - \operatorname{div}(2\mu \mathbf{D}).$$

Se poi i coefficienti di viscosità μ e μ' risultano uniformi in tutta la massa fluida, la prima equazione indefinita del moto si riduce alla forma:

$$\rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + (\mu + \mu') \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad (\text{III.55})$$

detta *equazione di Stokes*. Si può controllare che esiste la relazione:

$$[\operatorname{div}(2\mu \mathbf{D})]_k = \sum_i^3 \frac{\partial(2\mu D_{ik})}{\partial x_i} = \sum_i^3 2\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right] =$$

$$= \mu \sum_i^3 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \mu [\nabla^2 \mathbf{v}]_k + \mu [\text{grad}(\text{div} \mathbf{v})]_k.$$



NOTA. In base alle precedenti considerazioni sulla pressione viscosa, l'espressione generale assunta dal tensore \mathbf{T} (vedere EQ. (III.53)), in funzione del tensore delle velocità delle deformazioni \mathbf{D} , risulta la seguente:

$$\mathbf{T} = \left(p + \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{v} \right) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}. \quad (\text{III.56})$$



NOTA. Un caso particolare e abbastanza frequente nelle applicazioni è il caso di un flusso di un fluido incompressibile che è caratterizzato da un moto isocoro (variazione nulla del volume). Per tale tipo di fluido l'equazione indefinita di continuità si riduce alla relazione:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{III.57})$$

e, contemporaneamente, la prima equazione indefinita del moto a viscosità μ uniforme si presenta come:

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad (\text{III.58})$$

Quest'ultima forma, che risale al 1827, è detta *equazione di Navier*.

CAPITOLO 4

Applicazione dell'equazione di Navier stokes

Sistemi di riferimento non inerziali

Riferimenti non inerziali solidali con il geoide

In questa parte vengono presentate le equazioni di Navier stokes per fluidi viscosi incompressibili e turbolenti.

4.1 Le equazioni del bilancio della quantità di moto

4.1.1 Introduzione alle equazioni di Navier Stokes per i fluidi viscosi

Si è visto, in precedenza, che l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma indefinita per un fluido viscoso assume, nel caso di fluido supposto incompressibile ($div \mathbf{v} = 0$), la forma:

$$\rho \mathbf{f} - grad p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (IV.1)$$

Sistemi di riferimenti inerziali

Proiettando questa equazione vettoriale su un sistema di riferimento inerziale $x; y$ e \hat{z} ^(4.1), si ottiene:

- asse x : $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho gz + p) + \mu \nabla^2 v_x = \rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial \hat{z}} \right);$
- asse y : $-\frac{\partial}{\partial y}(\rho gz + p) + \mu \nabla^2 v_y = \rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial \hat{z}} \right);$
- asse \hat{z} : $-\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\rho gz + p) + \mu \nabla^2 v_z = \rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial \hat{z}} \right).$

(4.1) In generale, si assume un sistema di assi coordinati in cui l'asse \hat{z} non è necessariamente un asse verticale. Indicando, invece, con z un asse orientato lungo la verticale, come il vettore \mathbf{g} .

Avendo indicato con $\nabla^2 v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial \hat{z}^2}$ l'operatore matematico *Laplaciano* dello scalare v_i .

Pertanto, le proiezioni dell'equazione di Navier Stokes si scrivono anche:

- proiezione lungo l'asse x :

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z + p) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial \hat{z}^2} \right) = \rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial \hat{z}} \right);$$

- proiezione lungo l'asse y :

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho g z + p) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \hat{z}^2} \right) = \rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial \hat{z}} \right);$$

- proiezione lungo l'asse \hat{z} (in generale non coincidente con l'asse verticale z del geopotenziale):

$$-\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\rho g z + p) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial \hat{z}^2} \right) = \rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial \hat{z}} \right).$$

