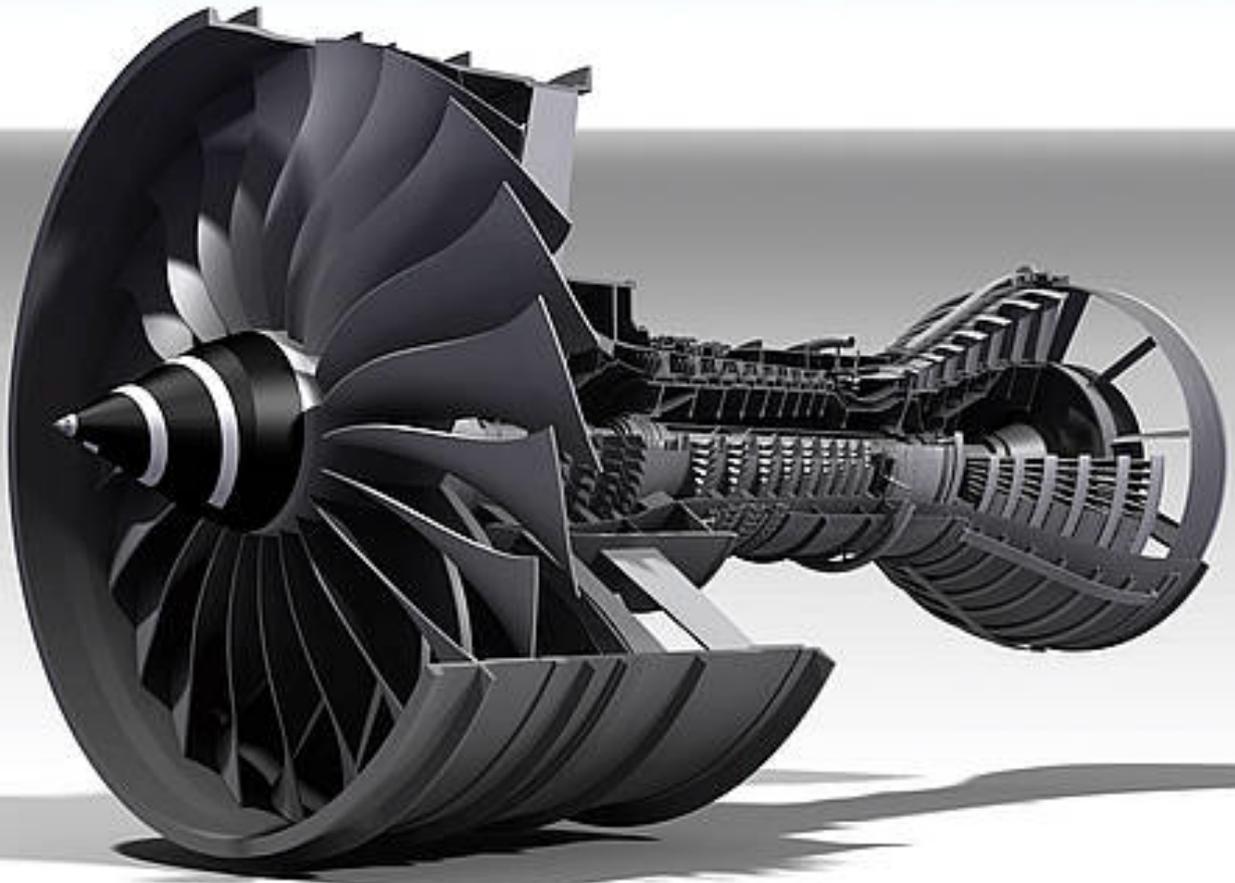


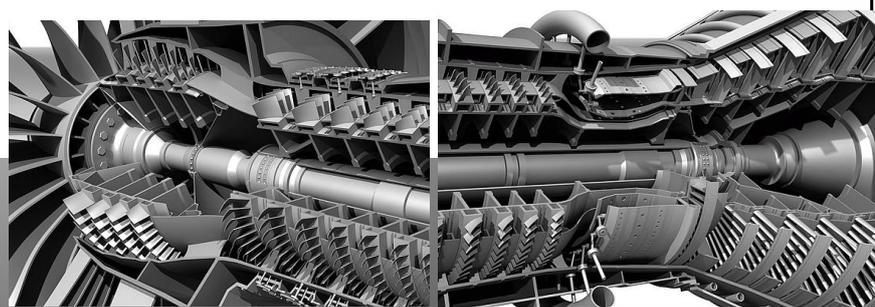
DEMO - COPIA DI VALUTAZIONE - luglio 2017

# MACCHINE A FLUIDO

Equazioni fondamentali  
Termodinamica e Fluidodinamica



Carlo Sigmund



## Ingegneria

M e c c a n i c a

Idraulica applicata alle Macchine

[Link per acquisto online](#)

First Edition

• Ebook •



Copyright © 2015 [carlo.sigmund@tiscali.it](mailto:carlo.sigmund@tiscali.it)

All rights reserved. No part of this work may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the publisher.

Contact [carlo.sigmund@tiscali.it](mailto:carlo.sigmund@tiscali.it)

*Editore e autore: Carlo Sigmund*

*Foto in copertina: [www.academy.3ds.com/projects/showroom](http://www.academy.3ds.com/projects/showroom)*

*Prima edizione, Febbraio 2015*

**Sigmund Carlo**

**Termodinamica e Fluidodinamica delle Macchine**

**ISBN n.: 978-1-326-10664-5**

**Titolo del libro: Termodinamica e Fluidodinamica delle Macchine  
Meccanica, Macchine a Fluido.**

*Nessuna parte del presente documento può essere riprodotta, memorizzata in un sistema che ne permetta l'elaborazione, né trasmessa in qualsivoglia forma e con qualsivoglia mezzo elettronico o meccanico, né può essere fotocopiata, riprodotta o registrata altrimenti, senza proprio consenso scritto dell'editore, tranne nel caso di brevi citazioni contenute in articoli di critica o recensioni.*

*La presente pubblicazione contiene opinioni dell'autore e ha lo scopo di fornire informazioni precise e accurate. L'elaborazione dei testi, anche se curata con scrupolosa attenzione, non può comportare specifici responsabilità in capo all'autore e/o all'editore per eventuali errori, refusi e/o incertezze.*

*L'autore detiene i diritti per tutti i testi, le tabelle e le illustrazioni contenute in questo documento.*

Ammettendo di poter confondere la velocità media delle altezze generatrici delle velocità locali con l'altezza generatrice della velocità media, si può scrivere:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = - \frac{V_i^2}{2g} \gamma Q + \frac{V_u^2}{2g} \gamma Q. \quad (II.5)$$

Dunque, ritornando all'equazione EQ. (II.4\_c), sostituendo in essa le relazioni viste sopra e riordinando opportunamente, si arriva alla:

$$- \frac{V_i^2}{2g} \gamma Q + \frac{V_u^2}{2g} \gamma Q - \rho g Q (z_i - z_u) - \left( \int_{A_i} p v dA_i - \int_{A_u} p v dA_u \right) = \mathcal{P}_{est} - \mathcal{P}_d. \quad (II.6)$$

A questo punto si può tenere conto del fatto che la portata volumetrica in transito attraverso le sezioni  $A_i$  e  $A_u$  è la stessa:

$$Q = \int_{A_i} v dA_i = \int_{A_u} v dA_u.$$

Ipotesi di corrente lineare e potenza idraulica di una corrente fluida.

Per cui, ricordando la definizione di potenza della corrente fluida in una sezione finita attraversata perpendicolarmente dalle traiettorie (ipotesi di corrente lineare nelle sezioni di ingresso e uscita), si scrive:

$$H \rho g Q = H \gamma Q = \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right) \gamma Q.$$

Pertanto, in riferimento alla EQ. (II.6):

$$\gamma Q \Delta \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right) = \mathcal{P}_{est} - \mathcal{P}_d. \quad (II.6_a)$$

**Teorema della potenza cinetica**

L'equazione EQ. (II.6\_a) illustra il significato del teorema della potenza cinetica applicato alla massa fluida evolvente: l'incremento del carico effettivo  $H$  dell'unità di peso della massa fluida, moltiplicato per la portata in peso, risulta uguale alla potenza meccanica (indicata col simbolo  $\mathcal{P}_{est}$  che, in virtù di quanto detto a pag. 22, coincide con la potenza trasmessa attraverso il contorno laterale  $A_p$  da una macchina esterna con cui il fluido scambia energia) depurata di quella frazione di potenza che viene invece dissipata in calore dagli attriti, internamente al volume fluido.

In generale, per un fluido compressibile o incompressibile, si può dedurre il concetto fondamentale:

Il fluido riceve dall'esterno energia meccanica (=10). Di questa energia, una parte (=4) viene trasformata (dissipata nei lavori di deformazione e variazione del volume fluido) in calore dagli attriti, andando quindi ad incrementare l'energia interna (aumentando l'entropia del fluido). La restante parte (=6) va ad incrementare tutte le altre forme di energia possedute dal fluido: potenziale, di pressione e cinetica.

In via del tutto generale, qualsiasi sia lo stato in cui si presenta il fluido (liquido, aeriforme) possiamo adattare la EQ. (II.6\_a) nella forma più generale:

$$\gamma Q \Delta H = \mathcal{P}_{est} - \mathcal{P}_d, \quad (II.6_b)$$

avendo indicato con  $H$  l'energia meccanica totale dell'unità di peso della corrente fluida:

$$H = z + \int \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}.$$

### 2.2.2 L'equazione dell'energia per i fluidi nel caso generale

L'equazione del I principio della termodinamica per i fluidi può essere espressa concettualmente tramite la seguente equazione in forma indefinita<sup>(2.10)</sup> e in termini di potenze, riferite all'unità di massa fluida:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (\mathcal{P}_t + \mathcal{P}_d) - \frac{p}{\rho} \text{div}\mathbf{v}. \quad (\text{II.7})$$

Coerentemente con il bilancio dell'energia termodinamica espresso dalla **EQ. (II.7)**, per una massa fluida costante contenuta nel volume  $V$ <sup>(2.11)</sup> è possibile esprimere il suddetto bilancio in forma integrale. Infatti, moltiplicando l'**EQ. (II.7)** per  $dm = \rho dV$  e integrando su tutto il volume  $V$ , si ottiene:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = (\mathcal{P}_t + \mathcal{P}_d) - \left[ \int_V p(\text{div}\mathbf{v}) dV \right]}. \quad (\text{II.8})$$

**Caso di fluido comprimibile ideale**

Nel caso di fluido comprimibile ideale, il I principio della termodinamica si riduce all'espressione:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \mathcal{P}_t - \left[ \int_V p(\text{div}\mathbf{v}) dV \right]. \quad (\text{Solo per fluido ideale comprimibile}).$$

**Caso di fluido comprimibile reale**

Ritornando al caso di fluido reale, tenendo presente la relazione a pag. 29, (**EQ. II.19**), il I° Principio della Termodinamica si scrive, in termini di bilancio dell'energia interna<sup>(2.12)</sup>:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \mathcal{P}_t + \left[ \mathcal{P}_d - \int_V p(\text{div}\mathbf{v}) dV \right] = \mathcal{P}_t + \left[ - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \right]. \quad (\text{II.8}_a)$$

dove con  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{T}$  si sono indicati, rispettivamente, il tensore delle velocità di deformazione e il tensore degli sforzi. L'equazione **EQ. (II.8\_a)** informa palesemente che tutta la parte di potenza meccanica sintetizzata dal termine

$$- \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV$$

non incrementando l'energia della corrente fluida (vedere in proposito l'**EQ. (II.17)**) deve, invece, incrementare la sola energia interna del fluido:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \mathcal{P}_t + \left[ - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \right]}. \quad (\text{II.8}_b)$$

**Caso generale di fluido**

Nel caso generale di fluido comprimibile, non potendosi più accettare la condizione  $\text{div}\mathbf{v} = 0$ , nel bilancio dell'energia cinetica, bisogna considerare i lavori di deformazione ( $-\mathbf{T} : \mathbf{D}$ ) per unità di volume della massa fluida.

(2.10) Vedere "Meccanica dei Fluidi" a pag. 85.

(2.11) Si noti che, nell'ipotesi di fluido ideale ( $\mathcal{P}_t = 0$ ), la potenza legata al termine  $p \text{div}\mathbf{v}$  si traduce in un incremento dell'energia interna, assieme ad eventuali apporti ( $\mathcal{P}_t$ ) di calore forniti dall'esterno. Vedere "Meccanica dei Fluidi" a pag. 179-180.

(2.12) Bisogna notare che nel caso di fluido reale ( $\mu' \neq 0$  e  $\mu \neq 0$ ) non ci sono solamente attriti di taglio puro ( $\mu$ ) per scorrimento, ma sono presenti anche attriti legati al fatto che il fluido, essendo comprimibile, è sottoposto a variazioni di volume:  $\mu' \text{div}\mathbf{v} \neq 0$ .

Nell'equazione di pag. 21, (EQ. II.4):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \left( \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \mathcal{P}_d \right) = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}_d,$$

si erano considerate, avendo supposto implicitamente per ipotesi  $div \mathbf{v} = 0$ , le sole deformazioni per distorsione a volume costante, imputabili quindi al solo termine  $\mathcal{P}_d$  presente. Ora, potendo essere  $div \mathbf{v} \neq 0$ , e dall'esame dell'equazione termodinamica EQ. (II.8) del I principio, si riconosce che i termini legati alla  $div \mathbf{v}$  contribuiscono a variare l'energia interna della massa fluida e non l'energia cinetica.

Si consideri, dunque, il termine integrale:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA \quad (II.9)$$

Esso conviene scinderlo, nel caso generale di fluido reale, formalmente in due soli contributi: uno che tiene conto delle forze trasmesse da corpi solidi rotanti; l'altro che tiene conto delle forze trasmesse da corpi solidi fissi e delle forze comunicate al volume  $V$  dalle altre masse fluide ad esso contigue, attraverso il suo contorno  $A$ . Più in dettaglio:

1. un termine dovuto alla potenza scambiata con un'eventuale macchina esterna, attraverso il suo contorno laterale  $A_p$ , che risulta a contatto con le palettature della macchina e contemporaneamente immerso nel volume  $V$ ;
2. l'altro termine è legato, in generale, alla potenza trasmessa dagli sforzi normali e di attrito  $\boldsymbol{\tau} = p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}^*$  agenti solo sul contorno  $A - A_p$  della massa fluida e dovuti a queste sole forze: forze di taglio e di pressione applicate al fluido dalle altre masse fluide ad esso contigue e forze di contatto con eventuali superfici solide fisse di contenimento.

Puntualizzando il fatto che un fluido interagisce con le superfici solide di contenimento (che sono immobili e con le quali viene in contatto) aderendo ad esse ( $\mathbf{v} = 0$ ), si può scegliere il volume di controllo (e quindi la superficie  $A$ ) del fluido in modo tale che risulti:<sup>(2.13)</sup>

$$\int_{A_{laterale}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}^* dA = 0, \quad (II.10)$$

pur essendo presente su parte di  $A - A_p - A_i - A_u \equiv A_{laterale}$  una forza di trascinamento non nulla:  $\boldsymbol{\tau}^* dA \neq 0$ , ma appunto con fluido aderente su di essa:  $\mathbf{v} = 0$ .

$A_i$  e  $A_u$  sono le sezioni di entrata e uscita del fluido dal volume di controllo  $V$ . In particolare,  $A_i$  e  $A_u$  sono scelte tali che le traiettorie del flusso sono rettilinee; per cui in tali superfici sono presenti solo sforzi di pressione. Pertanto:

$$\int_{A - A_p - A_{laterale}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}^* dA = 0; \text{ ovvero è come dire: } \int_{A_i + A_u} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}^* dA = 0.$$

**Interazione del fluido con parti meccaniche in movimento**

Per cui, tenendo conto anche di eventuali scambi di potenza meccanica con macchine esterne attraverso il contorno laterale  $A_p$  del fluido, si può scrivere per le potenze trasmesse attraverso il contorno della massa fluida nel suo moto:

(2.13) All'atto pratico, se il fluido evolve in un condotto, si può scegliere le sezioni di entrata  $A_i$  e di uscita  $A_u$  in modo che il fluido le intersechi perpendicolarmente e con traiettorie parallele (conseguenza: su di esse solo sforzi di pressione). Contemporaneamente la porzione di superficie fluida aderente e ferma sulle superfici di contenimento del condotto non contribuisce allo scambio di potenza. (Per siffatte superfici vale l'equazione (II.10)).

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \int_{A - A_p - A_{laterale}} \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA . \quad (II.11)$$

A questo punto, unicamente per agevolare la scrittura e i calcoli, si può osservare che la superficie  $A_p$ , essendo in contatto con soli corpi solidi in movimento, non può ricevere ovviamente scambi di potenza né per contatto con altre porzioni di fluido a pressioni  $p$ , né tantomeno con parti solide di corpi fissi. In particolare, sulla superficie  $A_p$  non esiste alcun valore di pressione  $p$  imputabile a masse fluide esterne in contatto con  $A_p$ . Ciò può essere evidenziato matematicamente, scrivendo:

$$\int_{A_p} \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA \equiv 0 . \quad (II.12)$$

Inoltre, essendo il fluido aderente sulla superficie laterale del volume di controllo, si ha anche:

$$\int_{A_{laterale}} \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA \equiv 0 . \quad (II.13)$$

Ciò posto, senza che nulla cambi dal punto di vista del risultato dell'integrazione, sommando i due termini nulli (EQ. (II.12); EQ. (II.13)) nell'EQ. (II.11), si ottiene la seguente relazione, scritta in forma generale:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \int_A \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA . \quad (II.14)$$

In questo modo, si è ricondotto il calcolo dell'integrale di superficie a I° membro della EQ. (II.12), alla somma di un integrale dipendente dalle pressioni esercitate su  $V$  dal fluido esterno contiguo, e da un integrale dipendente dalla presenza di una macchina che interagisce col fluido al suo interno.

In particolare, l'integrale dipendente dalle sole pressioni (come appare nell'EQ. (II.14)), nell'ipotesi particolare di fluido barotropico ( $t(\rho, p) = 0$ ) può essere sviluppato riducendolo alla forma<sup>(2.14)</sup>:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA = - \int_V p(\text{div} \mathbf{v}) dV - \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV , \quad (II.15)$$

È da notare che la frazione di potenza meccanica che è responsabile della variazione del volume della massa fluida, esiste anche, ovviamente, nell'ipotesi di fluido ideale. In tal caso, infatti, parte della potenza (integrale dipendente da  $\text{div} \mathbf{v}$ ) andrà ad incrementare l'energia interna del fluido, dopo aver variato il volume  $V$  del fluido stesso. Quindi, inserendo l'EQ. (II.15) dentro l'EQ. (II.14), si ha l'espressione generale della potenza meccanica globale che le forze di superficie trasmettono alla massa fluida:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \left[ - \int_V p(\text{div} \mathbf{v}) dV \right] - \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV ,$$

$\downarrow$   
 $\dot{m} L_{est}$   
 Potenza macchina esterna

$\swarrow \searrow$   
 $\int - \dot{m} d(pv)$   
 Potenza di spostamento (netto)

(II.16)

ovviamente, tale potenza meccanica di superficie andrà ad incrementare sia l'energia interna che l'energia cinetica della massa fluida di volume  $V$ .

(2.14) Vedere procedimento sul MARCHI RUBATTA a pag. 177.



Durante il moto, parte della potenza meccanica di spostamento verrà degradata andando ad incrementare, in calore, l'energia interna del volume fluido.

Si dimostra (sfruttando l'EQ. (II.19)), che dalla EQ. (II.16) è possibile scrivere la seguente relazione:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \left[ - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \mathcal{P}_d \right] - \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV. \quad (\text{II.16}_a)$$

Inoltre, tralasciando i vari calcoli, è possibile trasformare l'integrale di superficie degli sforzi nella somma di due integrali di volume<sup>(2.15)</sup>:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} dV. \quad (\text{II.17})$$

**NOTA:**  
L'integrale di volume, dipendente dal termine  $-\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} dV$ , rappresenta la frazione di potenza meccanica efficace (trasmessa dalle forze di superficie) che si trasforma integralmente in variazione (nell'unità di tempo) dell'energia cinetica della massa fluida  $V$ .

Dal punto di vista del bilancio globale delle energie (nella forma dell'EQ. (II.2)), tale relazione ribadisce che la potenza meccanica trasmessa dagli sforzi di superficie ( $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA$ ) consta di una parte che si trasforma integralmente in variazione di energia cinetica ( $-\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} dV$ ), e la rimanente parte ( $-\mathbf{T} : \mathbf{D} dV$ ) – assieme all'eventuale contributo  $\mathcal{P}_t$  – che influisce solo sulla variazione di energia interna.

Basta, infatti, ricordare la *prima equazione indefinita del moto*:

$$\rho \mathbf{f} - \text{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt},$$

e il relativo teorema dell'energia cinetica (computato in termini di potenze):

$$\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{1}{2} v^2 \right\}.$$

Confrontando assieme le due equazioni EQ. (II.16\_a) e EQ. (II.17), si arriva a stabilire che esiste questo legame:

Il termine di dissipazione  $\mathcal{P}_d$  può essere visto – dal punto di vista del bilancio della sola energia cinetica – come il lavoro dissipativo che ostacola l'incremento di energia cinetica. Dal punto di vista globale delle energie, invece, tale termine dissipativo testimonia l'avvenuta trasformazione in calore di quella quota di potenza meccanica che non è andata ad incrementare l'energia cinetica del fluido.

$$\left\{ \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ - \int \frac{dp}{\rho} \right] dV \right\} - \mathcal{P}_d = - \int_V \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} dV. \quad (\text{II.18})$$

$\int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p$  → Potenza macchina esterna  
 $\int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ - \int \frac{dp}{\rho} \right] dV$  → Potenza delle pressioni (potenza meccanica trasmessa: non comprende il lavoro di dilatazione/contrazione)  
 $\mathcal{P}_d$  → Frazione di potenza meccanica dissipata in calore all'interno del volume fluido.

Ovvero, la potenza trasmessa dall'esterno (tramite una macchina operatrice) sul contorno  $A_p$  della massa fluida  $V$ , e la potenza di *pulsione* esercitata contemporaneamente dalle pressioni del fluido esterno<sup>(2.16)</sup> (a contatto con la massa fluida di volume  $V$  in esame) non vengono convertite integralmente in aumento di energia cinetica, ma una loro frazione viene sottratta e trasformata come calore  $\mathcal{P}_d$  a causa del lavoro dissipativo degli attriti all'interno della massa fluida.

Si può notare nell'equazione EQ. (II.16) che il termine responsabile di parte dell'incremento dell'energia interna, in virtù dell'equazione EQ. (II.8) è:

$$- \int_V p(\text{div} \mathbf{v}) dV.$$

(2.15) vedere "Meccanica dei Fluidi" pag. 82 e 256.

(2.16) Lavori di "introduzione" e di "espulsione" dal volume di controllo. Potenza di spostamento della massa fluida  $V$  ad opera delle masse fluide ad essa contigue.

Incremento dell'energia interna del fluido

In particolare, osservando l'equazione EQ. (II.8) e l'analogia EQ. (II.8\_a), si può notare che il termine contenente il *doppio prodotto scalare* dei due tensori **T** e **D** contribuisce all'incremento dell'energia interna del fluido, in quanto si può dimostrare che è valida la seguente relazione<sup>(2.17)</sup>:

$$-\int_V p(\text{div}\mathbf{v}) dV + \mathcal{P}_d = \left\{ -\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \right\}.$$

$-\int_V \dot{m} p dv$       Entità della potenza di deformazione: distorsioni isocore.

Potenza di contrazione/dilatazione

(II.19)

Tale equazione illustra che la natura delle dissipazioni globali meccaniche ( $-\mathbf{T} : \mathbf{D}$ ) si traducono in un apporto di potenza termica ( $\mathcal{P}_d$ ) di deformazione (che va ad aumentare l'entropia del fluido) e in un apporto di potenza spesa per esercitare dei movimenti di contrazione/dilatazione al volume della massa fluida ( $\text{div}\mathbf{v} \neq 0$ ), traducibile come variazione di energia interna. (Vedere a tal proposito l'EQ. (II.17)).

In altri termini, il bilancio dell'energia cinetica si può scrivere, per un fluido compressibile:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \frac{1}{2} v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \left\{ \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \left( -\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \right) \right\}. \quad (II.20)$$



Tenendo conto di quello fino ad ora detto, si riconosce che l'equazione a pag. 21, (EQ. II.4) del bilancio dell'energia cinetica non risulta corretta se  $\text{div}\mathbf{v} \neq 0$ . Nel caso generale di fluido reale, la frazione di potenza meccanica ( $\mathcal{P}_m$ ) che riesce ad incrementare la potenza cinetica del fluido (vedere infatti l'EQ. (II.18) e anche l'EQ. (II.23)) è data da questa espressione:

$$-\int_V \mathbf{v} \cdot \text{div}\mathbf{T} dV = \left\{ \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p \right\} + \left( \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ -\int \frac{dp}{\rho} \right] dV - \mathcal{P}_d \right) =$$

$$= \{ \dot{m} L_{est} \} + (\mathcal{P}_m^{(effettiva)}).$$

Potenza di macchina esterna.      Potenza meccanica netta delle forze di superficie, che incrementa la sola energia cinetica della massa fluida, nell'unità di tempo.

(II.21)

**Equazione di bilancio della potenza cinetica (Teorema delle forze vive)**

Per cui, l'equazione del teorema della potenza cinetica deve essere riformulato nella forma più generale:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \left\{ \int_{A_p} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA_p + \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ -\int \frac{dp}{\rho} \right] dV \right\} - \mathcal{P}_d$$

$\dot{m} \Delta(C^2/2)$       Variazione energia cinetica nell'unità di tempo.      Potenza macchina esterna.

$-\int_V \dot{m} v dp$       Potenza meccanica di superficie (potenza delle pressioni esterne: non comprende la potenza di dilatazione/compressione).

Frazione della potenza meccanica dissipata in calore all'interno del volume fluido.

(II.22)

(2.17) Fare riferimento alla nota (2.15).



NOTA. L'EQ. (II.22) informa che, nel bilancio dell'energia cinetica nell'unità di tempo, la potenza meccanica trasmessa attraverso le forze di superficie ( $-\dot{m} v dp$ ) non viene integralmente trasformata in aumento di energia cinetica, ma una sua frazione ( $\mathcal{P}_d$ ) viene dissipata in calore all'interno del volume della massa fluida. Per cui, la quota parte di potenza meccanica di superficie  $\mathcal{P}_{m\ sup}^{(effettiva)}$  che effettivamente incrementa l'energia cinetica è data dalla quantità:

$$\mathcal{P}_{m\ sup}^{effettiva} \equiv -\int \dot{m} v dp - \mathcal{P}_d < -\int \dot{m} v dp. \quad (II.23)$$

Un'altra forma del bilancio delle potenze cinetiche è dato dalla seguente equazione:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \left( \mathcal{P}_d - \int_V p(\operatorname{div} \mathbf{v}) dV \right). \quad (II.24)$$

Infatti, il termine

$$\left( \mathcal{P}_d - \int_V p(\operatorname{div} \mathbf{v}) dV \right),$$

assieme all'eventuale termine  $\mathcal{P}_t$ , va ad incrementare l'energia interna del fluido: vedere EQ. (II.7), e vedere anche l'equazione a pag. 18, (EQ. II.2).