Equazione in forma compatta

In termini di scrittura compatta, l'equazione di Navier Stokes per fluidi viscosi si scrive:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho g z + p) + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (\text{IV.2})$$

Nota importante



in cui la variabile x_i ha il pedice i che indica l'asse in cui si sta considerando la proiezione dell'equazione, ovvero: $x_1 \rightarrow x$; $x_2 \rightarrow y$ e $x_3 \rightarrow \hat{z}$; mentre la variabile x_k utilizza il pedice k per esplicitare – nell'equazione che si sta considerando proiettata sull'asse i -esimo – le operazioni di derivazione parziale rispetto alle tre variabili x ; y e \hat{z} .

4.1.2 Moto in tubi ad asse rettilineo

Si consideri il caso di un moto permanente di un fluido viscoso (viscosità dinamica μ e densità ρ uniformi e stazionarie, che si svolge con traiettorie rettilinee e parallele nel campo del geopotenziale $\phi = -gz$. La direzione del vettore \mathbf{g} fissa per definizione la direzione verticale, il verso opposto a quello di \mathbf{g} fissa l'orientamento verso l'alto (indicato sempre con l'asse z); mentre i piani normali a \mathbf{g} vengono detti orizzontali. Scegliendo l'asse z suddetto (verticale e orientato verso l'alto), si può descrivere il campo \mathbf{f} , dell'EQ. (IV.1), con la scrittura $\mathbf{f} = -g \text{ grad } z = -g \nabla z$, ed esprimere il potenziale nella forma $\phi = -gz$. Ciò posto, se si sceglie una particolare terna di riferimento cartesiano x ; y e \hat{z} , in cui l'asse x è disposto lungo l'asse del condotto, mentre gli assi y e \hat{z} sono disposti sulla sezione trasversale all'asse del condotto stesso. Se si considera il moto prescindendo dalle agitazioni turbolente, si può subito osservare che il moto, essendo costretto a svilupparsi lungo un asse retti-

lineo (asse del condotto) sarà descritto, per forza di cose, da una velocità con componenti $v_x \neq 0$ e $v_y = v_z = 0$. Inoltre, in base all'equazione di continuità nella forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \tag{IV.3}$$

se si suppone che ρ sia uniforme e stazionaria allora, essendo $D\rho/Dt = 0$, risulta che è $\text{div}\mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, che si riduce alla forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{IV.4}$$

L'equazione di continuità afferma che la funzione v_x (calcolata in un punto $y; \hat{z}$ trasversalmente al flusso) non varia lungo l'asse del moto. Ciò significa, quindi, che la distribuzione della velocità su ogni sezione trasversale rimane immutata passando su ciascuna sezione perpendicolare al moto.

perché v_y e v_z sono nulli su ogni sezione trasversale al moto. L'EQ. (IV.4) avverte che la componente v_x della velocità può dipendere soltanto dalle coordinate trasversali y e \hat{z} : $v_x = v_x(y; \hat{z})$, e il campo di velocità all'interno del condotto rettilineo sarà definito dal vettore $\mathbf{v}(y; \hat{z}) = \mathbf{i}_x v_x(y; \hat{z})$. Si utilizzi, per l'equazione indefinita del moto, l'equazione di Navier:

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad}p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

essa ammette dunque le proiezioni:

- sull'asse x :

Equazione continuità

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z + p) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial \hat{z}^2} \right) = \rho \frac{Dv_x}{Dt} =$$

MOTO STAZIONARIO $v_y = v_z = 0$

$$= \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial \hat{z}} \right);$$

Equazione continuità

- sull'asse y :

$$v_y = v_z = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho g z + p) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \hat{z}^2} \right) = \rho \frac{Dv_y}{Dt} =$$

MOTO STAZIONARIO $v_y = v_z = 0$

$$= \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial \hat{z}} \right);$$

- sull'asse \hat{z} :

$$v_y = v_z = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\rho g z + p) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial \hat{z}^2} \right) = \rho \frac{Dv_z}{Dt} =$$

MOTO STAZIONARIO $v_y = v_z = 0$

$$= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial \hat{z}} \right).$$

del vettore \mathbf{v} assume su ciascun cappio lo stesso valore. In base alla relazione di Kelvin (EQ. (A.19)), questo vuol dire che il flusso della vorticità \mathbf{w} è e rimane costante lungo ogni sezione trasversale al tubo di vortice. Questo implica che quando la sezione del tubo di vortice si restringe, lì aumenta il valore della vorticità. Viceversa, quando la sezione del tubo di flusso aumenta, il valore della vorticità diminuisce.

Il tubo di vortice non può terminare all'interno del dominio in cui è definito il moto: in un ipotetico punto del genere, la vorticità dovrebbe superare ogni limite, per garantire la costanza del flusso di \mathbf{w} ; mentre dovrebbe contemporaneamente annullarsi, per consentire la convergenza delle linee del vettore \mathbf{w} che formano le pareti del tubo di vortice. I tubi di vortice, pertanto, si richiudono su se stessi, oppure attraversano tutto il dominio del moto.

Secondo teorema di Helmholtz. Si consideri una linea chiusa L che abbracci un tubo di vortice che si muove con il fluido: linea L , attraversata costantemente dalle stesse linee del vettore \mathbf{w} , che nel tempo varia di forma e posizione in funzione del moto del tubo di vortice su cui è ancorato.

Se l'accelerazione è dotata di potenziale, allora la linea L continua ad abbracciare costantemente lo stesso tubo di vortice, e la circolazione di \mathbf{v} lungo tale linea rimane inalterata per intervalli di tempo finiti. Pertanto, è:

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \text{cost}; \quad (\text{A.20})$$

contemporaneamente variando, nel tempo, la posizione del tubo di vortice su cui è ancorata la linea chiusa L .

Se ne deduce che la vorticità racchiusa nel tubo di vortice si conserva.

A.1.2 Equazione generale di bilancio della vorticità

Si vuole ricavare l'equazione generale di bilancio del vettore vorticità: $\mathbf{w} = \text{rot}\mathbf{v}$. Per questo, si usa l'equazione di Navier Stokes:

$$\rho \mathbf{f} - \text{div}\mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{a}; \quad (\text{A.21})$$

e l'espressione vettoriale dell'accelerazione \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) + \text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}. \quad (\text{A.22})$$

Considerando la densità ρ ovunque costante, si applica l'operatore rotore a ciascun termine dell'EQ. (A.21), ottenendo:

$$\rho \text{rot}\mathbf{f} - \text{rot}[\text{div}\mathbf{T}] = \rho \text{rot}\mathbf{a}. \quad (\text{A.23})$$

Si suppone che le forze specifiche di massa siano conservative (sola forza gravitazionale), perciò è $\mathbf{f} = \text{grad}\phi$ e, come noto, riesce identicamente:

$$\text{rot}\mathbf{f} = \text{rot}(\text{grad}\phi) = 0.$$

Pertanto, l'EQ. (A.23) si riduce allo sviluppo dell'espressione:

$$- \text{rot}[\text{div}\mathbf{T}] = \rho \text{rot}\mathbf{a} \quad (\text{A.23}_a)$$

Si applichi l'operatore rotore all'espressione vettoriale dell'accelerazione (EQ. (A.22)), si ottiene:

$$\text{rota} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}); \quad (\text{A.24})$$

essendo il rotore di un gradiente sempre identicamente nullo: $\text{rot}\left(\text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right) = 0$.
 Sostituendo l'EQ. (A.24) nell'EQ. (A.23_a) si ottiene:

$$- \text{rot}[\text{div}\mathbf{T}] = \rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \rho \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}). \quad (\text{A.25})$$

Si consideri ora l'espressione generale del tensore degli sforzi \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = (p - \mu' \text{div}\mathbf{v})\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D}. \quad (\text{A.26})$$

Applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri dell'EQ. (A.26), con l'ipotesi che i coefficienti di viscosità μ e μ' siano uniformi in tutta la massa fluida, si ha:

$$\text{div}\mathbf{T} = \text{grad}p - (\mu + \mu') \text{grad}[\text{div}\mathbf{v}] - \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (\text{A.27})$$

Applicando l'operatore di rotore ad ambo i membri di quest'ultima equazione, e tenendo conto che è sempre $\text{rot}[\text{grad}(\dots)] = 0$, si ha:

$$\text{rot}[\text{div}\mathbf{T}] = -\mu \nabla^2(\text{rot}\mathbf{v}) = -\mu \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (\text{A.28})$$

Pertanto, l'EQ. (A.25) si può esprimere come:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{w} = \rho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \rho \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}). \quad (\text{A.25}_a)$$

Dividendo tutto per la densità ρ (supposta costante in ogni punto dello spazio del moto), e tenendo conto della relazione $\nu = \mu / \rho$, si ottiene:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \quad (\text{A.25}_b)$$

Ora, in base all'espressione della derivata sostanziale del vettore vorticità \mathbf{w} , si ha:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\text{rot}\mathbf{v}). \quad (\text{A.29})$$

È opportuno ricordare che esiste, inoltre, la particolare relazione vettoriale tra due generici vettori \mathbf{b} e \mathbf{c} :^(13.1)

$$\text{rot}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\text{div}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\text{div}\mathbf{b}) + \mathbf{c} \cdot \text{grad}\mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \text{grad}\mathbf{c}. \quad (\text{A.30})$$

Ponendo, in particolare:

- $\mathbf{b} \equiv \mathbf{v}$, vettore velocità;
- $\mathbf{c} \equiv \text{rot}\mathbf{v} = \mathbf{w}$, vettore vorticità;

e considerando che si ha identicamente $\text{div}[\text{rot}\mathbf{v}] = 0$, la precedente relazione vettoriale (EQ. (A.30)) assume l'aspetto:

$$\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = 0 - \mathbf{w}(\text{div}\mathbf{v}) + \mathbf{w} \cdot \text{grad}\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{grad}\mathbf{w} \quad (\text{A.30}_a)$$

Sostituendo l'EQ. (A.30_a) nell'EQ. (A.25_b) si ottiene:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w}(\text{div}\mathbf{v}) - \mathbf{w} \cdot \text{grad}\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}\mathbf{w} \quad (\text{A.25}_c)$$

(13.1) Vedere a tal proposito il testo: "Elementi di Elettromagnetismo" di ROMOLO MARCON; a pag. 32.

Tenendo conto della derivata sostanziale della vorticità \mathbf{w} , si ha

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}\mathbf{w}; \quad (\text{A.31})$$

Equazione generale di bilancio della vorticità

pertanto, l'equazione di bilancio della vorticità per un fluido viscoso compressibile in un generico moto tridimensionale assume la forma generale:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{w} \cdot \text{grad}\mathbf{v} - \mathbf{w}(\text{div}\mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (\text{A.32})$$

Equazione bilancio vorticità fluido incompressibile. Nel caso di fluido incompressibile si ha, come noto, la relazione $\text{div}\mathbf{v} = 0$; pertanto, l'EQ. (A.32) si riduce alla forma:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{w} \cdot \text{grad}\mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (\text{A.33})$$