Si può ricavare, inoltre, che esiste la seguente relazione nell'ipotesi di conservazione della massa fluida e con  $\phi = -gz$ :

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV = \int_V \rho \frac{D\phi}{Dt} dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \phi dV,$$

L'equazione delle potenze cinetiche assume, quindi, l'aspetto:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \phi dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \left( \mathcal{P}_d - \int_V p(\operatorname{div} \mathbf{v}) dV \right). \quad (II.25)$$

Sommando membro a membro l'equazione delle potenze cinetiche (nella forma dell'EQ. (II.25)) all'equazione del I principio della termodinamica (nella forma dell'equazione EQ. (II.8)), risulta che:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV &= \frac{D}{Dt} \int_V \rho \phi dV + (\mathcal{P}_t + \mathcal{P}_d) + \\ &- \int_V p(\operatorname{div} \mathbf{v}) dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA - \left( \mathcal{P}_d - \int_V p(\operatorname{div} \mathbf{v}) dV \right). \end{aligned} \quad (II.26)$$

Da cui, eliminando i termini di segno opposto:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV - \frac{D}{Dt} \int_V \rho \phi dV = \mathcal{P}_t + \left[ \int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA \right]. \quad (II.27)$$

Inoltre, ricordando l'equazione EQ. (II.17):

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dA = \left[ -\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_V \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} dV \right], \quad (II.28)$$

e inglobandola nell'equazione EQ. (II.27), si ottiene:

**NOTA:**  
È importante rimarcare che la potenza meccanica  $-\dot{m} v dp$  non comprende la potenza di dilatazione/contrazione; in quanto quest'ultimo non contribuisce a variare l'energia cinetica, ma solo l'energia interna.

A questo punto, inserendo l'equazione **EQ. (II.36)** nell'equazione **EQ. (II.34)**, si ottiene:

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} = \frac{D\mathcal{U}}{Dt} - \int_A \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA . \quad (\text{II.34}_a)$$

Questa equazione mostra in modo chiaro la natura energetica della funzione di stato entalpia, che appare così caratterizzata essenzialmente da energie di pressione (integrale di superficie) e di temperatura (energia interna).

Inoltre, ricordando la relazione a pag. 27, (**EQ. II.15**):

$$\int_A \mathbf{v} \cdot p \mathbf{n} dA = - \int_V p(\text{div} \mathbf{v}) dV - \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV ,$$

$\int - \dot{m} d(pv)$   
 Potenza di spostamento (netto):  
 aumenta sia l'energia cinetica  
 che l'energia interna.

$- \int \dot{m} v dp$   
 Potenza meccanica di superficie  
 (potenza delle pressioni esterne:  
 non comprende la potenza di  
 dilatazione/compressione).  
 Aumenta sia l'energia cinetica che  
 l'energia interna.

$-\int \dot{m} p dv$   
 Potenza di contrazione/dilatazione:  
 non aumenta l'energia cinetica, ma  
 solo l'energia interna.

si vede che vale la relazione:

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} = \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \int_V p(\text{div} \mathbf{v}) dV + \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV , \quad (\text{II.37})$$

L'equazione **EQ. (II.37)** è equivalente all'equazione a pag. 31, (**EQ. II.31**), utilizzata per quantificare il bilancio dell'entalpia specifica.

Inglobando il I principio della termodinamica (nella forma dell'**EQ. (II.8)**), all'interno dell'equazione **EQ. (II.37)**, si ottiene:

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} = (\mathcal{P}_t + \mathcal{P}_d) + \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV . \quad (\text{II.38})$$

Ovvero, per la conservazione della massa e per il teorema del trasporto:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho i dV = (\mathcal{P}_t + \mathcal{P}_d) + \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left[ \int \frac{dp}{\rho} \right] dV . \quad (\text{II.39})$$

Questa equazione equivale al I principio della termodinamica formulato in termini entalpici.

### 2.2.4 Osservazioni sul primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica, a tutti noto anche nella semplice forma<sup>(2.19)</sup>:

$$\Delta \mathcal{U} = Q - \mathcal{L} \quad (\text{II.40})$$

(2.19) In alcuni casi conviene (per convenzione) attribuire segno positivo al lavoro  $L$  acquistato dal fluido. In tal caso,  $L > 0$  tende ad aumentare il contenuto energetico della corrente fluida:  $\Delta U > 0$ . [Vedere "Silvestroni" a pag. 88 nota 12].

esprime il bilancio delle energie che intervengono durante la trasformazione di un sistema termodinamico: energia termica (totale)  $Q$  e frazione  $L$  di energia meccanica che non contribuisce ad aumentare l'energia cinetica del sistema.

Nel caso particolare che il sistema sia un fluido, utilizzando le notazioni usate fino ad ora, possiamo esprimere il I principio della termodinamica in modo molto simile all'equazione **EQ. (II.40)**, (in termini di potenze):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \tau \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV - p \frac{D}{Dt} \int_V dV, \quad (\text{II.41})$$

L'equazione **EQ. (II.41)** è stata ricavata partendo dalla nota equazione che lega l'energia interna  $\mathcal{U}$  all'entropia  $\mathcal{E}$ :

$$d\mathcal{U} = \tau d\mathcal{E} - p dV. \quad (\text{II.42})$$

Dall'esame dell'integrale a primo membro dell'equazione **EQ. (II.41)**, ammettendo la conservazione della massa fluida e sfruttando il teorema del trasporto, si ricava:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{u} dV.$$

Analogamente, per la definizione di entropia (in termini di potenze), in virtù della conservazione della massa e del teorema del trasporto:

$$\tau \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \tau \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV,$$

l'equazione **EQ. (II.42)** risulta trasformata nella forma equivalente:

$$\int_V \frac{D\rho}{Dt} \mathbf{u} dV = \tau \int_V \frac{De}{Dt} \rho dV - p \frac{D}{Dt} \int_V dV.$$

Inoltre, risulta dal teorema del trasporto (applicata alla funzione costante  $b = 1$ ):

$$\int_V (div \mathbf{v}) dV = \frac{D}{Dt} \int_V dV.$$

Se il fluido risulta sottoposto a pressione e temperatura uniformi, l'**EQ. (II.41)** deve fornire la seguente relazione differenziale:

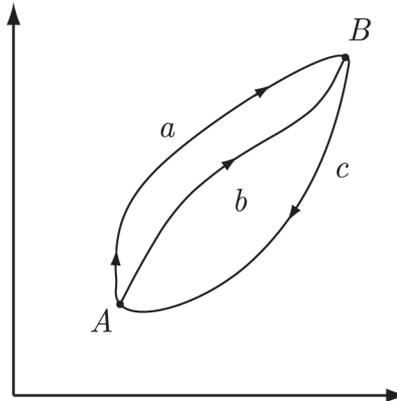
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \tau \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} div \mathbf{v}.$$

Tale relazione dimostra l'esistenza del legame che esiste tra la variazione di energia interna specifica e la velocità di variazione del volume unitario della massa fluida, come sta a testimoniare la presenza della  $div \mathbf{v}$  nell'equazione precedente. Si può osservare che tutti i lavori di deformazione (distorsione a volume costante e dilatazione/contrazione) della massa fluida da parte degli attriti non contribuiscono affatto alla variazione dell'energia cinetica, ma contribuiscono solamente ad aumentare l'energia interna del fluido. Ciò perché, durante il moto, i lavori di deformazione vengono assorbiti dalla massa fluida e trattenuti sotto forma di calore. Questa particolare trasformazione di parte dell'energia meccanica, attuandosi attraverso dei processi irreversibili, si traduce in un aumento anche dell'entropia del fluido. Come conseguenza, il fluido risulta "incapace" di trasformare integralmente l'energia fornitagli dall'esterno in forme di energia potenzialmente e successivamente sfruttabili.

**Nota importante**



**Figura 3.1**  
Tre generici percorsi  
reversibili che uniscono  
due stati estremi  $A$  e  $B$ .



$$(Q_{tot} - \mathcal{L})_a + (Q_{tot} - \mathcal{L})_c = 0 \quad (\text{trasformazione ciclica } a+c);$$

$$(Q_{tot} - \mathcal{L})_b + (Q_{tot} - \mathcal{L})_c = 0 \quad (\text{trasformazione ciclica } b+c).$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$(Q_{tot} - \mathcal{L})_a - (Q_{tot} - \mathcal{L})_b = 0 \quad (\text{III.4})$$

cioè:

$$(Q_{tot} - \mathcal{L})_a = (Q_{tot} - \mathcal{L})_b. \quad (\text{III.4}_a)$$



NOTA. Si deduce che la quantità  $Q_{tot} - \mathcal{L}$  non dipende dunque dalla trasformazione; essa può solo essere funzione degli stati  $A$  e  $B$ .

$$Q_{tot} - \mathcal{L} = f(A;B). \quad (\text{III.5})$$

È opportuno ricordare che, separatamente, sia  $Q_{tot}$  che  $\mathcal{L}$  dipendono oltreché dagli stati  $A$  e  $B$  anche dalla particolare trasformazione seguita.

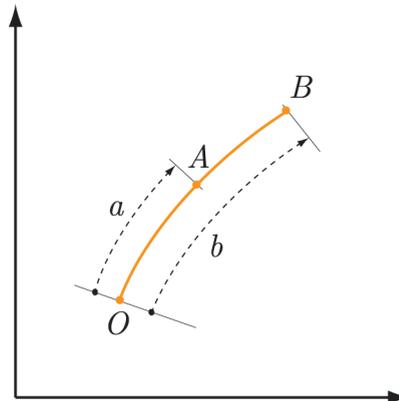
Un familiare esempio del fatto che i valori  $Q_{tot}$  e  $\mathcal{L}$  variano col variare del cammino percorso oltre che dagli estremi  $A$  e  $B$  è il seguente: si considerino due quantità uguali di benzina di cui una viene impiegata come combustibile (cioè bruciata) e l'altra impiegata come carburante (in un motore a scoppio). Il valore della funzione  $f(A;B)$  è uguale nei due casi: si parte da condizioni ambiente medesime e si ritorna nelle medesime condizioni ambiente (temperatura e pressione del luogo in cui si effettua l'esperimento). Ebbene, nel primo processo il calore prodotto è maggiore che nel secondo, perché in quest'ultimo c'è anche produzione di lavoro di espansione ( $p dv > 0$ ) sullo stantuffo del cilindro.

Ora basta dimostrare che la funzione  $f(A;B)$  può essere scritta nella forma

$$f(A;B) = u(B) - u(A) \quad (\text{III.6})$$

cioè come differenza fra i valori che una stessa funzione di stato termodinamica  $u(p;v;T\dots)$  assume rispettivamente negli stati  $B$  (finale) ed  $A$  (iniziale). A tal fine si consideri una trasformazione che a partire da uno stato di riferimento  $O$  (arbitrario) porta il sistema prima nello stato  $A$  e poi nello stato  $B$ . Si chiami  $a$  la trasformazione da  $O$  ad  $A$ ; e  $b$  la trasformazione da  $O$  a  $B$ . In virtù dell'EQ. (III.6) si può scrivere:

**Figura 3.2**  
Trasformazione generica  
reversibile con stato ini-  
ziale  $A$  e stato finale  $B$ .



$$\begin{aligned} (Q_{tot} - \mathcal{L})_a &= f(O;A) \quad \text{per la trasformazione } a; \\ (Q_{tot} - \mathcal{L})_b &= f(O;B) \quad \text{per la trasformazione } b. \end{aligned} \tag{III.7}$$

Sottraendo le due equazioni membro a membro si ha:

$$(Q_{tot} - \mathcal{L})_b - (Q_{tot} - \mathcal{L})_a = f(O;B) - f(O;A). \tag{III.8}$$

Ma, in virtù dell'EQ. (III.5), si ha proprio:

$$\begin{aligned} (Q_{tot} - \mathcal{L})_b - (Q_{tot} - \mathcal{L})_a &= (Q_{tot} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} \\ f(A;B) &= (Q_{tot} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} \end{aligned} \tag{III.9}$$

Risulta quindi, dall'esame dell'EQ. (III.8) e EQ. (III.9), che:

$$f(A; B) = f(O; B) - f(O; A) \dots \tag{III.10}$$

In definitiva, l'equazione EQ. (III.5) può essere formulata nella seguente forma:

$$Q_{tot} - \mathcal{L} = u(B) - u(A); \tag{III.5_a}$$

ovvero, tenendo conto che nella formulazione del I° Principio della Termodinamica per  $\mathcal{L}$  si intendo il solo lavoro di deformazione elastica del fluido, si ricava la forma differenziale del Principio suddetto:

$$dQ_{tot} - d\mathcal{L} = du; \tag{III.5_b}$$

in cui è:

- $dQ_{tot} = dQ_{est} + dQ_{attriti}$  il calore totale che il fluido riceve o cede, in termini quindi di sorgenti reversibili esterne o/e irreversibili interne (quest'ultime causa di dissipazione di energia meccanica in calore di attrito);
- $d\mathcal{L} = pdv$  lavoro termodinamico di deformazione elastica del fluido; nullo se il fluido è liquido (fluido incompressibile).

**Energia interna** La funzione di stato  $u(p; v; T\dots)$  caratteristica del sistema viene detta *energia interna del sistema*. Per motivi di conservazione, tutta l'energia, di qualsiasi tipo, che il fluido riceve passando da uno stato fisico ad un altro non può che accumularsi nel

fluido stesso, sotto forma di *energia interna*. Il fatto che il fluido abbia accumulato dell'energia interna è denunciato da un cambiamento della sua situazione fisica. L'energia interna è dunque una *funzione di stato* del fluido, nel senso che le sue differenze dipendono esclusivamente dagli stati iniziale e finale delle trasformazioni che tali differenze hanno determinato.

### 3.2.2 I° Principio della Termodinamica in termini entalpici

Entità del lavoro scambiato tra fluido e parti mobili della macchina nel caso di macchine a *flusso continuo*.

In virtù di quanto osservato nella nota sul lavoro di deformazione elastica  $p dv$ , il lavoro complessivo  $L$  che un fluido scambia in generale con le pareti mobili di una macchina a flusso continuo è dato non solo dal lavoro di deformazione elastica  $\mathcal{L}$  ma anche dalla somma dei lavori di introduzione e di espulsione del fluido dalla macchina:  $-\Delta(pv)$ . A tale proposito, è possibile "accomodare" la forma dell'equazione del I° Principio formulato dall'EQ. (III.5\_b) (vedere maggiori precisazioni nell'Appendice A). Si addiziona, infatti, il termine  $d(pv)$  a tutte e due i membri dell'equazione suddetta. Si ottiene evidentemente:

$$dQ_{tot} - d\mathcal{L} + d(pv) = du + d(pv). \quad (III.11)$$

Tale equazione, essendo  $d\mathcal{L} = p dv$ , si scrive anche:

$$dQ_{tot} - \{p dv + [-d(pv)]\} = d(u + pv). \quad (III.12)$$

/
\

Lavoro termodinamico di deformazione elastica      Lavoro termodinamico di spostamento

Mantenendo la convenzione classica sui segni delle energie (lavoro considerato positivo quando il fluido compie lavoro sull'ambiente esterno), si osserva che risulta:  $p dv > 0$ , che si può interpretare come un lavoro di deformazione elastica del fluido sul rotore (lavoro positivo);  $-p_2 v_2 < 0$ , che si può considerare come il lavoro di espulsione che il rotore applica al fluido (lavoro negativo);  $p_1 v_1 > 0$ , interpretabile come il lavoro di introduzione che il fluido applica sul rotore (lavoro positivo).

Per la nota definizione della funzione termodinamica di stato *entalpia*  $i = u + pv$ , si ha che:

$$dQ_{tot} - p dv + (p dv + v dp) = di. \quad (III.13)$$

Indicando con:

$$dL = d\mathcal{L} + [-d(pv)] \quad (III.14)$$

il lavoro termodinamico totale scambiato dal fluido con le pareti mobili della macchina – nel caso di macchina a flusso continuo – si può esprimere il I° Principio della Termodinamica *in termini più globali*, ovvero in termini entalpici:

$$\boxed{dQ_{tot} - dL = di} \quad (III.15)$$

Nel caso di macchina a flusso continuo (turbina e compressore) conviene considerare il I° Principio della Termodinamica in forma entalpica

Inoltre, in virtù del teorema della differenziazione per parti risulta:

$$dL = p dv - d(pv) = p dv - (p dv + v dp) = -v dp. \quad (III.16)$$

Quindi, dal punto di vista termodinamico, il lavoro totale sviluppato o assorbito da un fluido nel flusso (*continuo*) tra due ambienti a pressione diversi collegati mediante una macchina, noto come *lavoro tecnico*, consta del lavoro termodinamico di *deformazione elastica* all'interno della macchina e del cosiddetto *lavoro termodinamico di spostamento*, conglobante i lavori di prelievo e di restituzione negli ambienti estremi o, in altri termini, i lavori di introduzione nella macchina e di espulsione da essa. Con riferimento alla massa unitaria fluida, il primo vale:

$$\int p dv$$

con legame  $p(v)$  stabilito dall'evoluzione, mentre il secondo vale:



$$c_v dT = du \text{ ricavata dal I° Principio (a volume costante);}$$

$$c_p dT = di \text{ ricavata dal I° Principio (a pressione costante).} \quad \text{(III.20)}$$

**Nota importante**



dove si sono indicati con  $c_v$  e  $c_p$  rispettivamente il *calore specifico a volume costante* e il *calore specifico a pressione costante*. C'è da notare che, essendo l'energia interna  $u$  e l'entalpia  $i$  delle variabili termodinamiche di stato, esse dipendono solo dagli stati iniziali e finali della trasformazione termodinamica del fluido. Per tale motivo le variazioni  $du$  e  $di$  possono essere valutate rispettivamente come  $c_v dT$  e  $c_p dT$  qualsiasi sia la natura della trasformazione. Ciò posto, le espressioni differenziali del I° Principio risultano per una qualsivoglia trasformazione:

$$dQ_{tot} = c_v dT + p dv$$

$$dQ_{tot} = c_p dT - v dp \quad \text{(III.21)}$$

**3.2.4 La trasformazione politropica**

Con riferimento ad una trasformazione elementare generica (reversibile) si ricavano altre espressioni per i lavori differenziali:

$$dL = -v dp = dQ_{tot} - c_p dT$$

$$d\mathcal{L} = p dv = dQ_{tot} - c_v dT \quad \text{(III.22)}$$

Sfruttando la definizione di calore specifico:  $dQ_{tot} = c_i dT$  (dall'EQ. (III.19)), si ha:

$$dL = -v dp = c_i dT - c_p dT$$

$$d\mathcal{L} = p dv = c_i dT - c_v dT \quad \text{(III.23)}$$

Dividendo ora le precedenti ultime equazioni membro a membro si ottiene il rapporto:

$$m = -\frac{v dp}{p dv} = \frac{c_p - c_i}{c_v - c_i} \quad \text{(III.24)}$$

relazione utile in generale in particolari espressioni termodinamiche. Ad esempio, mediante l'espressione  $m$  si può scrivere:

$$m \cdot p dv + v dp = 0$$

$$m \cdot \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{(III.25)}$$

**Costanza del parametro "m"**

e se  $m$  è costante o tale può ritenersi quale valore medio in una ristretta gamma di temperature, integrando:

$$m \cdot \ln v + \ln p = \text{cost} \quad \text{(III.26)}$$

Equazione fondamentale di una trasformazione politropica (reversibile).

$$p \cdot v^m = \text{cost} \quad \text{(III.27)}$$

L'EQ. (III.27) così ottenuta è l'equazione di una generica trasformazione, la quale, se  $c_p$  e  $c_v$  sono costanti – o possono considerarsi tali nell'escursione di temperatura interessata – la prerogativa di congiungere due diversi stati del fluido<sup>(3.2)</sup> mantenendo invariato il calore specifico  $c_i = \text{cost}$  (vedere EQ. (III.24)):

(3.2) Fissato  $m$  e la costante, risulta fissata e unica la politropica.

$$c_i = \frac{m \cdot c_v - c_p}{m-1} = \text{cost.} \quad (\text{III.28})$$

A siffatta trasformazione si dà il nome di *politropica*.

### 3.2.5 Equazioni e relazioni di una politropica

L'EQ. (III.27) della politropica<sup>(3.3)</sup> può essere scritta in termini di  $p$  e  $T$  o di  $v$  e  $T$ , anziché di  $p$  e  $v$  con l'ausilio dell'equazione di stato. L'equazione di stato per un fluido di massa unitaria è notoriamente:  $pv = RT$ ; essendo  $R$  una costante differente per ciascun gas; mentre il prodotto  $\mathcal{R} = (PM_{gas}) \cdot R$  (dove  $PM_{gas}$  è il peso molecolare del particolare gas) è una costante universale (cioè di valore invariante per qualsiasi gas) pari a:

$$\mathcal{R} = 8315 \text{ J/kmol} \cdot \text{K} = 1,986 \text{ kcal/kmol} \cdot \text{K}.$$

#### Equazioni per i gas

In virtù dell'equazione di stato per i gas, si ha per i fluidi schematizzabili come aeriformi (in pratica vicini al modello di gas perfetti):

$$\begin{aligned} p \cdot v^m &= \frac{RT}{v} \cdot v^m = \text{cost} \\ T \cdot v^{m-1} &= \text{cost}^* \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Inoltre, si possono ricavare anche le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} p \cdot (v^m) &= \text{cost} \\ p \cdot \left( \frac{R^m \cdot T^m}{p^m} \right) &= \text{cost} \rightarrow p^{1-m} \cdot T^m = \text{cost}1 \rightarrow T \cdot p^{-\frac{m-1}{m}} = \text{cost}2 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Tra gli estremi 1 e 2 di una politropica valgono dunque le seguenti relazioni, importantissime per le applicazioni:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^m} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m; & \frac{T_2}{T_1} &= \frac{1}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{m-1}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}; \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

#### Espressione del lavoro di sola deformazione

Il lavoro  $\mathcal{L}$  scambiato dal fluido con l'esterno lungo una politropica reversibile si ottiene integrando l'equazione  $d\mathcal{L} = p dv$ , tenendo conto dei legami in una trasformazione politropica ( $p \cdot v^m = \text{cost}$ ). Risulta in tal modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 p dv = p_1 v_1^m \int_1^2 v^{-m} dv = p_1 v_1^m \cdot \left( \frac{v^{1-m}}{1-m} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{p_1 v_1^m}{m-1} \cdot (v_1^{1-m} - v_2^{1-m}) = \frac{1}{m-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{m-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

#### Espressione del lavoro totale scambiato

Invece, il lavoro totale  $L$  (comprensivo anche dei lavori di introduzione e di espulsione) si può calcolare in base alla relazione  $dL = -v dp$  e alle relazioni a pag. 42, (EQ. III.25):

(3.3) Una politropica è una trasformazione adiabatica reversibile non isentropica.

$$L_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 v dp = m \cdot \int_1^2 p dv = \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{m-1} \right]. \quad (\text{III.33})$$



NOTA. Le espressioni utili nella tecnica, dei lavori  $\mathcal{L}$  ed  $L$  in funzione delle pressioni estreme della trasformazione, anziché dei volumi, si trovano agevolmente dalle formule precedenti mediante le relazioni a pag. 43, (EQ. III.31):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{m-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]; \\ L_{1 \rightarrow 2} &= \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Espressioni dei lavori per una politropica: trasformazione adiabatica Reversibile non isentropica.

Inoltre, c'è da notare che si può esprimere il prodotto  $p_1 v_1$  tramite l'equazione di stato:  $p_1 v_1 = R T_1$ .

### 3.2.6 Energia interna ed entalpia per una politropica

Le variazioni dell'energia interna  $u$  e dell'entalpia  $i$  lungo una trasformazione politropica<sup>(3.4)</sup> possono essere agevolmente calcolate mediante le equazioni a pag. 42, (EQ. III.20). Così, nell'ipotesi di gas perfetto, ed ammettendo per semplicità  $c_p$  e  $c_v$  costanti (condizione a rigore valida per gas monoatomico, ma tecnicamente estendibile ai gas reali incoercibili in limitate gamme di variazione della temperatura) si ha, con l'ausilio delle equazioni a pag. 43, (EQ. III.31):

- Per la funzione di stato *energia interna*:

$$\Delta u_{1 \rightarrow 2} = c_v \cdot (T_2 - T_1) = c_v T_1 \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \quad (\text{III.35})$$

$$= c_v T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] = c_v T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right].$$

- Per la funzione di stato *entalpia*:

$$\Delta i_{1 \rightarrow 2} = c_p \cdot (T_2 - T_1) = c_p T_1 \cdot \left[ \frac{T_2}{T_1} - 1 \right] = \quad (\text{III.36})$$

$$= c_p T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] = c_p T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right].$$

È interessante osservare – in funzione del legame esistente tra variazione di entalpia e lavoro scambiato tra fluido e macchina – che per gli aeriformi la variazione di entalpia subita è sempre proporzionale alla temperatura iniziale: per cui consegue che i gas sono più facilmente compressibili da freddi e più facilmente espandibili da caldi.



NOTA. Nella pratica, tuttavia, si preferisce far comparire in formule di tal genere anziché i calori specifici  $c_p$  e  $c_v$ , la loro differenza ed il loro rapporto, i quali sono particolarmente significativi. Sottraendo una delle equazioni a pag. 42, (EQ. III.21) dall'altra, si ottiene infatti:

$$(c_p - c_v) \cdot dT = p dv + v dp = d(pv), \quad (\text{III.37})$$

che integrata fornisce:

$$(c_p - c_v) \cdot T = pv, \quad (\text{III.37}_a)$$

#### Legge di Mayer

la quale, se  $c_p$  e  $c_v$  sono costanti, riproduce la legge di stato  $pv = RT$  dei gas perfetti. Confrontando l'equazione di stato dei gas perfetti con l'EQ. (III.37\_a), emerge

(3.4) Una trasformazione politropica di esponente  $m$  è una trasformazione adiabatica non isentropica.

che la differenza tra i calori specifici a pressione costante e a volume costante è pari alla costante del gas (perfetto):

$$c_p - c_v = R. \quad (\text{III.38})$$

È questa la nota *legge di MAYER*, utilissima nella Termodinamica tecnica, che di regola viene dimostrata in base alla teoria cinetica dei gas.

Il rapporto tra  $c_p$  e  $c_v$  viene indicato con  $k$  (dagli anglosassoni con  $\gamma$ ):

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p \cdot dT}{c_v \cdot dT} = \frac{di}{du} \quad (\text{III.39})$$

**Adiabatica  
reversibile  
isentropica**

ed è anch'esso importante perché, in ogni trasformazione del gas perfetto, misura il rapporto tra la variazione di entalpia e quella di energia interna. Inoltre, quando l'esponente  $m$  della politropica è pari a  $k$ , l'EQ. (III.24) mostra che  $c_i = 0$ . Questa particolare politropica, detta *adiabatica reversibile isentropica*, è dunque caratterizzata dal fatto che, nel suo corso, il fluido *non scambia calore né reversibilmente con l'esterno, né tantomeno da fonti interne per attrito (la trasformazione è appunto reversibile)*, ed è molto importante nella tecnica, perché tale trasformazione può essere considerata come il limite cui dovrebbero tendere le reali compressioni ed espansioni realizzate nelle macchine per massimizzare i rendimenti.

Esprimendo  $c_p$  e  $c_v$  tramite  $R$  e  $k$  si ha, per il gas perfetto:

$$c_v = \frac{c_v}{R} \cdot R = \frac{c_v}{c_p - c_v} \cdot R = \frac{1}{k-1} \cdot R, \quad c_p = \frac{k}{k-1} \cdot R, \quad (\text{III.40})$$

e quindi le espressioni che esprimono le variazioni di energia interna e dell'entalpia diventano (vedere le equazioni EQ. (III.35) e EQ. (III.36)):

- Per la funzione di stato *energia interna*:

$$\begin{aligned} \Delta u_{1 \rightarrow 2} &= c_v \cdot (T_2 - T_1) = c_v T_1 \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{k-1} \cdot R T_1 \cdot \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{m-1} - 1 \right] = \frac{1}{k-1} \cdot R T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.35}_a)$$

- Per la funzione di stato *entalpia*:  $\Delta i_{1 \rightarrow 2} = k \cdot \Delta u_{1 \rightarrow 2}$ , si ha

$$\begin{aligned} \Delta i_{1 \rightarrow 2} &= c_p \cdot (T_2 - T_1) = \frac{k}{k-1} \cdot R T_1 \cdot \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{m-1} - 1 \right] = \\ &= \frac{k}{k-1} \cdot R T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.36}_a)$$

potendosi, al solito, sostituire in entrambe le formule  $R T_1$  con il prodotto  $p_1 v_1$ .

L'EQ. (III.28) conduce, eliminando  $c_p$  e  $c_v$  tramite  $R$  e  $k$ , diventa:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{m \cdot c_v - c_p}{m-1} = \frac{m \cdot c_v - c_p - (c_v - c_v)}{m-1} = \\ &= \frac{c_v \cdot (m-1) - (c_p - c_v)}{m-1} = c_v - \frac{R}{m-1} = \left( \frac{c_v}{R} - \frac{1}{m-1} \right) \cdot R \quad (\text{III.28}_a) \\ &= \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{m-1} \right) \cdot R. \end{aligned}$$

e di conseguenza, sempre nel caso di gas perfetto e nell'ipotesi che i calori specifici possano ritenersi costanti:

$$\begin{aligned}
 Q_{tot} &= c_i \cdot (T_2 - T_1) = c_i T_1 \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \\
 &= \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{m-1} \right) R T_1 \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \\
 &= \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{m-1} \right) R T_1 \cdot \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{m-1} - 1 \right] = \\
 &= \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{m-1} \right) R T_1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right].
 \end{aligned}
 \tag{III.41}$$

potendosi sempre sostituire ad  $R T_1$  il prodotto  $p_1 v_1$ .

### 3.2.7 La trasformazione adiabatica reversibile

Un'altra trasformazione interessantissima per le applicazioni tecniche è la trasformazione *adiabatica reversibile*, caratterizzata dall'assenza totale di scambio di calore  $dQ_{tot} = 0$ . È dunque per essa  $c_i = 0$  e dall'equazione a pag. 42, (EQ. III.24) appare che:

$$m \rightarrow k = \frac{c_p}{c_v}. \tag{III.42}$$

Ovvero,  $m$  assume il particolare valore  $k = c_p / c_v$ . L'equazione caratteristica è dunque:

$$p v^k = \frac{p}{\rho^k} = cost \tag{III.43}$$

e tutte le funzioni analitiche già trovate per la politropica valgono, formalmente identiche, per l'adiabatica a patto che vi si sostituisca  $m$  al posto di  $k$ .

**Adiabatica  
reversibile:  
isentropica**

Per questa particolare trasformazione reversibile le espressioni dei lavori  $\mathcal{L}$  ed  $L$  assumono formalmente analogo aspetto delle equazioni a pag. 44, (EQ. III.34), con  $k = c_p / c_v$  al posto di  $m$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{1}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]; \\
 L_{1 \rightarrow 2} &= \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{III.44}$$

**Nota importante**



Inoltre, non assorbendo alcun calore durante la trasformazione ( $dQ_{tot} = 0$ ), in virtù delle espressioni del I° Principio della Termodinamica (vedere pag. 41, (EQ. III.18)) si deve dedurre che:  $\Delta u_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}$  e  $\Delta i_{1 \rightarrow 2} = -L_{1 \rightarrow 2}$ . La trasformazione adiabatica reversibile si presenta sul piano  $p;v$  con una curva simile (ma non uguale) ad un ramo di iperbole. La pendenza della medesima è in ogni punto maggiore, in valore assoluto, di quella dell'isoterma (ramo di iperbole) passante per lo stesso punto perché, essendo nella nota relazione  $c_p - c_v = R$  la costante  $R > 0$ , risulta sempre  $c_p > c_v$  e quindi  $k > 1$ .

**Nota sui valori dei calori specifici...**

Per un gas perfetto (gas monoatomico), la teoria cinetica dei gas conduce a:  $c_v = (3/2)R$ ;  $c_p = (5/2)R$  e  $k = c_p/c_v = 5/3 = 1,665$ , e questo deve considerarsi il valore più elevato possibile di  $k$ , poiché nei gas poliatomici altri tipi di energie molecolari, oltre quella di semplice traslazione, rendono i valori di  $c_p$  e  $c_v$  più elevati e quindi più basso quello di  $k$ .  
Peraltro, i gas poliatomici non sono a rigore schematizzabili come gas perfetti ed i loro calori specifici a  $p$  e  $v$  costante crescono con la temperatura, riducendo, all'aumentare di  $T$ , il valore di  $k$ .

Così, per l'aria (miscela di gas biatomici) a  $293\text{ K} \sim 20^\circ\text{C}$  e pressione evanescente,  $k$  vale circa  $1,4$  e così pure per i suoi singoli componenti  $N_2$  e  $O_2$ , come per il  $CO$ , l' $H_2$ , ecc.

Nelle stesse condizioni per il  $CO_2$  (triatomico) è invece  $k \cong 1,28$ , mentre il vapor d'acqua, allo stato di forte surriscaldamento, ha  $k \cong 1,33$ .

Per il vapor d'acqua surriscaldato si conta, nelle applicazioni tecniche, su un valore di  $k$  pari a  $1,31$ , mentre, nel caso di vapor saturo,  $k$  scende a valori dell'ordine di  $1,13$ .

**3.2.8 Relazioni termodinamiche**

In base all'espressione entalpica del I° Principio della Termodinamica nella forma appunto:

$$dQ_{tot} + vdp = di \tag{III.45}$$

si possono trarre ulteriori forme in cui esprimere tale Principio, a seconda che la trasformazione sia ideale (quindi reversibile:  $dQ_{attriti} = 0$ ) o reale (sicuramente con dissipazione di energia meccanica:  $dQ_{attriti} > 0$ ). Quindi:  $|L_{attriti}| = Q_{attriti}$ .

Nell'equazione suddetta si è indicato con  $dQ_{tot} = d(Q_{est} + Q_{attriti})$  - vedere a tal proposito la nota sottostante sulla funzione di stato entropia - la quantità di calore totale che il fluido può scambiare nella sua evoluzione. In particolare, se la trasformazione è ideale (quindi reversibile) il solo calore scambiabile è di natura reversibile, per cui  $dQ_{tot}$  verrebbe a coincidere con  $dQ_{est}$ , viceversa, nel caso di una trasformazione reale (quindi irreversibile) si deve considerare sicuramente un apporto di calore interno  $dQ_{attriti} > 0$  assorbito dal fluido a causa della dissipazione interna di energia meccanica, ed eventualmente un apporto di calore dall'esterno  $dQ_{est}$  assorbito in modo reversibile. Ciò premesso, si può scindere la formulazione entalpica del I° Principio nei due casi di trasformazione *ideale* e *reale*:

1. *trasformazione ideale*:  $dQ_{est} + vdp = di$ ; che integrata fornisce:

**Sulla funzione di stato Entropia**

Si fa esplicitamente rilevare che la Termodinamica classica, nella definizione di entropia, considera il solo calore introdotto dall'esterno del sistema. In tal modo, per le trasformazioni irreversibili si è costretti ad introdurre la *disuguaglianza di Clausius* ( $dS > dQ_{est}/T$ ), che esprime il fatto che, durante una trasformazione irreversibile, il sistema si è scaldato (cioè aumento di entropia) più di quanto competerebbe alla sola introduzione di calore reversibile dall'esterno ( $Q_{est}$ ). Questo sovrappiù di calore è appunto il calore derivato dalle irreversibilità. Nei trattati di Meccanica, si preferisce invece introdurre una definizione più unitaria di entropia, che elimina la disuguaglianza di Clausius.

Per le trasformazioni reversibili è  $dQ_{attriti} = 0$  e si ha la relazione  $dS = dQ/T = dQ_{est}/T$ , cioè si ritrova la definizione classica; mentre per le trasformazioni irreversibili la disuguaglianza di Clausius è sostituita dalla seguente uguaglianza:

$$dS = (dQ_{est} + dQ_{attriti})/T.$$

Tale relazione pone meglio in evidenza il calore irreversibile. In altri termini, se si accetta questa definizione di entropia, è sempre, per tutte le trasformazioni reversibili e irreversibili:  $dS = (dQ_{tot})/T$ .

Quest'ultima relazione, tra l'altro è un'equazione cosmologica. L'Universo è infatti considerato dai cosmologi come un sistema energeticamente isolato, per il quale è quindi  $dQ_{est} = 0$ . Esso è però sede di trasformazioni irreversibili, cioè  $dQ_{attriti} > 0$ .

$$Q_{est} + \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{id} = (i_2 - i_1)_{id} \quad (III.46)$$

**Adiabatica reversibile** che, nel caso di trasformazione anche adiabatica, si riduce ad una trasformazione *isentropica*:

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is} = (i_2 - i_1)_{is} \equiv (i_{2is} - i_1) \quad (III.47)$$

2. *trasformazione reale*:  $dQ_{est} + dQ_{attriti} + v dp = di$ ; che integrata fornisce:

$$Q_{est} + \left| L_{attriti} \right| + \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p = (i_{2'} - i_1); \quad (III.48)$$

con  $i_{2is} \neq i_{2'}$ ; perché, in una trasformazione reale (raggiunto il fissato rapporto di compressione) il punto di arrivo 2' è sempre ad entropia maggiore del punto 2<sub>is</sub>

**Adiabatica irreversibile** quest'ultima, nel caso di trasformazione adiabatica (irreversibile), si riduce alla:

$$\left| L_{attriti} \right| + \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p = (i_{2'} - i_1); \quad (III.49)$$

dove il pedice "p" sta per *politropica equivalente alla trasformazione reale irreversibile*. Le formule, si ricorda, sono riferite per kilogrammo di fluido evolvente. A questo punto tornano utili le formule che esprimono il lavoro totale  $dL_{1 \rightarrow 2} = -v dp$  in funzione delle pressioni e del coefficiente  $k = c_p/c_v$ :

- per trasformazione *adiabatica reversibile (isentropica)*: (vedere II° equazione a pag. 46, (EQ. III.44)):

Per trasformazione adiabatica reversibile: isentropica.

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is} = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (III.50)$$

- per trasformazione *politropica (adiabatica non isentropica)*: (vedere II° equazione a pag. 44, (EQ. III.34)):

Per trasformazione politropica: adiabatica non isentropica.

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p = \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]. \quad (III.51)$$

NOTA. Per una trasformazione *adiabatica non isentropica* (cioè *irreversibile*) è nullo  $dQ_{est}$  (perché adiabatica) ma non  $dQ_{attriti}$  (perché irreversibile). Quest'ultimo è ovviamente equivalente al lavoro  $|dL_{attriti}|$  delle resistenze fluidodinamiche, cioè:  $dQ_{attriti} = |dL_{attriti}|$ . Questo calore di degradazione rimane nel fluido e costituisce quindi un "introduzione" di calore all'interno del fluido stesso. Per questa ragione il lavoro  $v dp$  da *isentropico* diviene *politropico*.

### 3.2.9 Considerazioni particolari sull'equazione dell'energia

**Compressione** Innanzitutto, si deve osservare che, fissato un certo rapporto di compressione, risulta sempre nella trasformazione di compressione:

$$\frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] > \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right], \quad (III.52)$$

ovvero, risulta sempre, in un'evoluzione di compressione  $\beta = p_2/p_1 > 1$  tra due pressioni estreme  $p_1$  e  $p_2$ :

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p > \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is} \quad \text{(III.52_a)}$$

in quanto, essendo  $\beta > 1$ , ed essendo comunque  $m > k$  in virtù del fatto che, essendo  $c_p - c_v = R > 0$ , risulta  $c_v < c_p$ . Per cui, dire  $c_v < c_p$  significa dire  $m > k$ .

**Nota importante**



Questa semplice constatazione ha un'implicazione non indifferente: le resistenze fluidodinamiche hanno effetto, non soltanto in termini diretti di dissipazione di energia meccanica, ma anche in maniera indiretta, trasformando il lavoro termodinamico  $v dp$  da isentropico a politropico. Discorso analogo, può farsi nel caso dell'espansione in turbina.

Quanto appena visto, in generale ha due effetti nettamente contrastanti dal punto di vista dello scambio energetico tra fluido evolvente e macchina. Infatti, fissato un certo rapporto di compressione  $\beta = p_2/p_1$ , nel caso ad esempio di espansione in turbina ( $dp < 0$ ), gli attriti operanti all'interno del fluido, fornendo calore interno alla massa fluida, contribuiscono all'aumento (in termini di valori assoluti) del termine:

Il calore interno degli attriti fa dilatare comunque il fluido evolvente sia se in fase di compressione sia se in fase di

$$\left| \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p \right|, \quad \text{(III.53)}$$

rispetto al valore limite (valore assoluto) assunto da questi nel caso ideale di assenza di attriti:

$$\left| \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is} \right|. \quad \text{(III.54)}$$

Infatti, il calore interno degli attriti causa una dilatazione ulteriore del fluido. Nel caso di espansione in turbina, l'incremento di dilatazione "aiuta" l'espansione del fluido in turbina, contrastando le dissipazioni dirette per viscosità del fluido; quindi il calore per attrito non ostacola completamente il trasferimento di energia per espansione nella macchina. Per tale motivo, durante un'espansione reale, un tale fenomeno viene detto di *recupero*: il calore "introdotto" a causa delle resistenze in un punto dell'espansione viene utilizzato (sia pure con minor rendimento) nella rimanente parte dell'espansione.

**Caso della compressione**

Viceversa, nel caso di una compressione, essendo verificata appunto la disuguaglianza:

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p > \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is}, \quad \text{(III.55)}$$

si assiste, rispetto al caso limite di assenza di attriti, ad una espansione del fluido in seno ad una trasformazione che vuole una compressione del medesimo. È intuitivo, quindi, che i due processi si ostacolano, per cui nella fase di compressione la dilatazione per calore dagli attriti è un vero e proprio aggravio che si somma a quello diretto dovuto alla dissipazione per viscosità.

Queste osservazioni, e le espressioni del lavoro  $L$  nei casi ideale e reale possono essere incorporati nell'equazione dell'energia, nota nella forma differenziale (vedere equazione pag. 114, (EQ. VI.1):

$$di + d\left(\frac{C^2}{2}\right) + g dz = dL_{est} + dQ_{est}. \quad \text{(III.56)}$$

**In compressione** Fissato un certo rapporto di compressione, e tenendo presente che in compressione ( $-L_{est} > 0$ ) è sempre valida la disuguaglianza:

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p - \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is} > 0, \quad (III.60)$$

in virtù dell'EQ. (III.55), si può dedurre immediatamente che:

$$(-L_{est} = (i_{2'} - i_1)) > (i_{2is} - i_1) > 0, \quad (III.61)$$

infatti, alla disuguaglianza dell'EQ. (III.60) si aggiunge il termine dissipativo del lavoro degli attriti.

**In espansione** Analogamente, nel caso di espansione ( $-L_{est} < 0$ ) in turbina, si ottiene:

$$(i_{2is} - i_1) < (-L_{est} = (i_{2'} - i_1)) < 0. \quad (III.62)$$

Si può, dunque, affermare quanto segue:

- in compressione si deve spendere un lavoro utile  $L_{est}$  maggiore di quello senza attriti. E, considerando quanto detto in precedenza, si può precisare che tale lavoro deve compensare non solo l'effetto diretto delle dissipazioni viscosse ma anche il fatto che gli attriti, con il loro calore fornito al fluido, tendono a farlo dilatare, ostacolando la compressione: *controrecupero*.
- in fase di espansione, la presenza di attriti fa in modo che il lavoro utile trasmesso dal fluido sulle parti mobili dell'espansore è minore di quello che si avrebbe in assenza di attriti. Considerando, però, quanto osservato in precedenza, si può dire che il calore ceduto internamente al fluido causa gli attriti contribuiscono in parte all'espansione perché tendono a dilatare il fluido. In quest'ultimo caso gli attriti è come se contrastassero se stessi, consentendo un *recupero*. Il lavoro utile  $L_{est} > 0$  ceduto dal fluido sulla girante ha recuperato, grazie alla dilatazione indotta dal calore degli attriti, una quota di energia.

### 3.3 Le trasformazioni adiabatiche reali

#### 3.3.1 Trasformazione adiabatica reale di compressione

Si pensi di dover portare *adiabaticamente* un gas – per semplicità un *gas perfetto* – inizialmente dotato di pressione  $p_1$ , volume specifico  $v_1$  e temperatura  $T_1$ , alla pressione  $p_2 > p_1$ . Si immagini in un primo momento che la viscosità del gas sia nulla (no attriti) e che la macchina sia perfetta, in tali condizioni la trasformazione sarà reversibile; mentre, nel caso di evoluzione reale, la trasformazione sarà ovviamente irreversibile.

**Caso ideale (adiabatica reversibile)**

Nel piano  $T; S$  (temperatura-entropia) la trasformazione reversibile è rappresentata da una *isentropica* (non avendo ricevuto nessuna aliquota di calore per attriti, in quanto trasformazione reversibile, e né apporti termici dall'esterno, perché supposta trasformazione *adiabatica*).

**Caso reale (adiabatica irreversibile)**

Trattandosi di una trasformazione reale (quindi irreversibile), è noto che la trasformazione non può essere tracciata su un piano cartesiano in funzione di qualsivoglia parametro o grandezza termodinamica. Potendo, però, impiegare l'equazione dell'energia in termini finiti, per un'evoluzione (ideale o reale) all'interno di una turbomacchina, si ha (mantenendo la convenzione classica sui segni delle energie):

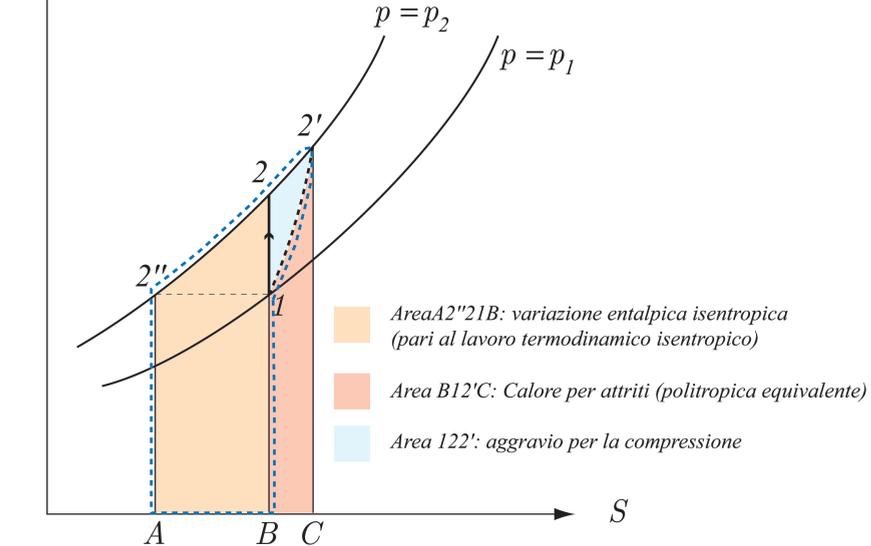
$$\Delta i = -L_{est}, \quad (III.63)$$

Area  $A2''22'CB$ : variazione entalpica reale (pari al lavoro di compressione effettivo che deve fare la macchina operatrice per raggiungere il fissato rapporto di compressione), comprende:

- il lavoro di compressione del fluido (Area  $A2''22'1B$ ) compreso l'aggravio, e
- il lavoro dissipato in calore dagli attriti (Area  $B12'C$ ).

Area  $A2''22'1B$ : lavoro termodinamico di compressione (politropico): lavoro per aumentare la pressione del fluido, compreso l'aggravio per la dilatazione (non comprensivo dell'energia per sopperire alle perdite per attrito).

**Figura 3.3**  
Rappresentazione nel piano  $T; S$  della trasformazione di compressione per un aeriforme. Utilizzo della trasformazione politropica equivalente.



dove:

- $L_{est}$  è la quantità di lavoro (prevalenza) che la macchina operatrice ha fornito al fluido;
- $\Delta i = \bar{c}_p \cdot (T_{fin} - T_{in})$  la variazione (effettiva) di entalpia subita dal fluido a causa dell'energia trasmessa dalla macchina. ( $\bar{c}_p$  è il calore specifico costante rappresentativo per l'intervallo di temperature in cui avviene l'evoluzione).

Un compressore, infatti, ha il compito di incrementare essenzialmente l'energia di pressione del fluido, per cui, se si fissa un determinato rapporto di compressione da raggiungere, il lavoro ( $L_{est} < 0$ ) che deve fornire la macchina è misurato dall'aumento di entalpia del fluido per partire dallo stato termodinamico  $p_1; T_1$  e arrivare allo stato termodinamico  $p_2, T_2$ . In virtù dell'equazione termodinamica dell'energia (nella forma dell'EQ. (III.57\_b)), si ha:

- nel caso *ideale* (adiabatica isentropica):

$$-\left(\int_{p_1}^{p_2} v dp\right)_{is} = (L_{est})_{is} = -(i_{2is} - i_1); \quad (III.64)$$

Attenzione!  
Nelle formule si è adottata la convenzione classica sui segni delle energie.

- nel caso *reale* (con attriti: adiabatica irreversibile):

$$- \left| L_{attriti} \right|_{(1 \rightarrow 2')} - \left(\int_{p_1}^{p_2} v dp\right)_p = L_{est} = -(i_2 - i_1). \quad (III.65)$$

Analizzando le aree nella **Figura 3.3**, nel caso di compressione, si può scrivere:

$$0 < -L_{est} = \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p + \left| L_{attriti} \right|_{(1 \rightarrow 2')}$$

$$\underbrace{\text{Area } A2''22'CB}_{\text{Energia data dalla macchina}} = \underbrace{\text{Area } A2''22'1B}_{\text{Energia per aumentare la pressione del fluido: lavoro tecnico necessario.}} + \underbrace{\text{Area } B12'C}_{\text{Frazione dell'energia fornita dalla macchina che viene dissipata in calore dagli attriti.}}$$

Ciò premesso, dall'esame della **Figura 3.3** e dall'espressione dell'equazione dell'energia nel caso della compressione, si ha che, nel caso di trasformazione ideale (isentropica) il lavoro che deve fornire la macchina coincide con il lavoro termodinamico tecnico isentropico, misurato dalla variazione isentropica di entalpia: area  $A2''21B$ .

Nella trasformazione reale, invece, il lavoro termodinamico tecnico (di compressione effettivo) è misurato – in virtù dell'equazione dell'energia – dalla differenza tra variazione entalpica subita e calore politropico, corrispettivo degli attriti nella trasformazione reale; quindi misurabile dalla differenza, rispettivamente, delle aree  $A2''22'CB$  (variazione entalpica effettiva) e  $B12'C$  (quantità di calore ceduta dagli attriti alla massa fluida evolvente).

A questo punto, si può notare che il lavoro tecnico di compressione effettivo risulta maggiore del rispettivo lavoro di compressione nel caso ideale non solo per la quota di dissipazione di energia meccanica per attrito (area  $B12'C$ ), ma anche per un'ulteriore aliquota misurata dall'area  $122'$ :

Questo ulteriore aggravio (area  $122'$ ) che la compressione reale (area  $A2''22'CB$ ) richiede – oltre all'energia da fornire per sopperire alle inevitabili degradazioni di energia meccanica per attrito (area  $B12'C$ ) – è dovuta al fatto che il compressore si vede costretto ad immettere ulteriore energia (appunto, area  $122'$ ) per compensare l'aumento del lavoro  $\int v dp$  dovuto alla dilatazione del fluido prodotta a sua volta dall'attrito medesimo.

Ovviamente, questo aggravio esiste perché la compressione è ostacolata sia dagli attriti, sia dalla tendenza del fluido a dilatarsi per ricevuto calore.

Siccome il lavoro tecnico politropico risulta maggiore del rispettivo isentropico, si può concludere che le resistenze fluidodinamiche siano dannose, non soltanto in maniera diretta (poiché rappresentano una perdita di energia meccanica), ma anche in quanto (trasformando il lavoro termodinamico di compressione da isentropico a politropico) aumentano ulteriormente il lavoro richiesto per raggiungere il dato rapporto di compressione.

**Controrecupero**

Questa maggiorazione del lavoro termodinamico di compressione (dall'area  $A2''2B$  all'area  $A2''22'1B$ ), dovuta al calore introdotto internamente dalle resistenze passive costituisce il fenomeno del *controrecupero*.

**3.3.2 Trasformazione adiabatica reale di espansione**

Per un'espansione adiabatica non isentropica (cioè irreversibile) è nullo il termine  $Q_{est}$ , ma non il termine  $Q_{attriti}$ . Quest'ultimo è evidentemente uguale al lavoro delle resistenze fluidodinamiche, cioè  $|L_{attriti}| = Q_{attriti}$ . Questo calore rimane nel fluido e costituisce quindi – come anche nel caso della compressione – una “introduzione” di calore all'interno del fluido stesso a spese dell'energia meccanica.

Per questa ragione, il lavoro termodinamico tecnico di espansione da isentropico diviene politropico:

$$\left| \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p \right| < \left| \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_{is} \right|. \tag{III.66}$$

Inoltre, l'equazione termodinamica dell'energia nella forma dell'**EQ. (III.57\_b)**, in riferimento all'introduzione della trasformazione politropica, porge sempre:

$$- \left| L_{\text{attriti}} \right|_{(1 \rightarrow 2')} - \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p = L_{\text{est}} = -(i_2' - i_1) . \quad (\text{III.67})$$

Nel caso di espansione in turbina, tenendo conto del fatto che si è adottata la convenzione classica sui segni delle energie, si ha che il fluido cede energia alla macchina, per cui è:  $L_{\text{est}} > 0$ ; con  $i_2' - i_1 < 0$ , trattandosi di espansione ( $dp < 0$ ) in presenza di attriti ( $|L_{\text{attriti}}| > 0$ ). Ciò posto, l'equazione termodinamica dell'energia può essere posta in questi termini:

$$- \left( \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p = (i_1 - i_2') + \left| L_{\text{attriti}} \right|_{(1 \rightarrow 2')} . \quad (\text{III.68})$$

Tenendo presente le aree riportate nella **Figura 3.4**, nel caso di una espansione in turbina si può scrivere:

$$0 < L_{\text{est}} = \left( - \int_{p_1}^{p_2} v dp \right)_p - \left| L_{\text{attriti}} \right|_{(1 \rightarrow 2')}$$

$$\underbrace{\text{Area } C2'2''A}_{\text{Energia fornita alla macchina}} = \underbrace{\text{Area } B212'2''AC}_{\text{Lavoro tecnico che il fluido riesce a mettere a disposizione durante l'espansione.}} - \underbrace{\text{Area } 12'CB2}_{\text{Frazione del lavoro tecnico inevitabilmente perso in calore causa gli attriti.}}$$

Questa equazione, se confrontata con il bilancio dell'energia effettivamente persa nell'intera trasformazione in turbina:

$$|E_{\text{persa}}| = |(L_{\text{est}})_{\text{is}} - L_{\text{est}}| , \quad (\text{III.69})$$

mostra che, nel corso dell'espansione reale, il lavoro di attrito (area  $12'CB2$ ) non viene integralmente perduto (ai fini dell'energia utile che la girante della turbina può ricevere), ma una parte di essa (area  $212'$ ) viene *recuperata*.