Appendice

A

A.1.3 Bilancio della vorticità nel caso di moti piani isocori

Si consideri un moto piano $x; y$. Con tale moto si indica un moto dotato della seguente proprietà: esiste un riferimento cartesiano ortogonale $x; y; z$, rispetto al quale il vettore velocità \mathbf{v} ha componente lungo l'asse z identicamente nulla:

$$v_z = 0 \quad (\text{A.34})$$

e componenti secondo gli altri due assi (v_x e v_y) indipendenti dalla stessa coordinata z :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \text{ e } \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Come conseguenza, il vettore velocità sarà esprimibile come:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z 0; \quad (\text{A.36})$$

mentre, il vettore vorticità $\mathbf{w} = \text{rot}\mathbf{v}$ risulterà perpendicolare al piano in questione e quindi dotato di sola componente lungo l'asse z . Infatti, nella definizione generale di rotore della velocità, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \text{rot}\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Considerando le condizioni di moto piano (EQ. (A.34) ed EQ. (A.35)), la vorticità si riduce al vettore:

$$\mathbf{w} = \text{rot}\mathbf{v} = \mathbf{i}_x 0 + \mathbf{i}_y 0 + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.38})$$

Pertanto il vettore vorticità si esprimerà in funzione della sola componente lungo l'asse z :

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}_z w_z = \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.38}_a)$$

Sempre nel caso di moto piano (ad esempio, nel piano $x; y$), il tensore gradiente della velocità, in virtù delle relazioni nell'EQ. (A.34) e nell'EQ. (A.35), si riduce ad un tensore con la III° colonna e la III° riga di elementi tutti nulli:

$$\text{grad}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & | & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & | & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & | & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

A questo punto, eseguendo il prodotto righe per colonne tra il vettore vorticità \mathbf{w} e il tensore $\text{grad}\mathbf{v}$, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}_x 0 + \mathbf{i}_y 0 + \mathbf{i}_z 0; \quad (\text{A.40})$$

ovvero il vettore identicamente nullo: $\mathbf{w} \cdot \text{grad}\mathbf{v} = 0$. Si conclude quindi che, essendo per un moto piano $\mathbf{w} \cdot \text{grad}\mathbf{v} = 0$, l'equazione di bilancio della vorticità nel caso di moto isocoro (EQ. (A.33)), si riduce alla semplice relazione:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \mathbf{w} \quad (\text{A.41})$$

Bilancio della vorticità per fluido incompressibile ideale in moto piano. Nel caso di moto piano di un fluido incompressibile in cui sia possibile trascurare gli effetti della viscosità, l'EQ. (A.41) si riduce alla semplice forma:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = 0, \quad (\text{A.42})$$

dovendo trascurare il termine a secondo membro, dipendente dalla viscosità ν .

A.1.4 Equazione di Beltrami

Si applichi l'operatore di rotore ad ambo i membri dell'espressione vettoriale dell'accelerazione (pag. V, EQ. A.22). Si consideri la componente k -esima di quest'ultima equazione:

$$(\text{rot}\mathbf{a})_k = \frac{\partial}{\partial t} w_k - [\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})]_k; \quad (\text{A.43})$$

si aggiunga a secondo membro la quantità identicamente nulla:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (v_k w_k - v_k w_k) = 0. \quad (\text{A.44})$$

Si può dimostrare che si può arrivare alla seguente relazione:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{a} - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{v}) \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}; \quad (\text{A.45})$$

nota, appunto, come equazione di BELTRAMI. Questa equazione afferma che il tasso di variazione intrinseca nel tempo della vorticità \mathbf{w} è dovuto separatamente alla presenza di accelerazioni rotazionali e, nel caso di un moto in cui è presente già una vorticità iniziale ($\mathbf{w} \neq 0$), alla variazione di volume dell'elemento fluido, ed alla sua distorsione isocora.

Dalla cinematica dei fluidi si può dimostrare che la vorticità è direttamente connessa alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della rotazione rigida locale del fluido:

$$\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A.46})$$

Pertanto, sostituendo nell'EQ. (A.45) l'espressione $\mathbf{w} = 2\boldsymbol{\omega}$, e successivamente dividendo tutto per il fattore 2, si ottiene:

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{a} - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{A.45}_a)$$

Quest'ultima equazione afferma che la variazione intrinseca della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ può essere dovuta:

- alla presenza di un moto con accelerazione rotazionale;
- e, se il fluido possiede già una velocità angolare $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, alla:
- velocità di variazione del volume (contrazioni/dilatazioni della massa fluida);
- alle distorsioni a volume costante del fluido.