#### Nota importante

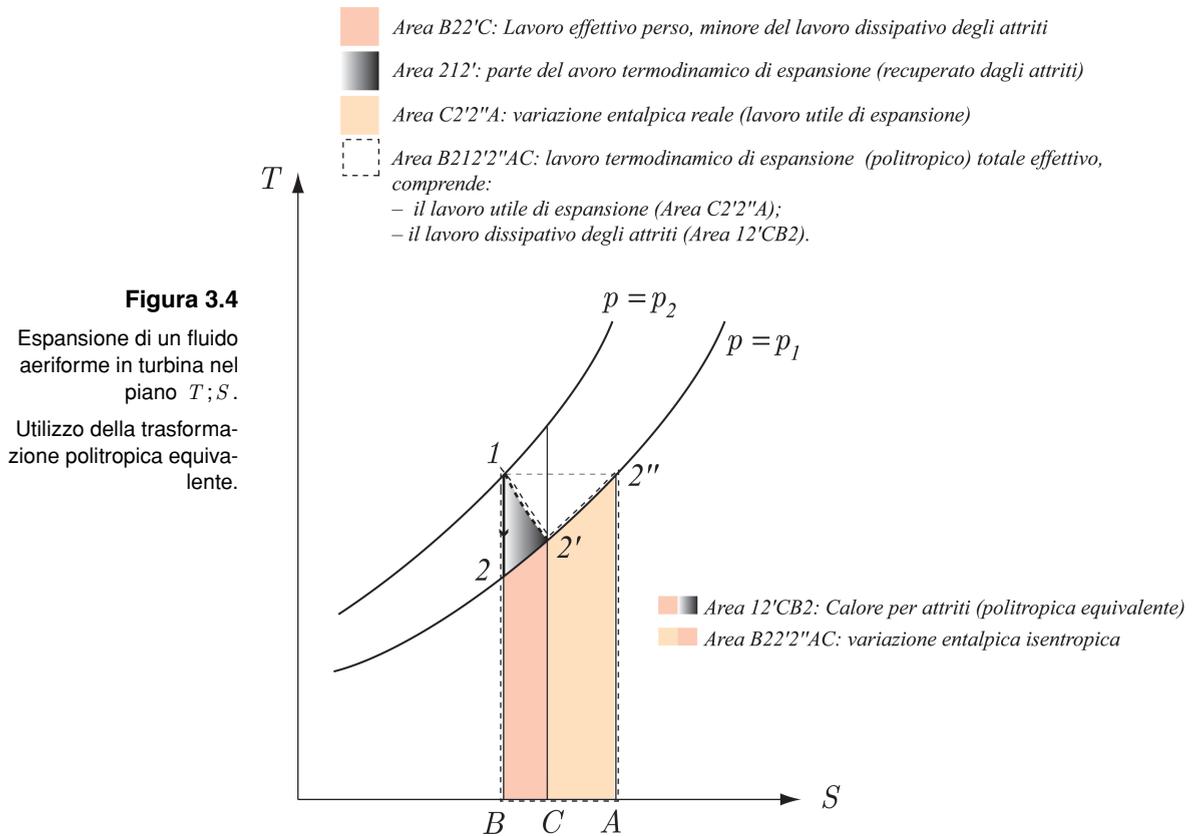


Infatti, dall'esame della **Figura 3.4** – poiché si vede che l'entità del lavoro tecnico di espansione politropico (area  $B212'2''AC$ ) è maggiore del rispettivo isentropico (area  $B22'2''AC$ : variazione isentropica di entalpia) – si nota come la perdita di lavoro *effettivo* prodotta dalle resistenze (area  $B22'2''$ : differenza  $|(L_{\text{est}})_{\text{is}} - L_{\text{est}}|$ ) sia minore del lavoro delle resistenze stesse (area  $12'CB2$ ), questo si spiega con il fatto che, l'introduzione di calore dovuto alle resistenze (area  $12'CB2$ ), aumenta il lavoro termodinamico effettivo di espansione (area  $B212'2''AC$ ). Infatti, ogni introduzione di calore nella massa fluida evolvente tende a dilatarne il volume, quindi ad espanderla ulteriormente.

Ciò induce, in definitiva, ad un recupero di una parte del lavoro dissipato dagli attriti. In altri termini:

Nell'espansione in turbina, gli attriti "ostacolano se stessi" in quanto, con il lavoro dissipativo, forniscono calore internamente al fluido, il quale utilizza questo calore (anche se con basso rendimento) per espandersi ulteriormente e contribuire così all'espansione già in atto nei condotti della girante.

Il fenomeno del controrecupero e del recupero è interpretabile anche facendo riferimento al fenomeno delle contropressioni di inerzia per fluidi aeriformi, quindi compressibili (vedere Paragrafo 4.9.4 a pagina 75).



### 3.3.3 Equazione dell'energia nello stadio della macchina

Molto semplicemente si definisce *stadio* di una turbomacchina l'unione in sequenza del distributore (statore: palettature fisse) e la girante (rotore: palettature mobili della girante).

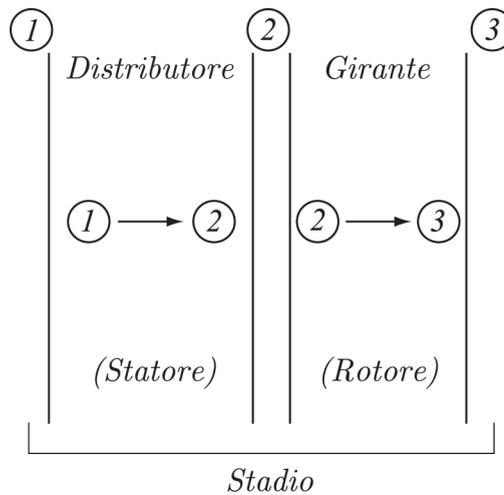
La girante è il componente dello stadio che sottrae o cede energia al fluido, col ruolo di "tramite" tra scambio di energia e fluido. Il distributore è un puro *trasformatore* in quanto opera in sostanza solo una redistribuzione interna delle varie energie del fluido, per inviarlo alla girante con la configurazione energetica più idonea alle caratteristiche del processo che in essa si svolge.

Il distributore, che è strutturato con palettature fisse, tende, a meno delle dissipazioni in esso, a costringere la trasformazione del fluido evolvente ad essere *isoenergetica*, giacché non avendo pale mobili non può in linea di principio né sottrarre né trasferire energia al fluido:  $dL_{est} = 0$ . Si consideri lo schema **Figura 3.5**, e si applichi, dunque, l'equazione dell'energia. Considerando comunque effetti di natura dissipativa all'interno del distributore, risulta:

$$(i_2 - i_1)_{stat} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} = 0. \quad (III.70)$$

Applicando, invece, l'equazione dell'energia relativa al rotore, in cui avviene lo scambio di energia tra palettature e fluido  $dL_{est} \neq 0$ , risulta:

**Figura 3.5**  
Schema di un stadio di una turbomacchina.



$$(i_3 - i_2)_{rot} + \frac{C_3^2 - C_2^2}{2g} = L_{est} \quad (\text{III.71})$$

Sommando ora membro a membro le due equazioni si ha:

$$\Delta i \equiv (i_3 - i_1)_{stadio} + \frac{C_3^2 - C_1^2}{2g} = L_{est} \quad (\text{III.72})$$

**Nota importante**



Poiché la variazione della velocità agli estremi di un stadio per una turbomacchina è trascurabile  $C_3 \cong C_1$ , la precedente equazione si riduce alla:

$$\boxed{\Delta i = L_{est}} \quad (\text{III.73})$$

Tra monte e valle dello stadio di una turbomacchina, la velocità  $C$  non registra di regola variazioni rimarchevoli; in altri termini, il ruolo della velocità appare del tutto trascurabile nello studio globale della macchina, mentre risulta essenziale per il fenomeno del trasferimento di energia nei singoli elementi costruttivi.

In definitiva, la vicenda della velocità è un *fatto interno* alla macchina e non è avvertito nell'analisi globale del volume di controllo che la racchiude.

## CAPITOLO 4



# Richiami di fluidodinamica

Dal libro di Carmelo Caputo “Le Turbomacchine”.

Argomenti trattati nel cap. 2 del suddetto libro e seguenti.

---

In questa parte vengono trattate in forma semplice le più importanti nozioni di fluidodinamica che riguardano i flussi all'interno delle macchine a fluido.

---

## 4.1 Definizioni

Un *condotto fluido* può essere interpretato come un ambiente provvisto di due sezioni (di ingresso e di uscita del fluido) – entrambe perpendicolari alla linea (su cui si misura l'ascissa curvilinea) che passa per tutti i baricentri delle infinite sezioni trasversali in cui si può tagliare un *tubo di flusso* – e di una parete che lo separa dall'ambiente esterno, impermeabile al fluido e non necessariamente al calore.

Una grandezza geometrica interessante è il raggio idraulico  $R_i$  del condotto, che si definisce come il rapporto tra l'area  $A$  della superficie di una sezione trasversale di un tubo di flusso ed il perimetro *bagnato* corrispondente  $B$ <sup>(9.1)</sup>:

$$R_i = \frac{A}{B}.$$

---

## 4.2 Moto vario e moto permanente

In generale il moto del fluido in un condotto è *vario*, nel senso che lo stato (termodinamico e cinematico) del fluido, oltre ad essere in genere diverso da punto a punto dello spazio del condotto – in un fissato istante di tempo  $t$  – in ciascun punto fissato nello spazio varia anche con lo scorrere del tempo. Si esprime questa circostanza dicendo che, nel *moto vario*, lo stato del fluido dipende dal *posto* e dal *tempo*.

---

(9.1) Per *perimetro bagnato* si intende la lunghezza della linea di contatto tra il mantello del condotto e il fluido che vi fluisce all'interno, calcolata su una sezione trasversale al moto medio e piana. In particolare, nella sezione di un canale a pelo libero, la linea orizzontale del pelo libero non fa parte del contorno bagnato, in quanto non è a contatto con le sponde del canale che fungono, in questo caso particolare, da mantello del condotto.

Quindi risulta, quando  $\Gamma = 0$ :

$$L_{AB} = \int_{A(I)}^B C \cos \vartheta \cdot ds = \int_{B(II)}^A C \cos \vartheta \cdot ds. \quad (\text{IV.3}_a)$$

L'EQ. (IV.3\_a) mostra così che nel moto a potenziale di velocità il lavoro del vettore velocità  $C$  tra due punti  $A$  e  $B$  dell'efflusso è indipendente dal percorso su cui lo si calcola.

A tale lavoro si dà il nome di *potenziale* (di velocità, in questo caso) e questo può essere ovviamente valutato per differenze, cosicché il suo valore può essere assegnato una volta definito, in seno all'efflusso, un punto a potenziale zero.

**Criterio di Maxwell**

Una chiara analisi dei moti a potenziale può essere condotta con il criterio di *Maxwell*, consistente nel tracciare in forma discreta nel condotto le linee di corrente e quelle equipotenziali, normali le une alle altre. Le linee equipotenziali vengono tracciate per differenze fisse  $\Delta\Phi$  del potenziale. Poiché le variazioni del potenziale  $\Phi$  tra due punti del moto sono indipendenti dal particolare percorso scelto per il calcolo, allora il differenziale di  $\Phi$  è esatto e pertanto:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz. \quad (\text{IV.4})$$

Peraltro con notazioni consuete:

$$dL = d\Phi = C_x dx + C_y dy + C_z dz, \quad (\text{IV.5})$$

e quindi risulta:

$$C_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad C_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad C_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (\text{IV.6})$$

Moto a potenziale di velocità e funzione potenziale  $\Phi$ .

Si può affermare che, in ogni punto del campo di un moto a potenziale di velocità, le componenti della velocità del fluido sono le derivate parziali della funzione potenziale  $\Phi$  secondo i tre assi coordinati. Ovvero, sintetizzato nell'espressione:

$$C = \text{grad } \Phi. \quad (\text{IV.7})$$

Lungo l'asse del tubo di flusso, con ascissa curvilinea  $s$ , la velocità è in ogni punto il gradiente del potenziale:

$$C = \frac{d\Phi}{ds} \cong \frac{\Delta\Phi}{\Delta s}, \quad (\text{IV.8})$$

essendo la seconda espressione trascritta alle differenze finite.

Si consideri adesso il tubo di flusso della **Figura 4.1**. Se si pone attenzione al tracciato mistilineo  $MM'NN'$ , essendo i tratti  $MM'$  ed  $NN'$  su linee di corrente ed i tratti  $MN$  ed  $M'N'$  su linee equipotenziali, deve essere:

$$\Delta\Phi = C_M \cdot r_M \delta = C_N \cdot r_N \delta \quad (\text{IV.9})$$

avendo chiamato  $r_M$  ed  $r_N$  i raggi di curvatura delle traiettorie per i punti  $M$  ed  $N$ . Quindi risulta la relazione seguente:

$$C_M \cdot r_M \delta = C_N \cdot r_N \delta \\ C \cdot r = \text{cost}. \quad (\text{IV.9}_a)$$

È questa, nel caso particolare in esame, la legge del *vortice libero* di Helmholtz che spontaneamente si produce in un efflusso curvo (moto a potenziale di velocità) in un condotto piano, nel quale è nulla la componente di velocità  $C_z$  perpendicolare al piano del condotto.<sup>(9.2)</sup>

**Legge del vortice libero**

La legge del vortice libero, così descritta analiticamente, è valida a rigore per i fluidi incomprimibili, ma può essere tecnicamente applicata anche per quelli comprimibili a patto che non vari troppo, nell'efflusso, la massa volumica.

Il vortice a potenziale considerato si produce naturalmente nei moti di fluidi tra intercapedini coassiali e cilindriche (tale è ogni "anulus" tra palettature). Il moto di fluidi all'interno di tali intercapedini cilindriche sono governate dall'equilibrio di due forze principali:

1. la forza centrifuga che agisce su una particella in rotazione;
2. risultante delle forze dovute alla distribuzione radiale delle pressioni sulla massa fluida;

Si consideri, infatti, un elemento fluido elementare largo  $r d\vartheta$ , alto  $dr$  e di profondità unitaria, rotante intorno all'asse  $a$  (**Figura 4.2**). La forza centrifuga che tende ad allontanarlo dall'asse vale:

Moto del fluido all'interno del diffusore liscio è un moto approssimabile al vortice libero: spirali logaritmiche che si allontanano radialmente dall'asse di rotazione.

$$F_c = \rho \cdot r d\vartheta \cdot dr \cdot \frac{C^2}{r} = \rho C^2 d\vartheta dr,$$

ove  $C$  è a velocità tangenziale e  $\rho$  la densità del fluido. La forza di pressione che contrasta la forza centrifuga è invece:

$$F_p = r \cdot d\vartheta \cdot dp.$$

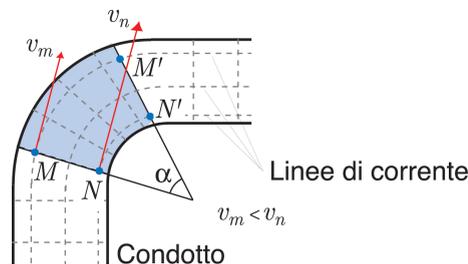
L'uguaglianza delle due forze comporta la condizione di equilibrio:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{C^2}{r}. \tag{IV.10}$$

D'altra parte, in equilibrio, l'energia meccanica posseduta da una particella fluida (somma di quella di pressione  $p/\rho$  e di quella cinetica  $C^2/2$  deve essere<sup>(9.3)</sup> la stessa – per elementi fluidi disposti sopra una superficie equipotenziale – quale che

**Figura 4.1**

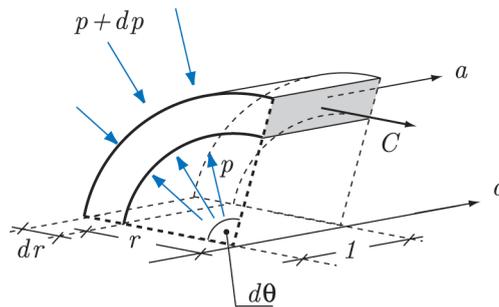
Andamento delle velocità su due linee di corrente in un tubo di flusso con moto dotato di potenziale delle velocità



(9.2) È quel che avviene, per fare un esempio pratico, nel moto naturale che si produce nella massa d'acqua contenuta in un lavello provvisto di un foro centrale di scarico, laddove il vortice manifesta velocità di rotazione elevate presso il centro e sempre minori verso la periferia.

(9.3) La dimostrazione della validità dell'equazione (IV.11) su una superficie equipotenziale si trova sul testo "Introduzione allo studio delle macchine" di ACTON e CAPUTO; pag. 676-679.

**Figura 4.2**  
Distribuzione delle forze su una massa fluida in rotazione, racchiusa tra due intercapedini cilindriche coassiali



Equazione dell'energia lungo la direzione radiale: teorema di Bernoulli.

sia la quota radiale della particella medesima<sup>(9.4)</sup>. Di conseguenza lungo una qualsiasi direzione radiale:<sup>(9.5)</sup>

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dC^2}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + C \frac{dC}{dr} = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Sostituendo nell'EQ. (IV.11) il 1° membro dell'EQ. (IV.10) si ottiene:

$$\frac{C^2}{r} + C \frac{dC}{dr} = 0 \quad \frac{C}{r} + \frac{dC}{dr} = 0, \quad (\text{IV.12})$$

e moltiplicando i membri di questa equazione per l'operatore  $dr/C$ :

$$\frac{dr}{r} + \frac{dC}{C} = 0. \quad (\text{IV.13})$$

Integrando si ottiene, infine:

$$\ln r + \ln C = \text{cost} \quad C \cdot r = \text{cost}, \quad (\text{IV.14})$$

cioè appunto la legge del *vortice libero* nella condizione che la velocità  $C$  del fluido sia esclusivamente tangenziale.

**Moto irrotazionale**

Il moto a potenziale di velocità dei fluidi è denominato anche *irrotazionale* per distinguerlo da un diverso tipo di moto – che costituisce la seconda classe – detto *rotazionale*.

**4.4 I moti rotazionali o vorticosi**

Nei moti di rotazione rigida di un insieme di particelle fluide – quali realmente si verificano negli efflussi reali dentro condotti – coesistono due tipi di moto:

1. il moto di traslazione<sup>(9.6)</sup>;

(9.4) Una superficie equipotenziale, in questo caso particolare, è una qualsiasi superficie che abbia come traccia sul piano una retta diretta radialmente.

(9.5) In questo caso particolare, una qualsiasi direzione radiale corrisponde alla traccia sul piano della corrispondente superficie equipotenziale – perpendicolare alle traiettorie – disposta in senso radiale rispetto all'asse di rotazione della massa fluida sul piano.

(9.6) Nel caso di flussi turbolenti, si considera il valore medio.

2. il moto di rotazione rigida.

#### Funzione rotore

Detta  $\omega$  la velocità angolare di tale rotazione rigida, nel moto rotazionale si può definire un vettore *rotore*:  $rot C = 2\omega$ , avente la direzione ortogonale al piano di rotazione. Chiaramente nei moti a potenziale, in mancanza di rotazioni rigide delle particelle fluide, il vettore  $rot C$  non esiste. Le componenti cartesiane del vettore rotore sono:

$$\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y};$$

le quali risultano logicamente nulle quando il differenziale:

$$C_x dx + C_y dy + C_z dz$$



è un differenziale esatto, vale a dire quando il moto è a potenziale di velocità. Per distinguerlo dal “vortice libero”, che si produce in efflussi a potenziale, il vortice contraddistinto da una *rotazione rigida* delle particelle fluide (tale cioè che le reciproche distanze rimangano invariate durante la rotazione) viene chiamato *vortice forzato*. Esso è, infatti, innaturale (mentre naturale è quello libero) e deve essere quindi prodotto ad arte, da circostanze esterne che condizionano il moto del fluido, come ad es. la presenza di pareti che frenano il moto delle particelle fluide ad esse aderenti.

## 4.5 I moti reali dei fluidi

Il moto a potenziale di velocità è naturale; quindi esso tende sempre a prodursi in assenza di azioni di disturbo, le quali però sono ovunque presenti, soprattutto nei manufatti umani. Il moto dei fluidi è quindi sempre, a rigore, rotazionale; ma non manca – e in certi casi è addirittura prevalente – la componente a potenziale, non potendo mai essere completamente condizionanti le azioni esterne di disturbo alle tendenze naturali del moto.

La distribuzione di velocità nell’efflusso risponde quindi in ogni caso ad una situazione intermedia tra le due condizioni di moto descritte, le quali vanno intese perciò come condizioni limite, ed opportuni codici di calcolo possono consentirne la determinazione una volta stabilite le condizioni al contorno dell’efflusso.

Il moto dei fluidi nei condotti delle turbomacchine è notevolmente complesso, essendo ogni fluido viscoso ed il moto tridimensionale è in realtà non stazionario (a causa del movimento relativo tra rotore e statore della macchina). Pertanto la descrizione del campo fluidodinamico mediante tecniche numeriche si presenta fortemente complicata ed onerosa, quando addirittura impossibile, sotto il profilo del calcolo. È necessario perciò affrontare lo studio degli efflussi nelle turbomacchine con ipotesi semplificative, adottando schemi monodimensionali, bidimensionali o quasi tridimensionali, al fine di semplificare i problemi e condurre così analisi rapide e poco costose prima di affrontare l’indagine tridimensionale vera e propria, con fluido viscoso, per via numerica o sperimentale (mediante prototipo).

## 4.6 L’equazione di continuità

Il principio della continuità (o della congruenza di massa) afferma la costanza della portata in massa, quale che sia la sezione considerata, in condizione di *moto permanente*. La stessa affermazione, ovviamente, non si può fare per la *portata volumetrica*  $Q$  se il fluido è comprimibile ( $\rho$  variabile con la pressione e la temperatura),

mentre sussiste sempre nel caso di efflussi di liquidi incomprimibili, caratterizzati da massa volumica  $\rho$  costante.

La portata in massa è esprimibile come:

$$M = \rho Q = \rho C \Omega . \quad (\text{IV.15})$$

Con riferimento all'EQ. (IV.15), l'equazione di continuità nel moto permanente si può dunque scrivere:

$$M = \text{cost} \quad dM = 0 \quad \frac{dM}{M} = 0 \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dC}{C} + \frac{d\Omega}{\Omega} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

#### 4.6.1 L'equazione termodinamica di stato

Una delle equazioni cardine è chiaramente l'equazione termodinamica di stato, che lega pressione, densità e temperatura. Se il fluido è gassoso, lontano dalle condizioni critiche, è universalmente accettata, e – salvo rari casi – attendibilissima ai fini tecnici, la nota legge di stato:

$$p = R\rho T , \quad (\text{IV.17})$$

ove la temperatura  $T$  è assoluta ed  $R$  è la costante universale riferita all'unità di massa. Passando ai logaritmi.

$$\ln p = \ln \rho + \ln T + \text{cost} , \quad (\text{IV.18})$$

e differenziando, si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} . \quad (\text{IV.19})$$



NOTA. Queste equazioni rimangono ancora tecnicamente applicabili ai vapori, quando questi sono fortemente surriscaldati e quando le escursioni della temperatura e della pressione durante l'efflusso sono modeste. Diversamente occorre servirsi di equazioni di stato più raffinate che la termodinamica insegna (WAN DE WAALS, DIETERICI, REDLICH-KWONG).

Nel caso in cui, trattandosi di un gas, è valida l'EQ. (IV.19), con facili sostituzioni l'EQ. (IV.16) diventa:

$$\frac{dp}{p} + \frac{dC}{C} + \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{dT}{T} , \quad (\text{IV.16}_a)$$

detta "equazione della continuità per il gas perfetto in moto permanente", sovente impiegata nelle trattazioni gasdinamiche.

#### 4.6.2 L'equazione termodinamica della trasformazione

Una equazione importante è la legge della trasformazione termodinamica che il fluido subisce nel corso dell'efflusso. Nelle turbomacchine il moto dei fluidi avviene *adiabaticamente*, giacché le superfici laterali dei condotti sono solitamente tanto limitate da non consentire rilevanti scambi di calore tra il fluido e l'esterno. È perciò di regola applicata l'equazione:

$$p = A\rho^k , \quad (\text{IV.20})$$

nella quale  $A$  è una costante determinabile in base alle condizioni iniziali dell'efflusso e  $k$  è il rapporto tra i calori specifici del fluido, rispettivamente a pressione e a volume costante ( $c_p/c_v$ ). Poiché questi sono nella realtà variabili con la temperatura, nel calcolo di  $k$  se ne assumerà il valor medio tra le temperature

estreme della trasformazione e, nei casi in cui l'escursione di temperatura dovesse essere molto estesa, al posto dell'EQ. (IV.20) si impiegheranno altre formule di uguale contenuto, ma espressamente ricavate con la condizione di calori specifici variabili.

### 4.7 L'equazione dell'impulso

L'equazione dell'impulso, applicata ad un sistema fluido, afferma che la *variazione* della quantità di moto  $\mathbf{q}$  del sistema, tra due sezioni dell'efflusso, è pari all'impulso globale  $\mathbf{J}$  che il sistema riceve transitando tra le medesime sezioni. L'equazione in parola è di natura vettoriale perché la quantità di moto è un vettore ( $\mathbf{q} = m\mathbf{C}$ ), come pure l'impulso ( $d\mathbf{J} = \mathbf{F} \cdot dt$ ), prodotto tra la risultante delle forze applicate e il tempo di applicazione delle forze stesse.

**Condotto piano in condizioni di flusso stazionario**

Se si considera un condotto piano che è sede di un flusso stazionario, all'interno del condotto, sia la distribuzione di massa volumica del fluido sia le velocità sono invariati localmente nel tempo. In tal modo, risulta invariante nel tempo anche la quantità di moto del sistema fluido ospitato dal condotto ( $\mathbf{q}_0$ ). La variazione della quantità di moto del sistema deriva pertanto esclusivamente dal bilancio delle quantità di moto connesse con la massa uscente e con quella entrante. Se nella sezione 2, nel tempo infinitesimo  $dt$ , esce la massa  $dm$  alla velocità  $\mathbf{C}_2$ , e contemporaneamente entra (per motivi di *continuità*) la massa  $dm$  alla velocità  $\mathbf{C}_1$ , attraverso la sezione 1, la variazione di quantità di moto (nell'unità di tempo) del sistema (in condizioni di flusso stazionario) risulta:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{dm(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1)}{dt} = \dot{m}(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) \tag{IV.21}$$

Per cui, la risultante  $\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$  delle forze applicate al sistema si esprime come:

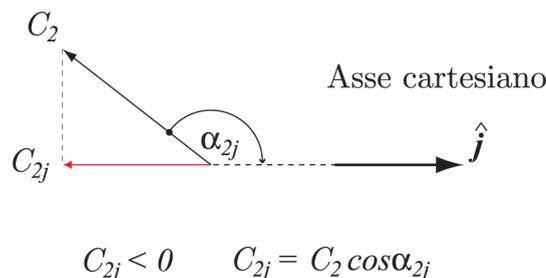
$$\mathbf{R} = \dot{m}(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) \tag{IV.21_a}$$

Proiezione dell'equazione su un sistema opportuno di assi cartesiani

Se si stabilisce la direzione del generico asse  $\mathbf{j}$  (o gli assi ortogonali  $i; j$ ), la proiezione dell'EQ. (IV.21\_a) sull'asse  $\mathbf{j}$  si ottiene semplicemente moltiplicando scalarmente membro a membro della suddetta equazione per il versore  $\hat{\mathbf{j}}$  dell'asse  $j$ :

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{R} = \dot{m} [\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{C}_2 - \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{C}_1] \tag{IV.21_b}$$

**Figura 4.3**  
 Convenzione sui segni e sugli angoli per la proiezione dell'equazione del moto sull'asse  $j$



Si suppone – come spesso accade in pratica – non noto a priori la direzione, il verso e il modulo del vettore  $\mathbf{R}$ , per cui nel proiettare l'EQ. (IV.21\_b) si scrive direttamente la componente  $R_j$  intrinsecamente dotata di segno algebrico, non noto a priori. Per quanto riguarda i vettori delle velocità, conviene adottare questa convenzione: si ruota in senso antiorario il vettore  $\mathbf{C}_i$  di un angolo  $\alpha_{ij}$  in modo da portare il vettore  $\mathbf{C}_i$  completamente parallelo ed equiverso al versore dell'asse  $j$  (versore  $\hat{\mathbf{j}}$ ).

Proiezione  
dell'equazione:  
forma scalare

L'equazione proiettata assumerà l'aspetto:

$$R_j = \dot{m}(C_{2j} - C_{1j}) = \dot{m}(C_2 \cos \alpha_{2j} - C_1 \cos \alpha_{1j}). \quad (\text{IV.22})$$

Da notare che  $C_{2j}$  e  $C_{1j}$  hanno un loro segno che viene dal valore del coseno dell'angolo corrispondente; mentre i valori  $C_2$  e  $C_1$  sono da considerarsi come moduli, quindi senza segno algebrico.

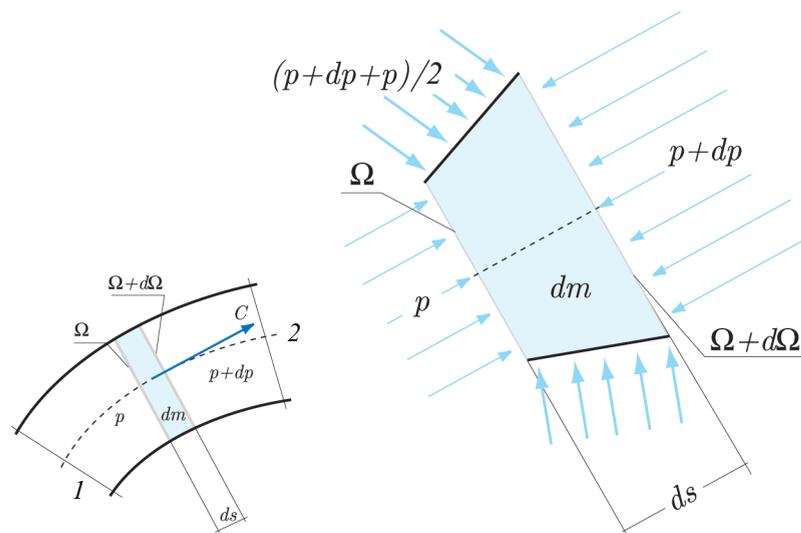
## 4.8 L'equilibrio dinamico delle forze

L'equazione meccanica, anziché nella forma dell'equazione dell'impulso, può anche essere posta nella forma di *equazione dell'energia*, la quale esprime la costanza dell'energia meccanica posseduta dal fluido, durante l'efflusso in un condotto, a meno delle perdite dovute agli attriti.

Conviene, per semplicità, ricavare tale equazione in prima battuta nella forma unidimensionale, salvo poi estenderla al caso tridimensionale. Si consideri, perciò un condotto (vedere **Figura 4.4**) la cui sezione vari con continuità e nel quale il *moto del fluido sia permanente*. Nell'ipotesi di unidimensionalità, la coordinata  $s$  sull'asse del condotto caratterizza la situazione locale del fluido, giacché lungo tutte le traiettorie i fenomeni si riproducono identicamente a quelli che si verificano sull'asse, che rappresenta la traiettoria centrale dell'efflusso. È opportuno osservare che, in tale ipotesi, anche le velocità delle particelle fluide sono le stesse in ogni sezione dell'efflusso. Questa ipotesi, non corretta nel caso di un condotto di dimensioni finite, è accettabile invece se si considera – per il momento, salvo a correggere più tardi i risultati dell'analisi in maniera da tenere conto delle reali distribuzioni di velocità – un *tubo di flusso sufficientemente stretto di corrente fluida*.

Si considera un tubo di  
flusso elementare.

**Figura 4.4**  
Tubo di flusso (sufficientemente stretto) di corrente fluida di massa  $dm$ .  
Distribuzione delle pressioni sulla superficie esterna di un tronco elementare di lunghezza  $ds$  appartenente al tubo di flusso elementare.



Tra le sezioni 1 e 2 del condotto si consideri il tronco elementare di lunghezza  $ds$  e massa  $dm$ . Tale massa elementare sia contenuta tra le due sezioni  $\Omega$  e  $\Omega + d\Omega$ , trasversali al flusso. Si calcoli ora l'espressione dell'equilibrio dinamico delle forze agenti sul tronco elementare del tubo di flusso. La proiezione lungo l'asse  $s$  del condotto della risultante delle forze di pressione agenti sull'elemento fluido in questione è, con riferimento alla **Figura 4.4** (nella quale si è supposto che  $dp/ds$  sia la derivata della pressione lungo l'asse):

$$p\Omega - (p + dp)(\Omega + d\Omega) + (p + dp/2)d\Omega = -\Omega dp - \frac{1}{2}dp d\Omega \cong -\Omega dp.$$

**Schematizzazione delle forze agenti**

L'elemento fluido sia inoltre soggetto alla forza peso  $F_p$ , per unità di massa, e ad un'eventuale forza  $F$  (sempre per unità di massa) dipendente dalla presenza di macchine con parti mobili all'interno della massa fluida. Siano anche presi in considerazione delle resistenze fluidodinamiche per unità di massa, indicate globalmente col vettore  $R$ , e diretto sempre contrariamente al verso del moto e con direzione tangente all'asse del tubo di flusso.

**Equilibrio dinamico delle forze lungo la direzione dell'asse del condotto**

Ciò posto, l'equilibrio dinamico delle forze proiettato lungo l'asse  $s$  del condotto si può scrivere (per maggiori dettagli vedere Appendice B):

$$\dot{m} dC = dm \frac{dC}{dt} = F dm + (dm \mathbf{F}_p \cdot \hat{s}) - R dm - \Omega dp, \quad (IV.23)$$

essendo:

- $\dot{m} = dm/dt = \rho \Omega C$  è la portata in massa della corrente fluida; essendo  $A$  la sezione utile al passaggio della portata e  $\rho$  la densità volumica del fluido;
- $-\Omega dp$  è la componente della forza risultante delle pressioni, proiettata lungo l'asse  $s$ ;
- $C$  la velocità del flusso lungo la direzione del moto, coincidente appunto con l'asse del tubo di flusso;
- $F$  è la componente lungo la direzione del flusso della forza scambiata con la macchina. Il suo verso si fissa, per il momento, concordemente alla direzione del flusso. Infatti, si suppone che la presenza di una macchina operatrice interagente energeticamente col fluido agisca, in generale, in maniera tale da variare la velocità e la pressione della massa fluida lungo il moto; infatti, l'**EQ. (IV.23)** può essere posta nella forma seguente:

$$dm \frac{dC}{dt} + \Omega dp = F dm + (dm \mathbf{F}_p \cdot \hat{s}) - R dm; \quad (IV.23_a)$$

da cui si deduce, ad esempio, che – almeno tendenzialmente – un contributo di energia fornito al fluido da una macchina operatrice esterna ( $F dm > 0$ ) aumenta l'energia cinetica ( $dC > 0$ ) e la pressione ( $dp > 0$ ) del fluido lungo il moto;

- $-R dm$  è la risultante degli attriti, con direzione tangente all'asse del tubo di flusso e verso sempre contrario alla velocità  $C$ . Il loro lavoro dissipativo, invece, contribuisce a diminuire l'energia cinetica e a diminuire la pressione del fluido lungo il moto;
- $dm \mathbf{F}_p \cdot \hat{s}$  è la proiezione della forza peso lungo l'asse  $s$ .

Ponendo per la massa elementare del tronco di fluido l'espressione:

$$dm = \rho \Omega ds, \quad (IV.24)$$

dove  $\rho$  è la massa volumica del fluido nel baricentro della massetta  $dm$ , si può scrivere la proiezione sull'asse  $s$  dell'equilibrio dinamico delle forze in questa forma:

In sede di bilancio della sola energia cinetica, il lavoro meccanico esplicato dalla risultante  $-\Omega dp$  nel tempo  $dt$  rappresenta l'energia meccanica trasmessa dalle pressioni esterne alla massetta  $dm$ . Non tutta questa energia meccanica aumenta l'energia cinetica: parte di essa viene dissipata (all'interno del volume della massa fluida) in calore ( $-R dm$ ). Nel bilancio della sola energia cinetica della massetta infinitesima  $dm$  non viene considerato il lavoro di dilatazione/contrazione del volume  $-pdv$ ; in quanto, tale lavoro delle forze esterne non contribuisce a variare l'energia cinetica del fluido, ma solo la sua energia interna.

$$\frac{dC}{dt} = F + (\mathbf{F}_p \cdot \hat{s}) - R - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} \quad (\text{IV.23}_b)$$

avendo diviso ambo i membri dell'EQ. (IV.23) per il valore  $dm = \rho \Omega ds$ .

**Moto a potenziale di velocità**

Nel caso particolare (ideale) di moto a potenziale delle velocità, si deve porre nullo il termine  $R$  relativo alla presenza degli attriti. Nel caso, infatti, di moto a potenziale gli attriti sono assenti. In questa circostanza, l'equilibrio dinamico delle forze assume la forma:

$$\frac{dC}{dt} = F + (\mathbf{F}_p \cdot \hat{s}) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}. \quad (\text{IV.25})$$

La stessa, in termini di grandezze vettoriali:

$$\frac{dC}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (\text{IV.25}_a)$$

**4.8.1 Equazione di Eulero**

In particolare, se dall'EQ. (IV.25\_a) si prescinde dalla presenza di una eventuale macchina esterna scambiatrice di energia con il fluido ( $\mathbf{F} \equiv 0$ ) e si considerano quindi solo forze di superficie (forze di contatto con il fluido adiacente) e forze di massa di natura conservativa (forza peso), la precedente equazione assume la nota forma:

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = \mathbf{F}_p - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.} \quad (\text{IV.25}_b)$$

Quest'ultima equazione è la nota *equazione di Eulero*.

**Equazione di Eulero per fluido incompressibile**

Se il fluido è incompressibile e sottoposto alla sola forza gravitazionale, se si assume una particolare terna di riferimento che abbia l'asse  $z$  verticale diretto verso l'alto, la forza  $\mathbf{F}_p$  conservativa è esprimibile mediante una funzione potenziale  $\phi = -gz$ , in modo che sia:

$$\mathbf{F}_p = \text{grad } \phi. \quad (\text{IV.26})$$

L'equazione di Eulero, allora, assume la forma particolare:

$$\frac{dC}{dt} = \text{grad } \phi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (\text{IV.27})$$

Dividendo tutto per  $g = \text{cost}$ , l'equazione di Eulero si può quindi scrivere:

$$-\frac{\mathbf{a}}{g} = \text{grad} \left( \frac{-\phi}{g} + \frac{p}{\rho g} \right) = \text{grad} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right), \quad (\text{IV.28})$$

in cui  $\mathbf{a} = dC/dt$  è l'accelerazione del fluido.

L'EQ. (IV.28) afferma che il gradiente della quota piezometrica risulta uguale al rapporto, cambiato di segno, fra l'accelerazione cui è sottoposto l'elementino fluido in movimento e l'accelerazione di gravità: nullo, in particolare, per un fluido in quiete e nullo anche per un fluido in movimento uniforme.

NOTA. Si proietti ora l'equazione:



$$-\frac{\mathbf{a}}{g} = \text{grad} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (\text{IV.29})$$

lungo i tre assi  $t$ ;  $n$  e  $b$ ; rispettivamente:  $t$  lungo la tangente alla traiettoria;  $n$  lungo la direzione dell'accelerazione centripeta;  $b$  lungo la direzione perpendicolare al piano che contiene il tratto di traiettoria nell'intorno del punto in cui si trova la massetta fluida nell'intervallo di tempo  $dt$  considerato (piano  $t;n$ ).

Le proiezioni su questi tre assi locali dell'equazione di Eulero sono:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g} \frac{dC}{dt}; \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{C^2}{gr}; \quad \frac{\partial}{\partial b}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0. \quad (\text{IV.30})$$

L'accelerazione  $\mathbf{a}$  ha, infatti, notoriamente componente pari alla derivata del modulo della velocità lungo la tangente  $t$  alla traiettoria; componente pari all'accelerazione centripeta  $C^2/r$  lungo la direzione  $n$ , e componente nulla lungo la direzione  $b$  (binormale).

## 4.9 Equazione dell'energia in forma differenziale

L'equazione dell'equilibrio dinamico delle forze (vedere equazione EQ. (IV.23\_b) a pag. 67) che qui si riporta per comodità:

$$\frac{dC}{dt} = F + (\mathbf{F}_p \cdot \hat{\mathbf{s}}) - R - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}, \quad (\text{IV.31})$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  per il percorso differenziale  $ds$  lungo la traiettoria, si ottiene quello che viene chiamato il teorema delle forze vive (teorema dell'energia cinetica).

può essere sottoposta ad un'interessante osservazione. Moltiplicando ambo i membri della suddetta equazione per il percorso differenziale  $ds$  di traiettoria, si ottiene:

$$\frac{dC}{dt} ds = F ds + (\mathbf{F}_p \cdot \hat{\mathbf{s}} ds) - R ds - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds. \quad (\text{IV.31}_a)$$

Questa equazione non è nient'altro che l'espressione del teorema dell'energia cinetica per l'unità di massa fluida, in termini differenziali. Esso afferma infatti:

Per il punto materiale  $\rightarrow$

**Teorema dell'energia cinetica<sup>(9.7)</sup>.** Quando un punto materiale si muove lungo una certa traiettoria dal punto  $A$  al punto  $B$ , il lavoro compiuto dal risultante delle forze<sup>(9.8)</sup> su di esso agenti è pari alla variazione di energia cinetica del punto stesso, cioè pari alla differenza fra l'energia cinetica che il punto ha nella posizione  $B$  e quella che aveva nella posizione  $A$ .

I termini presenti nell'EQ. (IV.31\_a) si riferiscono all'unità di massa fluida. Essi sono espressi in termini differenziali:

- $(dC/dt)ds = C dC = d(C^2/2)$  è la variazione dell'energia cinetica;
- $F ds = dL_{est}$  il lavoro elementare esterno scambiato con una macchina che abbia parti mobili con la massetta fluida infinitesima.  $F$  si considera positivo nel caso di macchina operatrice; negativo nel caso di macchina motrice;
- $\mathbf{F}_p \cdot \hat{\mathbf{s}} ds = \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{s}$  il lavoro della forza peso, essendo il percorso differenziale vettoriale pari a:  $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} ds$ ;
- $-R ds$  è la risultante degli attriti: una certa frazione di energia meccanica esterna viene dissipata in calore e non incrementa l'energia cinetica;
- $-(1/\rho) dp$  è il lavoro meccanico esterno delle forze di pressione che agiscono sul contorno esterno della massetta fluida: parte di questa energia viene dissipata in calore ( $-R ds$ ) dagli attriti interni alla massetta fluida.

(9.7) Tale teorema viene anche detto "Teorema delle forze vive".

(9.8) Queste forze comprendono sia le forze *conservative* sia *non conservative* (forze di attrito).

Nel caso della forza peso, essendo una forza conservativa, il lavoro è esprimibile mediante la funzione potenziale  $\phi = -gz$  (avendo fissato l'asse  $z$  positivo verso l'alto):

$$dL_{peso} = \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{s} = \text{grad} \phi \cdot d\mathbf{s} = d\phi. \quad (\text{IV.32})$$

Chiamando con  $|dL_{attriti}| \equiv R ds$  il modulo del lavoro dissipativo degli attriti, si può formulare il teorema dell'energia cinetica (per l'unità di massa fluida) nella seguente forma differenziale:

$$CdC = (dL_{est} + d\phi) - |dL_{attriti}| - \frac{dp}{\rho}. \quad (\text{IV.33})$$

L'equazione è suscettibile di varie interpretazioni, una è la seguente:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{C^2}{2}\right) + g dz = dL_{est} - |dL_{attriti}|, \quad (\text{IV.34})$$

che integrata fornisce (per l'unità di massa fluida):

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \left(\frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) = L_{est} - |L_{attriti}|. \quad (\text{IV.34}_a)$$

#### Liquido ideale

Nel caso particolare di liquido ( $\rho = \text{cost}$ ) non soggetto all'azione di nessuna macchina ( $L_{est} = 0$ ) e supposto il fluido ideale ( $|L_{attriti}| = 0$ ), si ottiene, in termini di unità di peso di fluido evolvente:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{C^2}{2g} = \text{cost} \quad (\text{IV.35})$$

ovvero la costanza del *trinomio energetico di Bernoulli*.

È possibile, inoltre, generalizzare il teorema di Bernoulli scrivendo:

$$\Delta\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{C^2}{2g}\right) = L_{est} - |L_{attriti}|; \quad (\text{IV.36})$$

in quanto sia le dissipazioni che le immissioni e/o sottrazioni di energia mediante un macchina esterna contribuiscono a variare il contenuto energetico di una corrente fluida.

A questo punto, se si considera l'espressione del I° Principio della Termodinamica in termini entalpici ( $i$  è la variabile termodinamica di stato *entalpia*):

$$di = dQ_{est} + dQ_{attriti} + \frac{dp}{\rho}, \quad (\text{IV.37})$$

e la si pone nella diversa forma:

$$-dQ_{attriti} - \frac{dp}{\rho} = dQ_{est} - di \quad (\text{IV.37}_a)$$

è possibile sostituire il I° membro di quest'ultima equazione nell'EQ. (IV.33), in modo da ottenere:

$$CdC = (dL_{est} + d\phi) + dQ_{est} - di; \quad (\text{IV.33}_a)$$

#### Equazione dell'energia

avendo tenuto conto del fatto che il lavoro dissipativo degli attriti viene convertito totalmente in calore, ceduto quindi internamente al fluido:  $dQ_{attriti} \equiv |dL_{attriti}|$ .

Il presente ragionamento è estendibile, con analogo procedimento, ai fluidi aeriformi. La presenza di attriti e le macchine variano il contenuto energetico del fluido.

Essendo, inoltre,  $d\phi = -gdz$ , l'equazione dell'energia assume l'aspetto fondamentale (per unità di massa fluida):

$$di + CdC + gdz = dL_{est} + dQ_{est} \quad (\text{IV.38})$$



NOTA. È importante osservare che, nel caso di fluidi aeriformi, il termine legato alla gravitazione – a mezzo dell'energia potenziale di quota – è completamente irrilevante rispetto alle altre variazioni di energia in gioco; questo a causa ovviamente della bassa densità degli aeriformi. Quando il fluido è *incompressibile* ( $p dv = 0$ ), (caso, ad esempio, delle turbine idrauliche) la variazione dell'energia interna è del tutto trascurabile, in quanto non essendoci scambi di calore con fonti esterne ( $dQ_{est} = 0$ ), il I° Principio della Termodinamica  $du = dQ_{est} + dQ_{attriti} - p dv$ , si riduce all'espressione:

$$du = dQ_{attriti}.$$

**Variatione di energia interna sempre irrilevante per un liquido**

Nel caso di un liquido,  $\Delta u$  risulta essere praticamente nulla, perché la temperatura gioca un ruolo energeticamente irrilevante dato che le distanze interparticellari restano praticamente invariate, almeno in sede utile.

#### 4.9.1 Perdite di carico di una corrente

In base all'equazione dell'equilibrio dinamico delle forze agenti sull'unità di massa fluida, scritta in forma differenziale (vedere a pag. 69, (EQ. IV.33)):

$$CdC = (dL_{est} + d\phi) - |dL_{attriti}| - \frac{dp}{\rho} \quad (\text{IV.39})$$

è possibile valutare l'effetto degli attriti nel flusso di una corrente fluida in un condotto. Si consideri il caso particolare di un condotto tubolare diritto – con asse coincidente con l'asse  $s$  della direzione del flusso – a sezione costante, percorso da un fluido la cui densità  $\rho$  non muti durante l'efflusso (ad es. un liquido).

**Assenza di attriti**

Si supponga che il fluido possa schematizzarsi come ideale, quindi con assenza di attriti. Ciò posto, l'applicazione dell'EQ. (IV.39), tenendo conto del fatto che la forza peso non compie lavoro in quanto il tubo è stato supposto orizzontale, si ha:

$$CdC = -\frac{dp}{\rho}. \quad (\text{IV.40})$$

Si è supposto, inoltre, l'assenza di eventuali contributi da macchine esterne ( $dL_{est} = 0$ ). Integrando l'equazione precedente su due sezioni finite 1 e 2, trasversali del flusso, si ha:

$$\frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}.$$

Ma essendo per ipotesi il tubo a sezione costante e  $\rho = \text{cost}$ , per l'equazione di continuità:  $\rho C_1 \Omega = \rho C_2 \Omega$  segue che deve essere  $C_1 = C_2$ . Questo ha come diretta conseguenza che la pressione del fluido rimane invariata fluendo dalla sezione 1 alla sezione 2:

$$0 = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}.$$

**Presenza di attriti**

Nel caso reale di presenza di attriti, ferme restando le altre ipotesi circa la natura del fluido e la geometria del condotto, si ha:

ovvero l'equilibrio dinamico della forza d'inerzia e le forze di pressione agenti sulle due sezioni estreme del tubo che delimitano la massetta  $dm$ :

$$-a\rho\Omega ds - \Omega dp = 0.$$

Quest'ultima equazione, tenendo conto della relazione  $ads = CdC$  (vedi EQ. (IV.45)), può ancora scriversi:

$$-\Omega dp = \rho\Omega CdC = \dot{m}dC, \quad (\text{IV.49})$$

ottenendo una espressione particolare dell'equazione a pag. 66, (EQ. IV.23).

Nota importante



Il fenomeno è molto importante nello studio degli apparecchi che presiedono agli scambi di calore, giacché tali *contropressioni di inerzia* spesso acquistano valori notevoli e costringono a spendere un cospicuo lavoro nelle pompe destinate a forzare l'ingresso del fluido nei condotti.

### Esempio

Si pensi ad una *caldaia monotubolare* (ad attraversamento forzato) nella quale, in un unico condotto a sezione costante, si volesse riscaldare e successivamente vaporizzare dell'acqua a  $100 \text{ bar}$  e poi ancora surriscaldarne il vapore a  $500^\circ \text{C}$ . Dalle tabelle tecniche dell'acqua si vede che il fluido passerebbe da  $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$  alla densità volumica finale di  $\rho_2 = (1000/33,45) \text{ kg/m}^3$ , subendo un rapporto di densità  $\rho_1/\rho_2 = 33,45$ .

La perdita di carico per contropressioni d'inerzia vale dunque, impiegando la relazione a pag. 71, (EQ. IV.43):

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_2 C_2^2 - \rho_1 C_1^2 = \rho_1 C_1^2 \cdot \left( \frac{\rho_2 C_2^2}{\rho_1 C_1^2} - 1 \right),$$

e poiché per la continuità  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \text{cost}$ , risulta.  $\rho_1 C_1 = \rho_2 C_2$  e quindi:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Risulta, in definitiva:  $\Delta p = \rho_1 C_1^2 \cdot \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)$ .

Quindi, se si ammette una velocità iniziale di valore pur limitato, come  $10 \text{ m/s}$ , si otterrebbe:

$$\Delta p = (1000 \text{ kg/m}^3) \cdot (10 \text{ m/s})^2 \cdot (33,45 - 1) \cong (3,25 \times 10^6) \text{ N/m}^2, \text{ pari a:}$$

$\Delta p \cong 32,5 \text{ bar}$ . Per cui un valore cospicuo della contropressione di inerzia.



NOTA. Per questa ragione è pratica consueta dei costruttivi di generatori di vapore monotubolari quella di ramificare via via il condotto, con lo scopo di dimezzare la velocità nei tubi ad ogni bivio, per ridurre con la velocità iniziale  $C_1$  le contropressioni d'inerzia.

Al progettista, come in tutti i problemi tecnici, è riservata la scelta del giusto compromesso tra gli oneri economici dell'impianto (che crescono riducendo le velocità dell'efflusso: aumento del numero di tubazioni utilizzate) e gli oneri di esercizio (che crescono aumentando la velocità d'efflusso: scelta di un limitato numero di tubazioni per la caldaia e quindi maggiori perdite di carico; cui consegue una maggiore potenza da installare alle pompe d'alimentazione della caldaia).

#### 4.9.3 Azione combinata degli attriti e delle contropressioni d'inerzia

Nel caso di fluido comprimibile in un condotto a sezione costante, in presenza di attriti, coesistono evidentemente sia le contropressioni di inerzia per apporto di

calore reversibile da sorgenti esterne, sia per apporti di calore interno per la presenza di lavoro dissipativo degli attriti. L'equilibrio dinamico delle forze per un fluido comprimibile (aeriforme) all'interno di un condotto di sezione costante  $\Omega = cost$  e in presenza di attriti fornisce:

$$\dot{m} dC = - R dm - \Omega dp, \quad (IV.50)$$

che se integrata tra le due sezioni  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  a distanza finita l'una dall'altra (con appunto  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = cost$ ) fornisce:

$$\dot{m} \cdot (C_2 - C_1) = - R \cdot m - \Omega \cdot \Delta p. \quad (IV.51)$$

Per la conservazione della massa è  $\dot{m} = \rho_2 C_2 \Omega = \rho_1 C_1 \Omega = cost$ ; inoltre la massa  $m$  di fluido comprimibile compreso tra le due sezioni del condotto 1 e 2 (non troppo lontane) è esprimibile come  $m = \rho_m \cdot \Omega \cdot s$ , dove  $\rho_m$  è il valore medio della densità volumica della massa  $m$  compresa tra due sezioni  $\Omega$  distanti  $s$ .

$$(\rho_2 C_2^2 - \rho_1 C_1^2) \cdot \Omega = - R \cdot s \cdot (\rho_m \cdot \Omega) - \Omega \cdot \Delta p. \quad (IV.52)$$

**Azione di trascinamento**

In questa equazione è possibile notare che il termine  $R \cdot s \cdot (\rho_m \cdot \Omega)$  rappresenta la risultante delle azioni di trascinamento – di verso sempre contrario al flusso del moto: preceduto dal segno “meno” nell'EQ. (IV.52) – che l'involucro del condotto esercita sulla massa fluida ( $m = s \cdot \rho_m \cdot \Omega$ ) in esso contenuta, in virtù dell'aderenza del fluido alle pareti del condotto.