NOTA. Avendo supposto come forze di massa la sola forza gravitazionale, si deduce che, mancando coppie esterne agenti sui singoli elementi fluidi, la velocità di rotazione angolare di questi, se diversa da zero, muta solo a seguito di alterazioni del loro momento d'inerzia, connesse a variazioni del loro volume o della loro forma.

A.1.5 Equazione di bilancio della vorticità nel caso bidimensionale ricavata direttamente dalle proiezioni dell'equazione di Navier Stokes (per fluido incomprimibile)

Nel caso bidimensionale – ad esempio nel solito piano $x; y$ – si è visto che il rotore della velocità è orientato perpendicolarmente a tale piano, presentando quindi la sola componente ungo l'asse z :

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}_z w_z = \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.47})$$

Per un fluido viscoso incomprimibile, le proiezioni dell'Equazione di Navier Stokes, rispetto ad un riferimento inerziale, assumono la forma:

- per la componente x :

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x_k^2} = \frac{Dv_x}{Dt} \quad (\text{A.48})$$

- per la componente y :

$$f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v_y}{\partial x_k^2} = \frac{Dv_y}{Dt}. \quad (\text{A.49})$$

Derivando parzialmente rispetto ad y la proiezione dell'equazione di Navier Stokes sull'asse x , si ottiene:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x_k^2} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{Dv_x}{Dt} \right]. \quad (\text{A.50})$$

Applicando il teorema di SCHWARTZ sull'invertibilità dell'ordine di derivazione per le derivate parziali, si ha per il termine a II° membro:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{Dv_x}{Dt} \right] = \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]; \quad (\text{A.51})$$

in quanto, le derivate sostanziali risultano costituite da somme di derivate parziali. Anche per i termini dipendenti dalla viscosità, applicando il teorema di Schwartz, si ottiene:

$$v \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x_k^2} \right] = v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right);$$

$$v \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x_k^2} \right] = v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

Quindi, l'EQ. (A.50) assume l'aspetto:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \quad (\text{A.52})$$

Analogamente, derivando parzialmente rispetto ad x la proiezione dell'equazione di Navier Stokes sull'asse y , si ottiene:

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} \right]. \quad (\text{A.53})$$

A questo punto, basta sottrarre membro a membro dall'EQ. (A.53) l'EQ. (A.52) ed ottenere così:

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] =$$

$$= \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (\text{A.54})$$

Tenendo conto del fatto che le forze di massa si ipotizzano conservative – quindi esprimibili in funzione di un potenziale scalare ϕ – risulta:

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0;$$

inoltre, sempre per il teorema di Schwartz, si ha:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0.$$

Pertanto, l'EQ. (A.54) si riduce alla forma:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right], \quad (\text{A.55})$$

e tenendo conto del vettore vorticità nel piano $x; y$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}_z w_z = \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

l'EQ. (A.55) assume l'aspetto:

$$\frac{D}{Dt} w_z = \nu \frac{\partial^2 w_z}{\partial x_k^2}; \quad (\text{A.56})$$

che, moltiplicando ambo i membri per il versore \mathbf{i}_z , in termini vettoriali assume la forma:

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \mathbf{w}$$

dell'equazione, già ricavata per altra via, a pag. VIII, (EQ. A.41).

Bibliografia

[1] *Acquedotti*; VALERIO MILANO;

[2] *Dispense "Dinamica degli Inquinanti"* anno accademico 89-90; Università degli Studi di Roma "La Sapienza"; Corso di Dinamica degli Inquinanti. Prof. VIOTTI;

[3] *Idraulica*; D. CITRINI; G. NOSEDA;

[4] *Meccanica dei Fluidi*; E. MARCHI; A. RUBATTA.