L'equazione precedente, fornisce la variazione di pressione lungo il moto:

$$\begin{aligned} \rho_2 C_2^2 - \rho_1 C_1^2 &= - R \cdot s \cdot \rho_m - \Delta p \\ \rho_2 C_2^2 - \rho_1 C_1^2 + R \cdot s \cdot \rho_m &= - \Delta p = p_1 - p_2 > 0 \end{aligned} \quad (IV.53)$$

Si sommano, quindi le perdite di carico di natura inerziale alle perdite di carico di natura puramente dissipativa:

$$p_1 - p_2 = - \Delta p = \rho_1 C_1^2 \cdot \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) + R \cdot s \cdot \rho_m. \quad (IV.54)$$

Si sommano cioè le perdite di carico  $(\Delta p)_{inerziale}$  di natura inerziale a quelle  $(\Delta p)_{attriti}$  di natura dissipativa, per cui l'EQ. (IV.54) può essere sintetizzata nella forma:

$$p_1 - p_2 = - \Delta p = (\Delta p)_{inerziale} + (\Delta p)_{attriti}. \quad (IV.54_a)$$



NOTA. Nei processi adiabatici, frequentissimi nello studio delle macchine a fluido, si confondono tuttavia sovente tra loro le due classi di perdite di carico, sia perché  $(\Delta p)_{inerziale}$  può essere in alcuni casi trascurato, sia perché entrambe dipendono dal quadrato di una velocità e pertanto è comodo – data anche la difficoltà di scinderne rigorosamente i valori – congregarle in un unico termine.

**4.9.4 Contropressioni d'inerzia nei condotti**

Mantenendo l'ipotesi di fluido comprimibile<sup>(9.10)</sup> e di tubo a sezione costante non necessariamente orizzontale, si scriva l'equazione dell'energia (per l'unità di massa fluida) in termini finiti nel caso di flusso accompagnato da attriti:

(9.10) Si trascura quindi il contributo del lavoro della forza peso visto il basso valore della densità di un aeriforme rispetto ad un fluido liquido.

$$\left(\frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2}\right) + |L_{attriti}| = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}. \quad (\text{IV.55})$$

**Nota importante**

Per quanto visto precedentemente, l'attrito ( $|L_{attriti}| > 0$ ) ha l'effetto di dilatare il fluido, che riduce pertanto la sua densità nel corso dell'efflusso aumentando via via la portata volumetrica ( $\rho C$ ). In virtù di ciò, si è in precedenza osservato che risulta  $C_2 > C_1$ , quindi l'equazione dell'energia può essere posta nella forma:

$$-\Delta p = p_1 - p_2 = \left[ \rho_m \cdot \left(\frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2}\right) + \rho_m \cdot |L_{attriti}| \right] > 0, \quad (\text{IV.55}_a)$$

dove nel secondo membro si è introdotto il valor medio  $\rho_m$  della densità  $\rho$ . Con le ipotesi fatte, dunque, si può affermare che:

La perdita di carico  $|\Delta p|$  nel condotto è dovuta alla somma di due contributi, poiché l'attrito agisce direttamente, in ragione del lavoro dissipato, ed anche indirettamente, creando cioè contropressioni d'inerzia nel fluido per effetto della sua dilatazione. (Vedere in particolare quanto riportato al Paragrafo 3.3 a pag. 51).

Chiaramente, l'effetto della dilatazione del fluido sussisterebbe anche se, supponendo l'attrito trascurabile o nullo, il fluido venisse riscaldato dall'esterno (quindi in modo reversibile), come nei condotti degli scambiatori di calore, dei generatori di vapore, ecc.<sup>(9.11)</sup>

## 4.10 Variazione entalpica nel rotore

### 4.10.1 Variazione entalpica per le turbine

È noto dalla Meccanica che è possibile esprimere la variazione di entalpia del fluido, nell'attraversamento del rotore della macchina, mediante una espressione in cui compaiono solo delle velocità. Infatti, è altrettanto noto che l'energia che fluido e parti mobili della macchina si scambiano, durante la trasformazione, è data da:

$$L_{est} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}. \quad (\text{IV.56})$$

Inoltre, per l'equazione dell'energia per fluidi aeriformi si ha:

$$L_{est} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + (i_2 - i_1). \quad (\text{IV.57})$$

Dall'esame di queste due equazioni fondamentali, si deduce la relazione seguente:

$$(i_2 - i_1) = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}, \quad (\text{IV.58})$$

che coincide esattamente con l'espressione dell'equazione dell'energia che un osservatore solidale con le pale mobili della macchina scriverebbe dal suo punto di vista. Infatti egli, considerando le pale ferme, "vede" il flusso entrare con velocità assoluta  $W_1$  ed uscire con velocità assoluta  $W_2$  dai condotti interpalari (per lui appunto fissi). Inoltre, egli può solo "avvertire" la presenza di forze inerziali (in particolare, la sola forza inerziale centrifuga svolge lavoro non nullo a differenza di quella complementare di Coriolis, in ogni punto sempre perpendicolare alla traiettoria). Infatti,

(9.11) Per ulteriori dettagli vedere quanto riportato nel Paragrafo 3.3 a pagina 51.

l'osservatore solidale alle palettature del rotore scrive l'equazione dell'energia in questi termini:

$$\boxed{(i_2 - i_1) + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} = L_{inerzia}} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}. \quad (\text{IV.59})$$

**Turbine** Quest'ultima relazione è suscettibile di un'interessante osservazione. Infatti, essa mostra che il salto entalpico nella girante in turbina deve essere tale da creare:

$$(i_1 > i_2).$$

La differenza  $i_2 - i_1$  è data dalla somma del termine  $(U_2^2 - U_1^2)/2g$ , che rappresenta il lavoro delle forze centrifughe, e del termine  $(W_2^2 - W_1^2)/2g$ , che rappresenta il lavoro di accelerazione del kilogrammo di fluido dalla velocità  $W_1$  alla velocità di uscita  $W_2$  che la particolare geometria dei canali interpallari rende attuabile. Dovendo, appunto, essere per la turbina  $i_1 > i_2$ , ne segue (in virtù dell'EQ. (IV.59)) che:

- $(U_1 > U_2)$ : flusso centripeto;
- $(W_1 < W_2)$ : accelerazione del flusso rispetto ai canali interpallari.

Stessa conclusione si poteva trovare osservando la forma differenziale dell'equazione dell'energia, dal punto di vista dell'osservatore solidale alle pale del rotore, e in questa forma:

$$di = -WdW + UdU; \quad (\text{IV.60})$$

infatti:  $di < 0$  quando  $dW > 0$  e  $dU < 0$ .



NOTA. Queste osservazioni sono molto interessanti per diverse ragioni, Innanzitutto, si possono notare i principali vantaggi teorici della *turbina centripeta*. In tale turbina, infatti, gran parte della caduta entalpica è elaborata sotto forma di lavoro delle forze centrifughe e non di accelerazione: nella girante si hanno, quindi, basse velocità relative, cioè basse resistenze fluidodinamiche. Infatti, le perdite di carico dipendono anche dalla distribuzione di velocità dei filetti fluidi rispetto alle pareti del condotto, oltre che dal quadrato delle velocità relative  $W$ .

#### 4.10.2 Variazione entalpica per i compressori

Sfruttando l'equazione dell'energia valutata secondo un osservatore solidale con le palettature mobili:

$$\boxed{(i_2 - i_1) + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} = L_{inerzia}} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}, \quad (\text{IV.61})$$

si può affermare che nel caso di compressione si deve registrare un aumento di entalpia nel fluido:  $i_2 > i_1$ . Ciò, in virtù della predetta equazione, implica che:

- $U_2 > U_1$ : flusso centrifugo;
- $W_1 > W_2$ : decelerazione del flusso rispetto ai canali interpallari.

Stessa conclusione si poteva trovare osservando la forma differenziale dell'equazione dell'energia dal punto di vista dell'osservatore solidale alle pale del rotore, e nella forma:

$$di = -WdW + UdU; \quad (\text{IV.62})$$

infatti:  $di > 0$  quando  $dW < 0$  e  $dU > 0$ .



NOTA. Anche queste considerazioni mostrano i vantaggi teorici dei compressori centrifughi. Infatti, l'incremento entalpico (cioè la compressione) dovuto alle forze centrifughe è una compressione di tipo statico, cioè sostanzialmente priva di perdite. Inoltre, essendo il fluido in decelerazione, le perdite di carico possono mantenersi contenute. La necessità di disporre i canali interpalari divergenti (in regime subsonico), per attuare la condizione  $W_1 > W_2$  rispettando l'equazione di continuità<sup>(9.12)</sup>, comporta una particolare attenzione a quei fenomeni (negativi per la trasmissione di energia) legati al distacco della vena fluida dalle superfici palari.

## 4.11 Forme notevoli dell'equazione di continuità

### 4.11.1 Espressione di Hugoniot dell'equazione di continuità per condotti rotorici di macchine assiali

In linea di massima, le giranti assiali sono intrinsecamente più veloci (alto numero di giri caratteristico) di quelle radiali miste. In linea di principio, è noto che la trasmissione di energia tra fluido e girante è all'origine più intensa dove maggiore è la densità  $\rho$ . A parità di geometria della macchina, gli aeriformi, avendo una minore portata rispetto ai liquidi (per via della minore densità) possono aumentare la loro potenza scambiata con la macchina aumentando la sezione trasversale al flusso e aumentando la velocità assiale del moto nell'attraversamento della macchina. In altri termini, incrementando la portata volumetrica.

Continuità rispetto al moto relativo

In riferimento al moto relativo, la portata in massa si valuta come:<sup>(9.13)</sup>

$$\rho \Omega_{rel} W = cost, \quad (IV.63)$$

dove con  $\Omega_{rel}$  è da intendersi proprio la sezione del condotto (coincidente con la sezione del tubo di flusso relativo).

#### Nota sull'equazione di continuità...

La continuità sussiste ovviamente sia per il tubo di flusso assoluto sia per il tubo di flusso relativo. Il flusso del vettore  $C$  e quello del vettore  $W$  sono del resto identici, essendo nullo quello del vettore  $U$ .

Nella forma scritta a suo tempo  $\rho \Omega' C = cost$ , l'equazione di continuità è intesa applicata al tubo di flusso assoluto ed è sempre valida, ma chiaramente  $\Omega'$  non

è la sezione generica del condotto, bensì quella del tubo di flusso assoluto. È questa una considerazione importantissima, che occorre tenere presente per evitare errori. Anche per queste ragioni, e anche perché il condotto assoluto non è noto a priori, la continuità può ugualmente scriversi con riferimento al moto relativo, nella forma:  $\rho \Omega_{rel} W = cost$ , dove  $\Omega_{rel}$  è la sezione del condotto interpalare.

Fluidi aeriformi compressibili

Per aumentare la portata volumetrica nelle giranti per aeriformi, si possono adottare alte velocità relative  $W$  e quindi adottare delle macchine di geometria assiale. Questo tipo di disposizione lascia intuire che, con maggiore probabilità, proprio nelle macchine assiali non è da escludere che si possano raggiungere delle velocità relative  $W$  prossime o superiori a quelle del suono.

Per questo motivo, risulta utile analizzare la forma dell'equazione di continuità (nel moto relativo) quando le velocità relative possono avvicinarsi o superare la velocità del suono.

(9.12) Questo è vero nel moto relativo subsonico; il contrario accade se le velocità relative sono supersoniche.

(9.13) Vedere testo "Introduzione allo studio delle Macchine a Fluido"; ACTON, CAPUTO; pag. 789.

L'equazione di continuità rispetto al riferimento relativo (osservatore solidale con le pale) ha la forma:

$$\rho_1 \Omega_1 W_1 = \rho_2 \Omega_2 W_2 = \rho \Omega W = cost. \quad (IV.64)$$

Ovvero, in termini differenziali:

$$d(\rho \Omega W) = 0, \quad (IV.65)$$

che porge:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\Omega}{\Omega} + \frac{dW}{W} = 0. \quad (IV.65_a)$$

Nel caso di giranti assiali è nullo il contributo della forza centrifuga per cui nell'equazione dell'energia non rientra il contributo del termine  $UdU$ .

Come già accennato in precedenza, l'equazione dell'energia in forma differenziale, valutata rispetto ad un osservatore solidale con la palettatura, ha la forma:

$$di + WdW = UdU = 0, \quad (IV.66)$$

dove si è tenuto subito conto del fatto che, per giranti assiali è  $dU = 0$ ; e che le trasformazioni all'interno delle macchine sono di regola adiabatiche:  $dQ_{est} = 0$ .

**Flusso ideale: privo di attriti**

Si consideri, per il momento, il caso di flusso ideale privo di attriti. Quindi, la trasformazione del fluido nella turbomacchina è un'adiabatica reversibile (quindi *isentropica*). Dalla Termodinamica sappiamo che, per un'evoluzione di un fluido aeriforme (approssimabile come gas perfetto), la trasformazione adiabatica reversibile è governata dall'equazione:

$$\begin{cases} \frac{p}{\rho^k} = cost \\ k = \frac{c_p}{c_v} \end{cases} \quad (IV.67)$$

Passando ai logaritmi.  $\ln p = \ln \rho^k + \ln(cost) = k \ln \rho + cost$  e successivamente differenziando, si ottiene la relazione:

$$\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}. \quad (IV.68)$$

**Velocità caratteristica adiabatica del fluido**

Inoltre, è noto che nel caso di flusso ideale, la *velocità caratteristica adiabatica* del sistema fluido compressibile è data dall'espressione:

$$c^* = \sqrt{kRT}. \quad (IV.69)$$

Questa velocità non è in realtà quello della velocità della perturbazione, bensì – è bene precisarlo! – il suo valore minimo teorico, corrispondente all'intensità infinitesima della perturbazione stessa.

Questa velocità rappresenta dunque la velocità di propagazione di una perturbazione infinitesima (la quale è reversibile, non impegnando una degradazione di energia, che è invece sempre presente in perturbazioni di intensità finita).

In base, inoltre, all'equazione di stato dei gas approssimabili come perfetti:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (IV.70)$$

Chiamare – come abitualmente –  $c^*$  velocità del suono significa dunque correttamente intendere che il suono comporta perturbazioni debolissime rispetto alla pressione dell'ambiente nel quale esso viene prodotto.

è possibile ricavare un'espressione che fonda assieme le due equazioni **EQ. (IV.69)** e **EQ. (IV.70)**:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{(c^*)^2}{k} \quad (\text{IV.71})$$

In virtù di quest'ultimo legame trovato, è possibile esprimere l'EQ. (IV.68) nella seguente forma:

$$dp = k \frac{p}{\rho} d\rho = c^{*2} d\rho, \quad (\text{IV.68}_a)$$

Nel caso di evoluzione isentropica (adiabatica reversibile:  $dQ_{est} + dQ_{attriti} = 0$ ), non essendo presenti attriti, si ha che la variazione di entalpia (in virtù dell'espressione del I° Principio della Termodinamica in termini entalpici) è caratterizzata direttamente dalla relazione:

$$di = \frac{dp}{\rho}, \quad (\text{IV.72})$$

**Equazione dell'energia per macchine assiali (nel riferimento relativo)**

che sostituita nell'EQ. (IV.66), porge:

$$WdW = -\frac{[dp]}{\rho} = -\frac{[c^{*2} d\rho]}{\rho} \quad (\text{IV.73})$$

Per l'equazione della continuità, si ha:

$$\frac{dW}{W} + \left[ \frac{d\rho}{\rho} \right] = -\frac{d\Omega}{\Omega}, \quad (\text{IV.74})$$

quindi risulta:

$$\frac{dW}{W} + \left[ \frac{WdW}{c^{*2}} \right] = -\frac{d\Omega}{\Omega} \quad (\text{IV.74}_a)$$

Introducendo il *numero di Mach*, definito notoriamente come:

$$Ma = \frac{W}{c^*} = \frac{W}{\sqrt{kRT}},$$

**Formula di Hugoniot nei condotti rotorici di una macchina assiale**

si arriva alla formula di Hugoniot:

$$\boxed{\frac{d\Omega}{\Omega} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dW}{W}} \quad (\text{IV.75})$$



NOTA. Si poteva arrivare lo stesso a questa formula, considerando il fatto che, per un'adiabatica reversibile (quindi isentropica), il I° Principio della Termodinamica è esprimibile come:

$$p dv + du = \boxed{dQ_{tot} = 0}, \quad (\text{IV.76})$$

**I° Principio Termodinamica per una trasformazione isentropica**

per cui, essendo in ogni caso  $du = c_v \cdot dT$ , perché l'energia interna è una variabile di stato, si ha:  $0 = p dv + c_v \cdot dT$ . Ora, utilizzando l'equazione di stato per i gas (perfetti)  $p = \rho R T$ , si può esprimere il I° Principio, per una trasformazione isentropica, in questi termini:

$$RT \cdot \frac{dv}{v} + c_v \cdot dT = 0. \quad (\text{IV.77})$$

Inoltre, dal noto legame  $v = 1/\rho$ , si ha che la precedente equazione assume l'aspetto:

$$m = \frac{dp}{dt} + (v_{\Omega} \times q), \tag{IV.94_a}$$

dove  $v_{\Omega}$  è la velocità del polo  $\Omega$  nel sistema di riferimento inerziale considerato. Nel caso particolare che il polo sia un punto fermo nel sistema di riferimento inerziale ( $v_{\Omega} = 0$ ), l'EQ. (IV.94\_a) si riduce alla forma fondamentale:

$$m = \frac{dp}{dt}. \tag{IV.95}$$

**Nota importante**



Nel caso di un sistema materiale  $S$  di  $N$  punti, si deve applicare l'EQ. (IV.94\_a) ad ognuno degli  $N$  punti costituenti il sistema materiale e poi sommare:

$$M^{(est)} \equiv \sum_{i=1}^N m_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N p_i \right) + (v_{\Omega} \times Q). \tag{IV.96}$$

A questo punto, è utile osservare che se si decide di scegliere il punto  $\Omega$  coincidente con il centro di massa del sistema  $S$ , allora seguirà:

$$v_{\Omega} \times Q = v_C \times Q = v_C \times Mv_C = 0,$$

essendo  $v_C$  la velocità del centro di massa degli  $N$  punti costituenti il sistema  $S$ . L'aver fatto questa scelta particolare, semplifica di molto l'equazione che caratterizza la variazione della grandezza:

$$\sum_{i=1}^N p_i \equiv P.$$

**Momento totale della quantità di moto**

Il vettore  $P$  rappresenta la risultante di tutti i momenti delle  $N$  quantità di moto degli  $N$  punti costituenti il sistema  $S$ .

Quanto visto, porta a considerare – nel caso dello studio del moto di un sistema di punti – a considerare il polo  $\Omega$  coincidente con il baricentro del sistema stesso, in modo da considerare l'equazione cardinale nella forma semplificata seguente:

$$M^{(est)} = \frac{dP}{dt}, \tag{IV.97}$$

in cui  $M^{(est)}$  è il risultante dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema  $S$ .

**Teorema del momento angolare**

Queste considerazioni portano a formulare due espressioni di uno stesso teorema: uno per il singolo punto materiale e l'altra per il sistema di punti:

Per il punto materiale

**Teorema 1.** *In ogni sistema di riferimento inerziale, se si sceglie un punto fisso come polo, il momento  $m$  della forza risultante agente su un punto materiale è pari alla derivata rispetto al tempo del momento angolare  $p$  del punto materiale stesso.*

Per i sistemi di punti

**Teorema 2.** *In ogni sistema di riferimento inerziale, se si sceglie come polo il baricentro del sistema di punti materiali di cui si studia il moto, il risultante  $M^{(est)}$  dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema è pari alla derivata totale del vettore  $P$  momento totale della quantità di moto.*

**4.12.3 Teorema del Momento della quantità di moto per le turbomacchine**

Nell'ipotesi, di consueto prevista, che la derivata della quantità di moto totale  $P$  del fluido evolvente sia costante, ai differenziali è lecito sostituire le differenze finite

nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ ; per cui, indicando con  $M^{(est)}$  il risultante dei momenti applicati da tutte le forze agenti sul sistema  $S$  fluido, l'EQ. (IV.97) assume la forma:

$$M^{(est)} = \frac{\Delta P}{\Delta t}. \quad (IV.97\_a)$$

#### Nota importante



Le forze agenti sul fluido all'interno del volume di controllo sono raggruppabili in due gruppi distinti:

##### 1. primo gruppo:

- le forze esterne di massa, dovute al campo del geopotenziale (forze peso), che agiscono sul fluido all'interno del volume di controllo perché il fluido è dotato di massa;
- le forze applicate dalle pareti fisse interne al volume di controllo (la girante è generalmente intubata in un condotto a pareti fisse) e da tutte quelle parti rotanti che ruotano perché solidali con l'albero motore, e hanno in gran parte funzione di sostegno e architettura per la girante (sono, quindi, escluse tra questo gruppo le palettature rotanti);
- le forze esercitate dal flusso contiguo in contatto con le sezioni di ingresso e di uscita per il volume di controllo;

##### 2. secondo gruppo:

- forze di superficie esercitate sul fluido dalla palettatura rotante.

Per quanto riguarda le forze del *primo gruppo*, date le simmetrie esistenti nel volume di controllo – viste le geometrie e le architetture adottate per le turbomacchine attuali – esse presentano momenti privi di componenti nella direzione dell'asse di rotazione della girante  $\omega$ . In particolare, le forze esercitate dal fluido contiguo attraverso le sezioni di ingresso e di uscita per il volume di controllo hanno tutti, generalmente, rette d'azione passanti per l'asse di rotazione a causa delle simmetrie esistenti, e quindi non possono avere momento con componenti non nulle lungo l'asse di rotazione della girante.

#### Momenti delle forze di contatto fluido palettature

L'unica componente in direzione  $\omega$  dei momenti delle forze esterne è quella dovuta agli sforzi esercitati sul fluido dalla palettatura rotante (*secondo gruppo*).

Ora si indichi con  $M^{(e)}$  il vettore risultante dei momenti delle forze che le palettature mobili esercitano sul fluido, quando questo attraversa tutta la girante.

Ovviamente, per il *Principio di azione e reazione*, se le parti rotanti della macchina applicano al sistema fluido un momento risultante  $M^{(e)}$ , allora il sistema fluido applica sulle parti rotanti della macchina un risultante di momenti  $M_{f \rightarrow p}$ , tale che appunto risulta:

$$M_{f \rightarrow p} + M^{(e)} = 0.$$

Volendo, quindi, esprimere il *teorema del momento della quantità di moto* in funzione del momento risultante che il fluido evolvente “scarica” sulle palettature mobili, si scrive:

$$-M_{f \rightarrow p} = \frac{\Delta P}{\Delta t}. \quad (IV.98)$$

Quindi, il momento che il fluido applica alle palettature mobili quando vi entra in contatto nell'attraversamento del rotore si calcola come:

$$M_{f \rightarrow p} = -\frac{\Delta P}{\Delta t} = -\frac{\Delta m \cdot (r_2 \wedge C_2 - r_1 \wedge C_1)}{\Delta t}, \quad (IV.98\_a)$$

essendo  $P = r \wedge (\Delta m \cdot C) = r \wedge \mathbf{q}$  il generico momento della quantità di moto della massa di fluido  $\Delta m$ .

**Punto di vista euleriano**

Di fatto, il carattere di stazionarietà lascia importanza ai soli fenomeni di confine (sezione di ingresso alla girante, e sezione di uscita dalla girante) e dunque alle grandezze delle sole porzioni  $\Delta m$  del fluido che, secondo il punto di vista euleriano, entrano nel volume di controllo (costituito dalla zona di spazio occupata dalla girante) e ne escono, senza pertanto dover considerare ciò che avviene all'interno della girante.

È agevole, nello studio dello scambio di momenti tra fluido e girante, considerare il volume di controllo (fisso) che racchiude la girante stessa. In tale volume di controllo le sezioni di ingresso e uscita sono, rispettivamente, le sezioni di entrata e uscita in corrispondenza all'altezza dei canali delle palettature.

In particolare, non essendovi né addensamento, né rarefazione di materia (massa fluida è costante), tanta massa entra nel volume di controllo che racchiude la girante e tanta massa ne esce: la massa all'interno della girante è sempre della stessa quantità (massa costante). Si conclude, inoltre, che in condizioni di moto stazionario, il rapporto tra la quantità di massa  $\Delta m$  che entra/esce dal volume di controllo e l'intervallo di tempo richiesto  $\Delta t$  per entrarvi/uscirvi è sempre uguale e costante:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \dot{m} = \frac{dm}{dt}.$$

Quindi, nel caso di flusso stazionario, tale rapporto essendo identico per qualsiasi intervallo di tempo, lo è pure nel caso limite di intervallo infinitesimo. In particolare, si nota che, nel caso stazionario, è costante la *portata in massa*:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho C \Omega = \text{cost}.$$

**Equazione di Eulero**

Quest'ultima considerazione porta ad arricchire l'equazione di Eulero, sulla trasmissione del momento sulla girante, in questa forma:

$$M_{f \rightarrow p} = \dot{m} (r_1 \wedge C_1 - r_2 \wedge C_2) \tag{IV.99}$$

Il concetto è, dunque, quello di “avvolgere” la girante con un volume di controllo (fisso e solidale con l'albero motore) e di analizzare solo quello che avviene all'entrata e all'uscita di tale volume, senza indagare a cosa accade all'interno di tale volume di controllo.

**Nota importante**



Questo approccio consente, quindi, di ragionare con le sole velocità assolute  $C$ . Infatti, nel volume di controllo fisso, l'osservatore assoluto rileva che, nel tempo  $\Delta t$ , una corrente di massa  $\Delta m$  entra nel volume di controllo con velocità  $C_1$  e contemporaneamente esce, con velocità  $C_2$ , dal volume di controllo un'altra corrente di massa  $\Delta m$ .

Proiettando l'EQ. (IV.99) lungo l'asse di rotazione  $\omega$  ed indicando con  $M_{f \rightarrow p}^{(\omega)}$  la proiezione del vettore  $M_{f \rightarrow p}$  sull'asse di rotazione, si ha che:

$$M_{f \rightarrow p}^{(\omega)} = \dot{m} (r_1 C_{1t} - r_2 C_{2t}), \tag{IV.100}$$

avendo indicato con  $C_{it}$  la *componente periferica* della velocità  $C_i$  (questa componente ha la stessa direzione della velocità di trascinamento  $U$  del rotore, e modulo pari alla proiezione di  $C_i$  sul vettore  $U$ ):

Sul moto rotatorio, e sulla trasmissione di momento sull'albero motore, hanno perciò effetto sostanziale solo le variazioni delle componenti periferiche delle velocità.

L'EQ. (IV.100) esprime, in termini analitici, la proprietà che per la *genesì di momento sul rotore* ( $M_{f \rightarrow p}^{(\omega)} > 0$ ) la *velocità assoluta del fluido deve veder diminuire la propria componente tangenziale* ( $C_{1t} > C_{2t}$ ) nell'attraversamento della girante.



NOTA. Per il trasferimento di energia dal fluido alla girante, è logico pensare, in linea di principio, che il fluido entri in contatto con la girante – con il suo “carico energetico” da trasferire – in punti il più possibile distanti dall'asse di rotazione, per meglio

esercitare il suo momento di forza. Questa considerazione – quindi, nel caso di turbine – porta a considerare sempre implicita la condizione:  $r_1 > r_2$ .

#### 4.12.4 Espressioni della potenza trasmessa alla girante

In una girante dotata di velocità angolare costante  $\omega$ , se  $r$  è la distanza di un punto solidale con le palettature con l'asse di rotazione, in quel punto risulta una velocità periferica  $U = r\omega$ . Perciò, la potenza trasmessa dal fluido alla girante si calcola:

$$P = \omega M_{f \rightarrow p}^{(\omega)} = \dot{m} (\omega r_1 C_{1t} - \omega r_2 C_{2t}) = \dot{m} (U_1 C_{1t} - U_2 C_{2t}). \quad (\text{IV.101})$$

Potenza specifica di una corrente fluida

Quindi, il *lavoro massico o unitario*  $L_m$  (o *potenza specifica*) – potenza estrinseca per 1 unità di portata del fluido evolvente  $L_{est} = P/\dot{m}$  – risulta legato alla definizione classica di potenza in questo modo:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \frac{L}{\Delta m} = \dot{m} L_{est}, \quad (\text{IV.102})$$

dove con  $L$  si è indicato la semplice energia lavoro – di dimensioni  $[N \cdot m]$  – che nell'unità di tempo estrinseca il valore di potenza pari proprio a  $P$ .

Ciò precisato, l'equazione che governa la trasmissione di energia dal fluido alla girante, può essere espressa mediante la relazione:

$$P/\dot{m} = L_{est} = (U_1 C_{1t} - U_2 C_{2t}) = -\Delta(U C_t). \quad (\text{IV.101}_a)$$



NOTA. Per lo sviluppo di momento e di lavoro da parte del fluido deve essere quindi  $U_1 C_{1t} > U_2 C_{2t}$ ; in una turbina, pertanto, la girante *deve consentire e attuare la diminuzione del prodotto*  $U C_t$ .

Questa equazione è stata ricavata da Eulero intorno al 1750 e *costituisce il fondamento teorico di tutte le turbomacchine motrici e operatrici*: in particolare, per una turbina, esprime che *la trasmissione di lavoro (massico) alla girante è legata alla diminuzione del momento della quantità di moto del fluido*.

L'EQ. (IV.101<sub>a</sub>) mostra che il lavoro unitario (massico) dipende esclusivamente dalla vicenda cinematica o, in altri termini, dalla *forma della corrente* quale risulta stabilita sia dalla geometria dei condotti della girante sia dalle condizioni di portata fluente, di velocità di rotazione, di modalità di deflusso.

L'equazione di Eulero si collega ad altre formulazioni, notevoli per la comprensione della natura fisica del trasferimento di energia. Dall'esame della **Figura 4.7**, in cui si è riportato un generico triangolo delle velocità che caratterizza l'assetto delle velocità o all'entrata o all'uscita della girante palettata, si può notare che la componente (periferica) della velocità assoluta  $C$  lungo la direzione della velocità di trascinamento  $U$  è pari a  $C_t = C \cdot \cos \alpha$ .

Relazione tra lati di un triangolo: teorema di Carnot

Sempre al triangolo delle velocità suddetto, si può applicare il noto *teorema di Carnot* sui triangoli. In particolare:

$$W^2 = U^2 + C^2 - 2UC \cdot \cos \alpha. \quad (\text{IV.103})$$

Questa relazione, tenendo conto che è  $C_t = C \cdot \cos \alpha$ , assume l'aspetto:

$$W^2 = U^2 + C^2 - 2UC_t, \quad (\text{IV.103}_a)$$

per cui si avrebbe il legame:

$$-UC_t = -\left[ \frac{1}{2} \cdot (C^2 - W^2 + U^2) \right]. \quad (\text{IV.104})$$

Sostituendo quest'ultima espressione nell'EQ. (IV.101\_a), si ottiene una particolare e fondamentale equazione:

$$L_{est} = -\Delta \left[ \frac{1}{2} \cdot (C^2 - W^2 + U^2) \right] = -\Delta(UC_t) . \quad (IV.105)$$

**Trasferimento di energia dal fluido alla girante: turbina**

Se si passa ai differenziali si ottiene:

$$dL_{est} = -(CdC - WdW + UdU) = -d(UC_t) . \quad (IV.106)$$

Da questa equazione differenziale, si può dedurre che:

1. *caso di turbina* (energia dal fluido alla girante). Abbiamo visto – in base all'EQ. (IV.101\_a) – che, nel caso di trasmissione di energia dal fluido alla girante, è  $dL_{est} > 0$ ; deve quindi essere:
  - $dC < 0$ , decelerazione del flusso assoluto. Pensando al volume di controllo, senza indagare cosa accade all'interno, è ovvio che se il fluido cede energia al volume di controllo, deve entrare dentro di esso con una energia cinetica iniziale  $C_1$  maggiore di quella finale  $C_2$ ;
  - $dW > 0$ , accelerazione del flusso rispetto ai canali interpallari;
  - $dU < 0$ , flusso centripeto.

**Nota importante**

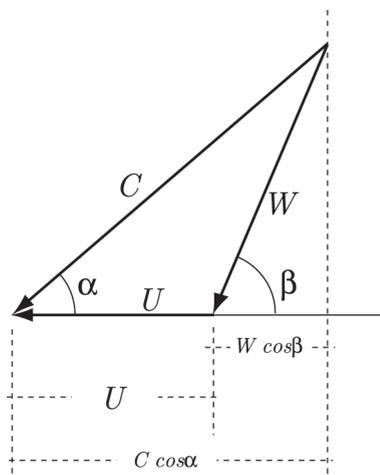


Le ultime due condizioni si possono interpretare e giustificare come segue: in una turbina, le maggiori pressioni del fluido “servono” nelle superfici delle palettature che distano maggiormente dalla linea d'asse di rotazione della girante. Questo, infatti, perché il momento delle forze applicate dal fluido sulle superfici palari della girante risulta più intenso – o meglio – più “efficace” se le forze agenti presentano, al momento del trasferimento di energia, un braccio maggiore possibile (da qui la necessità di un flusso centripeto:  $dU < 0$ ).

**Azione della forza inerziale centrifuga**

La forza inerziale centrifuga (esistente sempre in virtù della rotazione  $\omega$ ) “aiuta” il fluido (entrante in zone maggiormente distanti dall'asse di rotazione) a mantenere una maggiore pressione all'atto dello scambio. Successivamente – in virtù del flusso centripeto – il fluido, man mano che cede la sua energia alla girante (quindi diminuendo di pressione), prende la via d'uscita ormai quasi esausto e con bassa energia di pressione. In questa fase di espulsione, il fluido ormai esausto (avendo trasmesso tutta la sua parte di energia alla girante) viene espulso dalle parti mobili della girante stessa; la quale, per vincere l'inerzia della massa fluida esausta e al massimo

**Figura 4.7**  
Relazione vettoriale tra le velocità assoluta  $C$ , relativa  $W$  e di trascinamento  $U$ .



dell'espansione, la sposta "utilizzando" le superfici delle palette che sono maggiormente vicine all'asse di rotazione. In questo modo, la girante può espellere la massa fluida esausta nella maniera più "efficace", minimizzando la reazione che tale massa esausta estrinseca sulla girante per "contrastare" con la sua inerzia l'atto della sua espulsione.

Per quanto riguarda, infine, il *lavoro di introduzione* della massa fluida all'interno della girante, si può dedurre che la presenza della forza inerziale centrifuga, mantenendo il fluido in entrata ad alti valori della pressione, consente globalmente alla girante l'assorbimento del *lavoro di pulsione*.

2. *caso del compressore* (energia dalla girante al fluido). Il discorso è analogo al precedente tranne per il fatto che si devono invertire tutti i segni nell'**EQ. (IV.106)**:

- compressione:  $dL_{est} < 0$  (in virtù dell'**EQ. (IV.101\_a)**);
- $dC > 0$ ; se dentro un volume di controllo  $c$  è una macchina che fornisce energia al fluido, allora il fluido entra con un'energia cinetica minore  $C_1$  ed esce con un'energia cinetica maggiore  $C_2$ ;
- $dW < 0$ ; decelerazione del flusso rispetto ai canali interpalari: per aumentare la pressione all'uscita della girante è necessario trasformare la velocità relativa in energia di pressione,
- $dU > 0$ , flusso centrifugo: tale flusso tende ad aumentare la pressione del fluido man mano che esso si allontana dall'asse di rotazione della girante. Nel flusso centrifugo, il fluido deve essere "lavorato", ma in modo da ostacolare il meno possibile il moto della girante che viene fornito esternamente sotto forma di introduzione di energia. Una macchina operatrice (compressore) cede energia al fluido; per cui il fluido dovrà entrare nella girante lambendo superfici palari che siano il più vicino possibile all'asse di rotazione, in modo tale che l'inerzia della massa fluida entrante opponga una resistenza "meno efficiente" possibile al movimento proprio della girante. Quando il fluido ha raggiunto l'energia necessaria, viene espulso dalle superfici delle palettature mobili che sono maggiormente distanti dall'asse di rotazione. Infatti, in virtù della presenza del flusso centrifugo, la girante nella fase di espulsione viene "aiutata" dall'entità della forza inerziale centrifuga – la quale tende ad aumentare man mano che il fluido procede nella trasformazione che lo porta al livello energetico desiderato – ad allontanare dalla girante il fluido ormai elaborato, per indirizzarlo nel diffusore.



NOTA. Fino adesso le forme dell'equazione di Eulero sono state dedotte pensando al caso particolare di trasferimento di energia dal fluido alla girante, ovvero il caso di macchina utilizzatrice (turbina). Perciò, nelle equazioni precedenti il termine  $L_{est}$  – come anche il relativo valore differenziale  $dL_{est}$  – risulta positivo. Difatti, tutto il discorso è stato affrontato in termini di potenza trasmessa dal fluido (considerata positiva) alla girante.

#### 4.12.5 Cambiamento della convenzione dei segni delle energie nelle equazioni di Eulero

D'ora in avanti, nella scrittura delle equazioni di Eulero, si adotti la convenzione seguente:

- $L_{est} > 0$  se il fluido riceve energia dalla girante (dall'esterno): compressore;
- $L_{est} < 0$  se il fluido cede energia alla girante (all'esterno): turbina.

Ciò è giustificato dal fatto che, nel caso di una turbomacchina, l'equazione dell'energia presenta la forma generale (vedere equazione a pag. 76, **EQ. IV.57**):

$$L_{est} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + (i_2 - i_1) \quad \text{(IV.107)}$$

Infatti (in un'evoluzione in turbina) il fluido subisce una diminuzione di entalpia che – se si trascura la differenza cinetica nel caso di applicazione dell'equazione allo stadio della macchina – è sintetizzata dall'equazione:

$$(\Delta i)_{stadio} = L_{est} < 0. \quad (IV.108)$$

**Nota importante**



Ciò premesso, se si volesse mantenere questa convenzione, si legherebbe il lavoro massico  $L_{est}$  in maniera diretta alla variazione del patrimonio entalpico del fluido evolvente.

Si riprendano le equazioni di Eulero così come erano state dedotte nel caso particolare di una turbina:

$$P/\dot{m} = L_{est} = (U_1 C_{1t} - U_2 C_{2t}) = -\Delta(U C_t), \quad (IV.109)$$

$$L_{est} = -\Delta\left[\frac{1}{2} \cdot (C^2 - W^2 + U^2)\right] = -\Delta(U C_t), \quad (IV.110)$$

e la relativa forma differenziale:

$$dL_{est} = -(CdC - WdW + UdU) = -d(U C_t). \quad (IV.111)$$

**Cambiamento di convenzione sui segni delle energie**

Nell'EQ. (IV.109); EQ. (IV.110) e EQ. (IV.111) era  $L_{est} > 0$  relativamente al caso della turbina. Si era riscontrato che in turbina  $U C_t$  deve diminuire, come devono diminuire  $dC$ ,  $dU$  e invece deve aumentare  $dW$ .

Cambiando la convenzione sul segno del lavoro massico, le equazioni assumono l'aspetto seguente:

$$P/\dot{m} = L_{est} = (U_2 C_{2t} - U_1 C_{1t}) = \Delta(U C_t), \quad (IV.109_a)$$

$$L_{est} = \Delta\left[\frac{1}{2} \cdot (C^2 - W^2 + U^2)\right] = \Delta(U C_t), \quad (IV.110_a)$$

$$dL_{est} = (CdC - WdW + UdU) = d(U C_t). \quad (IV.111_a)$$

**Nota importante**



Tali relazioni dimostrano, infatti, tenendo conto della nuova convenzione scelta per il segno del lavoro massico, che:

1. nel caso di turbina:  $dL_{est} < 0$ ;  $L_{est} < 0$ ,  
per cui deve risultare:
  - $U_2 C_{2t} < U_1 C_{1t}$ , ovvero:  $dL_{est} = d(U C_t) < 0$ ;
  - $dC < 0$ ,  $dU < 0$  e  $dW > 0$ .
2. nel caso di compressore:  $dL_{est} > 0$ ;  $L_{est} > 0$ ,  
per cui deve risultare:
  - $U_2 C_{2t} > U_1 C_{1t}$ , ovvero:  $dL_{est} = d(U C_t) > 0$ ;
  - $dC > 0$ ,  $dU > 0$  e  $dW < 0$ .



NOTA. Particolare rilievo riveste l'EQ. (IV.111\_a) quando la differenza è tra la sezione di uscita e quella di entrata del volume di controllo:

$$L_{est} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}. \quad (IV.110_b)$$

Quest'equazione è nota come *forma cinetica dell'equazione dell'energia*, in quanto contiene solo velocità. Questa equazione collega il lavoro unitario  $L_{est}$  ai tre campi cinetici e dunque alla *forma della corrente* quale risulta definita dai triangoli di velocità. Nel caso particolare della turbina, infatti, il lavoro unitario (in modulo) è pari

alla somma dei decrementi (in termini dei rispettivi moduli) di energia cinetica dei moti assoluto e di trascinamento e dell'incremento di quella del moto relativo.



NOTA. Nel caso, invece, si fosse affrontato il tutto in termini di portata in peso, anziché di portata in massa, il termine  $L_{est}$  sarebbe diventato un lavoro per unità di peso del fluido. Il valore della massa  $\Delta m$  per un fluido di peso unitario diverrebbe in tal caso:

$$g \cdot \Delta m = G = I \quad \rightarrow \quad \Delta m = \frac{I}{g}. \quad (\text{IV.112})$$

Il lavoro per unità di peso è:  $L_{est} = L/G = L/I = L/g \cdot \Delta m$ . Quindi è possibile scrivere la seguente relazione:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \left( \frac{G}{\Delta t} \right) \frac{L}{G} = \frac{g\Delta m}{\Delta t} \frac{L}{g\Delta m} = g \cdot \dot{m} L_{est}. \quad (\text{IV.113})$$

Ciò posto, la relazione a pag. 88, (EQ. IV.102), diventerebbe relativamente all'unità di peso:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{g\Delta m}{\Delta t} \frac{L}{g\Delta m} = g \cdot \dot{m} L_{est} \quad (\text{IV.102}_a)$$

Per cui, tutte le formule dovrebbero essere scritte ponendo al posto di  $L_{est}$  il prodotto  $g \cdot L_{est}$ . Ovvero, mantenendo il cambiamento di convenzione sui segni delle energie e ragionando in termini di peso unitario di fluido evolvente, le equazioni predette (EQ. (IV.109\_a); EQ. (IV.110\_a) e EQ. (IV.111\_a)) assumono le rispettive forme:

$$P/\dot{m} = L_{est} = \frac{I}{g} (U_2 C_{2t} - U_1 C_{1t}) = \frac{I}{g} \Delta(UC_t), \quad (\text{IV.114})$$

$$L_{est} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}. \quad (\text{IV.115})$$

$$dL_{est} = \frac{I}{g} (CdC - WdW + UdU) = \frac{I}{g} d(UC_t). \quad (\text{IV.116})$$

#### 4.12.6 Teorema del momento della quantità di moto nel riferimento relativo solidale al rotore

È istruttivo mettere in evidenza come l'equazione di Eulero possa essere ottenuta considerando, anziché il volume di controllo fisso, quello relativo solidale con la girante. L'osservatore non inerziale avverte, oltre alle normali forze del campo gravitazionale e di contatto con le pareti solide – per lui effettivamente fisse – la presenza di forze inerziali agenti sulla massa fluida.

Sul fluido, egli afferma che agiscono le seguenti forze:

##### 1. forze di natura inerziale:

- forza centrifuga: perpendicolare all'asse di rotazione della girante;
- forza di Coriolis: perpendicolare al vettore  $\mathbf{W}$  in ogni punto della traiettoria e perpendicolare al piano formato dal vettore velocità  $\mathbf{W}$  e dal vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ ;

##### 2. forze di superficie:

- forza che le superfici (che appaiono ferme all'osservatore solidale) dei condotti interpalari applicano alla massa fluida deviando il suo flusso dal  $\mathbf{W}_1$  a  $\mathbf{W}_2$ ;
- forze esercitate dal flusso contiguo in contatto con le sezioni (per l'osservatore sono fisse) di ingresso e di uscita dei canali interpalari;

3. forze gravitazionali:

- forze esterne di massa, dovute al campo geopotenziale (forze peso), che agiscono sul fluido perché il fluido che l'osservatore vede evolvere è dotato di massa;

Per questioni di simmetria e di geometria dei canali interpallari, le forze esercitate dal flusso continuo in contatto con le sezioni di entrata e uscita non possono avere momento con componenti lungo l'asse di rotazione della girante. Analogamente, le forze peso non forniscono momento, in quanto la forza risultante di tutta la massa fluida nella girante ha baricentro proprio sull'asse di rotazione. La forza inerziale centrifuga, sempre perpendicolare all'asse di rotazione, non può in nessun punto fornire al fluido alcun momento lungo l'asse di rotazione.

Le uniche forze che possono trasmettere un momento risultante alla massa fluida che fluisce all'interno dei canali interpallari sono:

- le forze di contatto tra massa fluida evolvente e superfici solide dei canali che la contengono e la deviano ( $W_2 \rightarrow W_1$ );
- le forze inerziali di Coriolis, perpendicolari alla linee di corrente  $W$ ;

Le forze (di superficie) di contatto con le superfici delle pale forzano la corrente fluida a seguire una determinata traiettoria che l'osservatore relativo vede coincidere con la linea mediana di ogni canale interpallare.

Queste ultime due forze applicano al fluido due momenti risultanti, rispettivamente:

- $M^{(e)}_{S \rightarrow f}$  momento risultante delle superfici dei canali interpallari sulla massa fluida che viene deviata da  $W_2$  a  $W_1$ ;
- $M^{(e)}_{C \rightarrow f}$  momento risultante delle forze inerziali di Coriolis agenti sulla massa del fluido evolvente.

**Teorema della quantità di moto per l'osservatore relativo per il sistema fluido**

Se a questo punto, l'osservatore relativo volesse applicare il *teorema della quantità di moto* al sistema fluido – considerando come asse su cui proiettare l'equazione di bilancio della quantità di moto l'asse che è di rotazione della girante per l'osservatore assoluto – egli dovrà prendere in considerazione tutti i momenti risultanti agenti sul fluido che hanno componente non nulla su tale asse; ovvero:  $M^{(e)}_{S \rightarrow f}$  e  $M^{(e)}_{C \rightarrow f}$ , e prenderà (dal suo punto di vista) come rappresentativa del momento della quantità di moto la grandezza:  $P = r \wedge (\Delta m \cdot W)$ . Per cui, l'equazione del

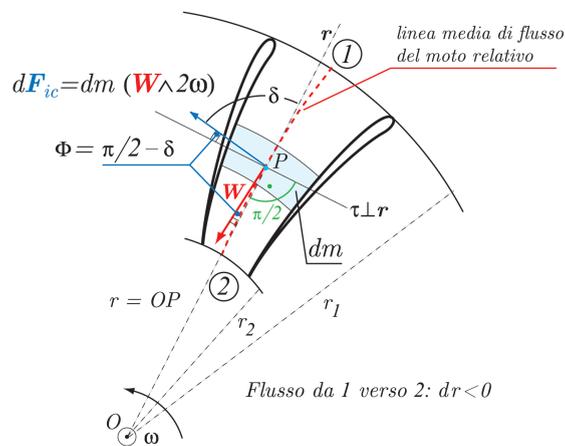
**Figura 4.8**

Schema di condotto interpallare – nel caso di turbina centripeta – con massetta fluida  $dm$  sottoposta alla forza inerziale  $dF_{ic}$  di Coriolis.

Tratteggiata in rosso la linea media di corrente (relativa).

I contorni della massetta  $dm$  si trovano tra due archi di circonferenza  $\Omega$ , concentrici e distanti  $dr$ , percorsi perpendicolarmente dalla velocità relativa radiale (o mediana)  $W_m$ .

*Turbina centripeta*



bilancio della quantità di moto scritta dall'osservatore relativo per il *sistema fluido* assume la forma seguente:

$$\mathbf{M}_{S \rightarrow f}^{(e)} + \mathbf{M}_{C \rightarrow f}^{(e)} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{W}_2 - \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{W}_1)}{\Delta t}, \quad (\text{IV.117})$$

ovvero:

$$\mathbf{M}_{S \rightarrow f}^{(e)} + \mathbf{M}_{C \rightarrow f}^{(e)} = \dot{m} \cdot (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{W}_2 - \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{W}_1). \quad (\text{IV.117}_a)$$

Analogamente a quanto fatto nel caso del riferimento assoluto, per il *Principio di azione e reazione*, i momenti risultanti applicati dall'ambiente circostante al fluido sono uguali e contrari ai momenti che il fluido applica all'ambiente esterno. In particolare, il momento risultante  $\mathbf{M}_{f \rightarrow p}$  che il fluido esercita sulle pareti dei condotti è uguale e contrario a quello esercitato dalle pareti sul fluido:

$$\mathbf{M}_{S \rightarrow f}^{(e)} + \mathbf{M}_{f \rightarrow p} = 0, \quad (\text{IV.118})$$

ovvero:  $\mathbf{M}_{f \rightarrow p} = -\mathbf{M}_{S \rightarrow f}^{(e)}$ .

#### Nota importante



Nel caso della forza inerziale, conviene focalizzare l'attenzione su un caso particolare in cui sia nota la geometria della girante e la direzione del moto relativo al suo interno. Si faccia riferimento alla **Figura 4.8**, in cui è rappresentata una configurazione di flusso in un condotto interpalare di una turbina. Si può notare che il momento  $\mathbf{M}_{C \rightarrow f}^{(e)}$  (applicato dalle forze d'inerzia alla massa fluida) ha la peculiarità di agire – *tramite la massa del fluido stesso* – direttamente sulle pareti dei condotti interpalari, favorendo la rotazione (vedere **Figura 4.8**: momento risultante con un'unica componente lungo la direzione dell'asse di rotazione e concorde al verso del vettore velocità angolare  $\omega$ ). Ponendo, quindi, nell'**EQ. (IV.117\_a)** la relazione  $\mathbf{M}_{f \rightarrow p} = -\mathbf{M}_{S \rightarrow f}^{(e)}$ , si ottiene l'equazione del teorema della quantità di moto in funzione del risultante  $\mathbf{M}_{f \rightarrow p}$  dei momenti che il fluido applica ai condotti interpalari (dal punto di vista dell'osservatore relativo):

$$\mathbf{M}_{f \rightarrow p} - \mathbf{M}_{C \rightarrow f}^{(e)} = \dot{m} \cdot (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{W}_1 - \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{W}_2). \quad (\text{IV.117}_b)$$

ovvero, la forma:

$$\mathbf{M}_{f \rightarrow p} = \mathbf{M}_{C \rightarrow f}^{(e)} + \dot{m} \cdot (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{W}_1 - \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{W}_2). \quad (\text{IV.117}_c)$$

#### Contributo della forza inerziale di Coriolis

Nella **Figura 4.8**, si consideri la massetta elementare  $dm$  racchiusa tra due archi di circonferenza distanti  $dr$  sull'asse  $r$ , e il cui baricentro si trovi sulla sezione  $\Omega$  che il canale interpalare presenta in quel punto (sezione circonferenziale perpendicolare al raggio  $r$ ). Il flusso è centripeto – trattandosi di turbina – per cui, volendo esprimere la massa contenuta in funzione della velocità meridiana (radiale)  $W_m$ , si ha:

$$\begin{aligned} dm &= \rho \cdot [dV] = \rho \cdot [(W_m dt) \cdot \Omega] = \\ &= \rho \cdot [(-dr) \cdot \Omega] = -\rho \cdot dr \cdot \Omega > 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.119})$$

in quanto, nel flusso centripeto è  $dr < 0$ , quindi:  $-dr = W_m dt$ .

#### Forza inerziale di Coriolis

La forza inerziale di Coriolis, per una massa fluida finita, ha la nota forma:

$$\mathbf{F}_{ic} = \Delta m (\mathbf{W} \wedge 2\omega); \quad (\text{IV.120})$$

nel caso della **Figura 4.8**, il *modulo* della forza inerziale di Coriolis, per la massetta infinitesima  $dm$ , ha l'espressione:  $dF_{ic} = 2\omega W dm = -2\omega W \rho \cdot dr \cdot \Omega > 0$ ; avendo tenuto conto dell'**EQ. (IV.119)**.

**Moduli dei momenti**

L'intensità del momento che tale forza inerziale applica al condotto interpolare *tramite la massetta fluida* è concorde alla rotazione della girante:

$$dM^{(e)}_{C \rightarrow f} = r \cdot dF_{ic} \cdot \text{sen} \delta = r \cdot (-2\omega W \rho \cdot dr \cdot \Omega) \cdot \text{sen} \delta. \quad (\text{IV.121})$$

**Velocità meridiana (relativa)**

Risulta, dal disegno in figura, che:  $W \text{sen} \delta = W_m$ , dove  $W_m$  viene detta la velocità meridiana della massetta fluida  $dm$  nel punto  $P$ . Ovvero, la componente lungo  $r$  della velocità  $W$  della massetta quando si trova a transitare nel punto  $P$ .

La portata in massa, dal punto di vista dell'osservatore relativo, può essere espressa servendoci della velocità meridiana; per cui:  $\dot{m} = \rho \Omega W_m$ , dove  $\Omega$  è proprio la sezione effettiva del canale interpolare.

Ciò premesso, il modulo della proiezione lungo l'asse di rotazione  $\omega$  del momento infinitesimo che la forza inerziale di Coriolis applica alle pareti dei condotti interpolari (tramite la massetta  $dm$ ) è esprimibile come:

$$dM^{(e)}_{C \rightarrow f} = -2\omega \dot{m} r dr > 0. \quad (\text{IV.122})$$

Integrando quest'ultima relazione tra  $r_1$  ed  $r_2$ , in modo che il modulo del momento risultante  $M^{(e)}_{C \rightarrow f}$  rimanga sempre positivo, si ottiene:<sup>(9.15)</sup>

$$M^{(e)}_{C \rightarrow f} = -2\omega \dot{m} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \omega \dot{m} (r_1^2 - r_2^2) > 0. \quad (\text{IV.123})$$

**Nota importante**



Ritornando ora all'EQ. (IV.117\_c), e proiettandola lungo l'asse di rotazione  $\omega$ , possiamo inserire l'espressione trovata per  $M^{(e)}_{C \rightarrow f}$ . Infatti, indicando con  $M^{(\omega)}_{f \rightarrow p}$  la proiezione di  $M_{f \rightarrow p}$  lungo la direzione  $\omega$ , si ha:

$$M^{(\omega)}_{f \rightarrow p} = \omega \dot{m} (r_1^2 - r_2^2) + \dot{m} \cdot (r_1 W_1 \cos \beta_1 - r_2 W_2 \cos \beta_2), \quad (\text{IV.124})$$

avendo adottato, per gli angoli di incidenza dei vettori delle velocità, la convenzione riportata nella **Figura 4.7** a pag. 89. Avendo calcolato  $M^{(\omega)}_{f \rightarrow p}$  in termini di modulo, si ha necessariamente che il prodotto  $M^{(\omega)}_{f \rightarrow p} \cdot \omega$  è positivo, come anche  $L_{est}$ .

L'entità (modulo) del lavoro massico calcolato  $L_{est} > 0$  risulta uguale a:

$$L_{est} = \frac{M^{(\omega)}_{f \rightarrow p} \cdot \omega}{\dot{m}} = U_1^2 - U_2^2 + (U_1 W_1 \cos \beta_1 - U_2 W_2 \cos \beta_2). \quad (\text{IV.125})$$

Questa equazione può essere trasformata in questa espressione equivalente:

$$L_{est} = U_1 \cdot (U_1 + W_1 \cos \beta_1) - U_2 \cdot (U_2 + W_2 \cos \beta_2); \quad (\text{IV.125}_a)$$

inoltre, dal triangolo delle velocità (vedere **Figura 4.7** a pag. 89), si ha:

$$U_i + W_i \cos \beta_i = C_i \cos \alpha_i = C_{it}, \quad (\text{IV.126})$$

**Lavoro massico nel caso di turbina**

per cui il lavoro massico assume di nuovo la nota forma:

$$L_{est} = U_1 C_{1t} - U_2 C_{2t} > 0, \quad (\text{IV.127})$$

che si era calcolata precedentemente (vedere a pag. 88, (EQ. IV.101)) sempre nel caso di turbina.

(9.15) Ciò in virtù del fatto che la direzione del flusso scelta nell'esempio è relativo al caso di una turbina. Nella turbina, infatti, le forze inerziali di Coriolis contribuiscono enormemente allo sviluppo di potenza sulla girante, contribuendo con momento risultante concorde con la velocità di rotazione della girante.



NOTA. Analogamente a quanto osservato a suo tempo per la convenzione sui segni delle energie, se si adotta la convenzione di considerare negativo il lavoro massico ceduto dal fluido in turbina, allora l'equazione di Eulero va posta nella forma:

$$L_{est} = U_2 C_{2t} - U_1 C_{1t} < 0 . \tag{IV.127_a}$$

In questi termini, infatti, un fluido che espande in turbina registra una diminuzione del suo patrimonio entalpico:  $(\Delta i)_{stadio} < 0$ ; per cui, l'equazione EQ. (IV.127\_a) – del trasferimento di energia di Eulero (con il cambiamento della convenzione sui segni delle energie) – si fonde con l'espressione dell'equazione dell'energia in termini entalpici (quest'ultima formulata proprio considerando l'opposta convenzione dei segni rispetto alla convenzione classica) in questo modo:

$$\boxed{(\Delta i)_{stadio} = L_{est}} = U_2 C_{2t} - U_1 C_{1t} < 0 . \tag{IV.128}$$

#### 4.12.7 L'equazione di Eulero nel caso di macchina assiale

Nel caso di macchina assiale è  $dU = 0$  ( $U_1 = U_2$ ), in quanto il flusso del fluido è convogliato all'interno della girante a compiere delle traiettorie assolute elicoidali. Il flusso può pensarsi suddiviso in un sistema di falde cilindriche coassiali, in cui il fluido evolvente viaggia a distanza costante dall'asse di rotazione, per cui le sezioni di passaggio (trasversali all'asse di rotazione) sono delle corone circolari.

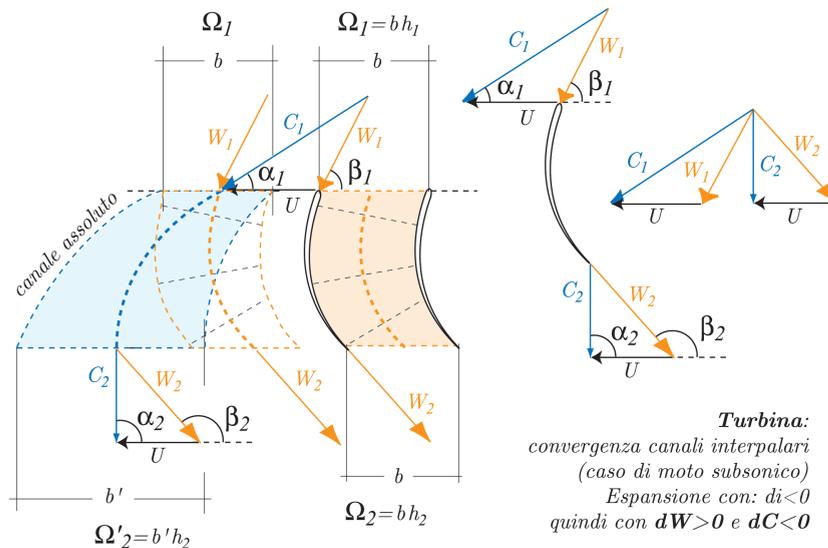
Perciò, la velocità periferica  $U$  è identica nelle due sezioni di ingresso e uscita della girante, e si trovano alla medesima distanza  $r$  dall'asse di rotazione.

Questa particolare geometria delle giranti assiali ha come conseguenza l'assenza dell'effetto centrifugo ( $U_1 = U_2$ ) per cui la caduta di pressione in girante può essere solo conseguenza dell'accelerazione del moto relativo,  $W$  crescente, prodotta – nel caso di moto subsonico – mediante canali interpalari convergenti. (Vedere, in particolare, Paragrafo 4.11.1 a pagina 78, sulle equazioni di HUGONIOT).

**Equazione di equilibrio dinamico al sistema fluido**

Si consideri, ad esempio, una massa fluida che evolve all'interno della *girante assiale di una turbina*. Si consideri, in particolare due palettature consecutive e

**Figura 4.9**  
 Condotto relativo e condotto assoluto di un generico canale interpalare di una turbina. I tubi di flusso (assoluto e relativo) hanno la sezione 1 in comune: del canale assoluto è nota a priori solo la sezione di ingresso.



**Turbina:**  
 convergenza canali interpalari  
 (caso di moto subsonico)  
 Espansione con:  $di < 0$   
 quindi con  $dW > 0$  e  $dC < 0$

$\Omega_1; \Omega'_2; \Omega_2$  : aree delle varie sezioni di passaggio per il flusso.  
 (In generale  $b'$  e  $b$  non sono uguali)

quindi il relativo condotto interpolare. Prendendo in considerazione il condotto assoluto – descritto dai punti delle pareti del condotto durante la sua rotazione – si applichi l'equazione dell'impulso per la massa  $\Delta m$  contenuta nel condotto assoluto, preso come volume rappresentativo di controllo. L'equazione in oggetto è, come noto:

$$\mathbf{R} = \dot{m}(C_2 - C_1) . \quad (\text{IV.129})$$

A causa dell'azione della palettatura il fluido risulterà, dal punto di vista del riferimento assoluto (volume di controllo fisso) rallentato  $C_1 > C_2$  e deviato (i vettori delle velocità assolute  $C_1$  e  $C_2$  avranno differenti inclinazioni rispetto alla direzione del vettore  $U$ ).

Se si fa riferimento alla superficie di controllo delimitata dai punti 1234 nel moto assoluto, significa prendere in esame il fluido che interessa un canale delimitato da due palette consecutive in movimento.

Detta  $\dot{m}$  la portata in massa (costante) che effluisce in un canale, si applichi l'equazione dell'impulso al fluido compreso all'interno della superficie di controllo (fissa per un osservatore inerziale). Dall'esame della **Figura 4.9**, si può intanto osservare che i due tubi di flusso (assoluto e relativo) hanno la sezione di entrata in comune, per cui la continuità può essere espressa indifferentemente sia rispetto all'osservatore fisso che a quello mobile. Per quanto riguarda, invece, la portata del flusso – calcolata in riferimento alla sezione di uscita dal condotto assoluto – essa si valuta come:

$$\dot{m} = \rho_2 \Omega'_2 \cdot (C_2 \text{sen} \alpha_2) = \rho_2 \Omega'_2 \cdot C_{2m} ,$$

in cui la velocità  $C_m = C_2 \text{sen} \alpha_2$  è la velocità meridiana assoluta sulla sezione di uscita.

In questo caso, il vettore  $C_m$  componente meridiana risulta essere perpendicolare alla sezione 4-3 di uscita dalla girante. Ovviamente, il valore di  $\Omega'_2$  non risulta noto a priori, e quindi risulta più agevole calcolare la portata in riferimento ad uno qualunque dei due condotti (assoluto o relativo) nella sezione di entrata; dove  $\Omega_j$  è proprio la distanza tra i bordi delle due pale. Per cui è:

$$\dot{m} = \rho_1 \Omega_1 \cdot (C_1 \text{sen} \alpha_1) = \rho_1 \Omega_1 \cdot C_{1m}$$

$$\dot{m} = \rho_1 \Omega_1 \cdot (W_1 \text{sen} \beta_1) = \rho_1 \Omega_1 \cdot W_{1m}$$

**Forze esterne agenti**

Le forze esterne che agiscono sul fluido contenuto all'interno del volume di controllo fisso 1234 sono:

- le spinte delle forze di pressione sulle superfici di entrata  $\Omega_1$  e di uscita  $\Omega'_2$  (queste spinte, nel caso assiale hanno direzione parallela all'asse di rotazione);
- la forza  $F_{p \rightarrow f}$ , azione globale risultante della palettatura sulla vena fluida;

Per l'equilibrio dinamico delle forze, utilizzando l'equazione  $\Sigma \mathbf{F} = \dot{m}(C_2 - C_1)$  nella forma:  $\Sigma \mathbf{F} + \dot{m} C_1 - \dot{m} C_2 = 0$ , si ha (vedere poligono di equilibrio delle forze in **Figura 4.10**):

$$[\mathbf{F}_{p \rightarrow f} + p_1 \Omega_1 \mathbf{n}_1 + p_2 \Omega'_2 \mathbf{n}_2] + \dot{m} C_1 - \dot{m} C_2 = 0 . \quad (\text{IV.130})$$

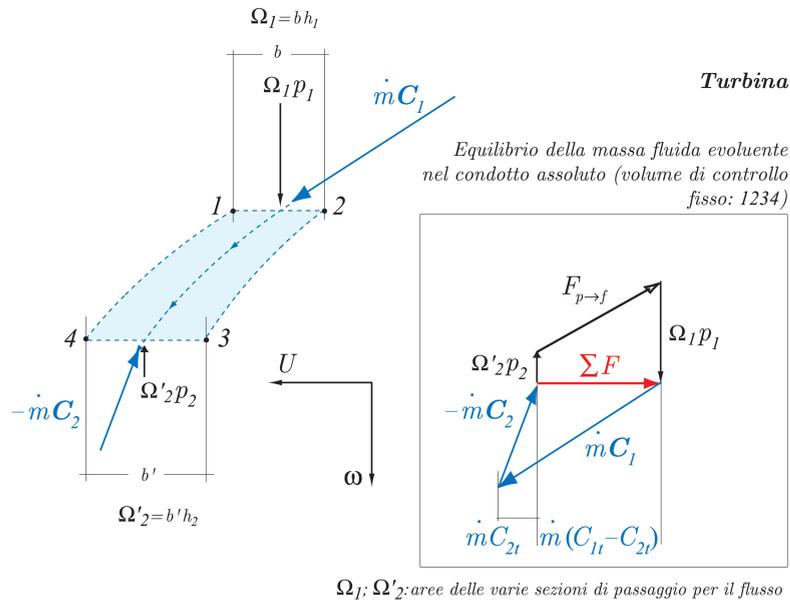
Dove i vettori  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  si trovano, rispettivamente, perpendicolari (ed entranti all'interno del volume di controllo) sulle sezioni di ingresso  $\Omega_1$  e di uscita  $\Omega'_2$ .

Per il noto *Principio di azione e reazione*, la forza  $\mathbf{R}_{f \rightarrow p}$  che il fluido trasmette sulla palettatura è tale che:

$$\mathbf{R}_{f \rightarrow p} + \mathbf{F}_{p \rightarrow f} = 0 . \quad (\text{IV.131})$$

**Figura 4.10**

Equilibrio delle forze (secondo D’Alambert) della massa fluida contenuta nel volume di controllo fisso 1234.



Per cui, la forza  $R_{f \rightarrow p}$  che il fluido trasmette alla palettatura presenta la forma:

$$R_{f \rightarrow p} = p_1 \Omega_1 n_1 + p_2 \Omega'_2 n_2 + \dot{m} C_1 - \dot{m} C_2. \quad (IV.132)$$

**Proiezione secondo la direzione della velocità periferica**

Proiettando l’EQ. (IV.132) secondo la direzione del vettore  $U$  (moltiplicando ambo i membri dell’equazione per il versore del vettore  $U$ ) si ottiene il valore della componente lungo la direzione  $U$  della forza che il fluido esercita sulla palettatura:

$$\begin{aligned} R_{f \rightarrow p}^{(U)} &= \dot{m} C_{1t} - \dot{m} C_{2t} = \dot{m} \cdot (C_{1t} - C_{2t}) = \\ &= \dot{m} \cdot (C_1 \cos \alpha_1 - C_2 \cos \alpha_2). \end{aligned} \quad (IV.133)$$

Dall’esame del poligono di equilibrio delle varie forze, si vede che è positiva la differenza  $C_{1t} - C_{2t}$  e quindi anche il valore della componente  $R_{f \rightarrow p}^{(U)}$  che risulta, quindi, concorde in direzione con il vettore  $U$ .

Si deduce che la forza  $R_{f \rightarrow p}$  esercita sulla palettatura una componente  $R_{f \rightarrow p}^{(U)}$  tale da far ruotare la palettatura lungo la direzione della velocità periferica. Quindi il lavoro massico trasmesso lungo la direzione di rotazione della girante si valuta come:

$$L_{est} = \frac{R_{f \rightarrow p}^{(U)} U}{\dot{m}} = U(C_1 \cos \alpha_1 - C_2 \cos \alpha_2) = U(C_{1t} - C_{2t}). \quad (IV.134)$$

**Proiezione secondo la direzione della velocità di rotazione**

Analogamente, proiettando l’EQ. (IV.132) lungo la direzione del vettore  $\omega$  (moltiplicando scalarmente per il versore della velocità angolare di rotazione) si ottiene:

$$N_{f \rightarrow p} = p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega'_2 + \dot{m} \cdot (C_{1m} - C_{2m}). \quad (IV.135)$$

**Nota importante**



C'è da notare, però, che nelle macchine assiali generalmente si sceglie una geometria per la girante tale da essere  $C_{1m} = C_{2m}$ , ovvero:

$$C_1 \text{sen} \alpha_1 = C_2 \text{sen} \alpha_2. \quad (\text{IV.136})$$

Per cui, la sollecitazione sulla palettatura nella direzione dell'asse di rotazione è calcolabile come:

$$N_{f \rightarrow p} = p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2' > 0 \quad (\text{IV.135}_a)$$

come si può dedurre considerando che il vettore  $R_{f \rightarrow p}$  ha la stessa direzione, e verso contrario, al vettore  $F_{p \rightarrow f}$ , come si può riscontrare sul poligono di equilibrio in **Figura 4.10**.



NOTA. Si può osservare che l'EQ. (IV.134) è una forma particolare dell'equazione a pag. 91, (EQ. IV.109) nel caso particolare infatti che  $U_1 = U_2$  (caso di giranti assiali).

**Flusso relativo su macchine assiali**

Alle stesse equazioni si può pervenire considerando, anziché il tubo di flusso assoluto, quello relativo. Sempre considerando il caso della macchina assiale, si può supporre di tenere fisso il rotore e considerare la corrente fluida nel moto relativo rispetto ad essa, perché, con l'ipotesi di falde cilindriche, normalmente accettata per le giranti assiali, le azioni tra il fluido e le pale mobili non risentono delle forze inerziali (centrifuga e di Coriolis), le quali – nelle macchine assiali – risultano entrambe perpendicolari all'asse di rotazione della girante. Inoltre, dal punto di vista dell'osservatore mobile, il moto del flusso tra i canali interpallari appare permanente.

**Nota importante**



In queste condizioni, se si trascurano le forze di massa perché si studia un aeriforme, e si escludono le forze inerziali (che risultano, così, perpendicolari al piano del foglio dove può pensarsi che si svolga il moto su ciascuna falda), le uniche forze che presentano componenti non nulle sul piano del foglio sono le forze di contatto tra fluido e pareti dei condotti.



NOTA. Poiché il moto relativo del fluido, all'interno di un singolo canale interpallare, può considerarsi sviluppato tutto su un piano perpendicolare all'asse della paletta che la collega all'albero motore, si ha che solo le forze che hanno componenti non nulle su tale piano contribuiscono alla trasmissione dell'impulso.

L'equazione dell'impulso per tale moto piano scritta dall'osservatore relativo risulta, in termini vettoriali:

$$[F_{p \rightarrow f} + p_1 \Omega_1 n_1 + p_2 \Omega_2 n_2] + \dot{m} W_1 - \dot{m} W_2 = 0. \quad (\text{IV.137})$$

Analogamente per il caso assoluto, l'osservatore relativo può affermare il *Principio di azione e reazione*, per cui la forza risultante  $R_{f \rightarrow p}$  che il fluido esercita sui condotti è uguale e contraria a quella  $F_{p \rightarrow f}$  esercitata dai condotti interpallari sul fluido; pertanto, vale la relazione vettoriale:  $R_{f \rightarrow p} + F_{p \rightarrow f} = 0$ .

L'equazione dell'impulso, nel riferimento relativo assume l'aspetto:

$$R_{f \rightarrow p} = p_1 \Omega_1 n_1 + p_2 \Omega_2 n_2 + \dot{m} W_1 - \dot{m} W_2. \quad (\text{IV.138})$$

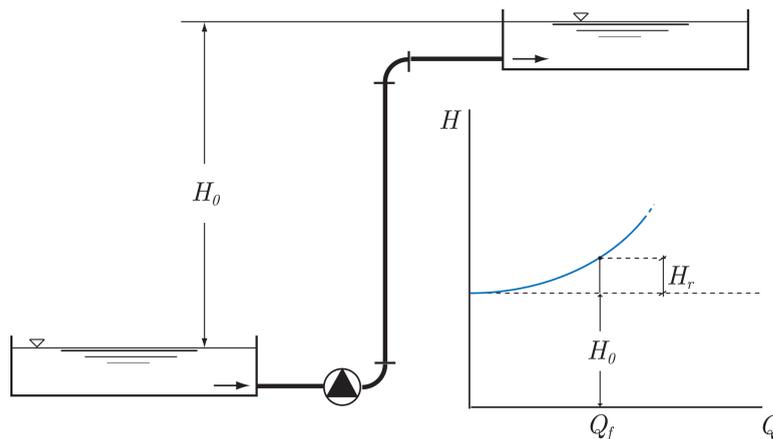
**Equazione dell'impulso nel riferimento relativo (caso di macchina assiale)**

Questa equazione vettoriale sia proiettata lungo la direzione del vettore velocità di trascinamento  $U$  e lungo la direzione del vettore velocità angolare  $\omega$ . Si ottiene rispettivamente:

- lungo direzione della velocità di trascinamento  $U$ :

·  
·  
·

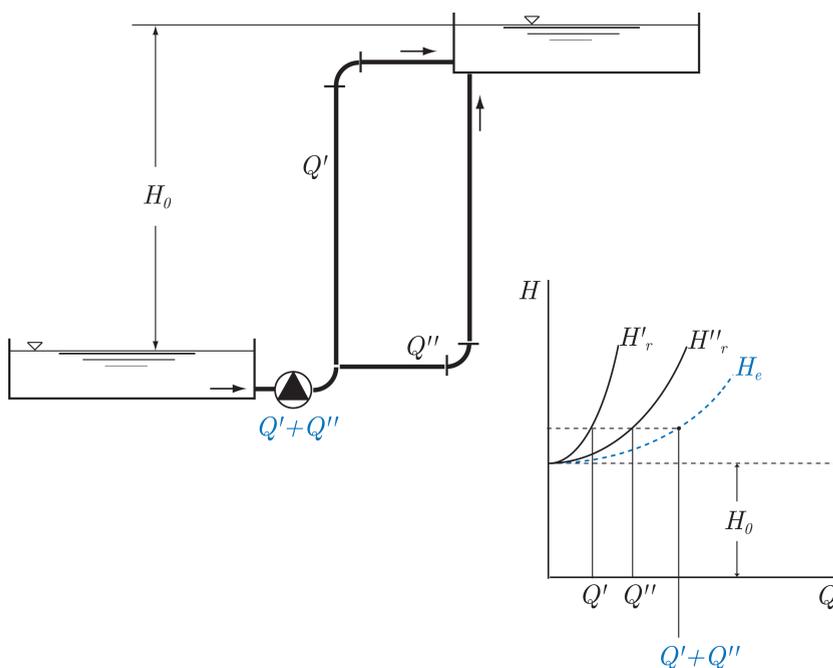
**Figura 8.1**  
Schema di un semplice  
impianto di sollevamento.  
Circuito semplice.



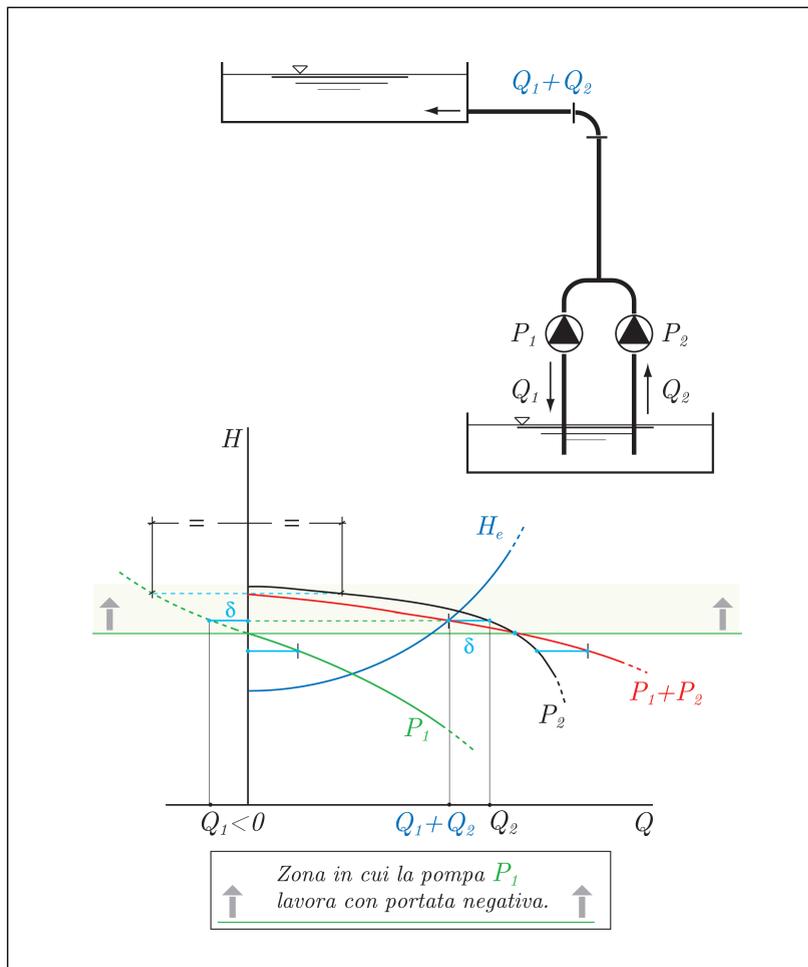
dove  $K$  è un coefficiente che dipende dalla scabrezza relativa della tubazione impiegata, dal suo diametro, dalla sua lunghezza complessiva e dal numero di Reynolds. Quanto detto è schematizzato nella **Figura 8.1**.

**Condotte in parallelo.** Nel caso di un impianto in cui sono collegate in parallelo due condotte di lunghezza, diametro e scabrezza relativa differenti, (vedere **Figura 8.2**) si può osservare che la portata complessiva  $Q = Q' + Q''$  lavorata dalla macchina, risulta ovviamente dalla somma delle singole portate che fluiscono all'interno dei due rami posti in parallelo:  $Q = Q' + Q''$ .

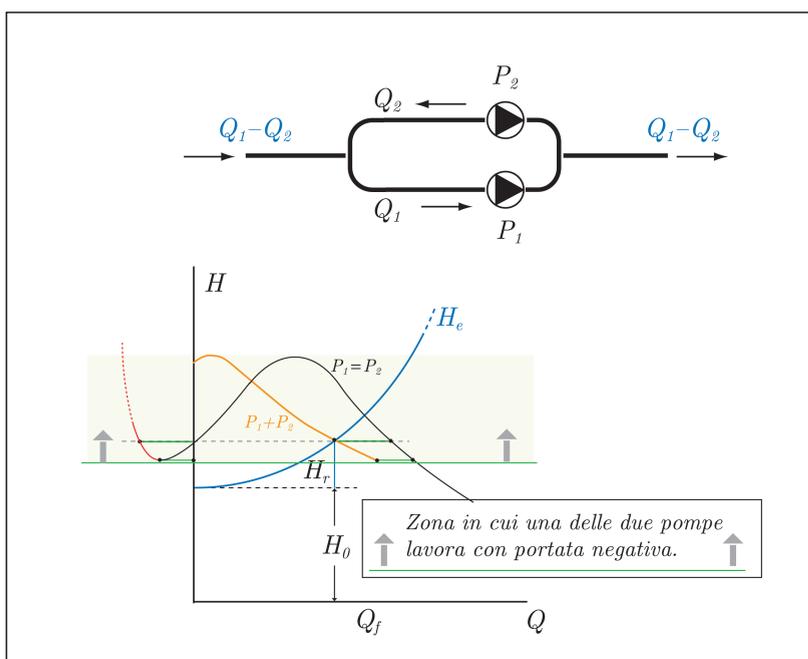
**Figura 8.2**  
Impianto di sollevamento  
con due tubazioni di diffe-  
renti caratteristiche poste  
in parallelo.



**Figura 8.9**  
 Impianto dotato di due pompe in parallelo di caratteristica diversa, senza punto di massimo. Illustrato il caso di funzionamento con una delle pompe in portata negativa: flusso invertito.



**Figura 8.10**  
 Impianto con due pompe identiche in parallelo, che presentano un punto di massimo. Rappresentato il caso di funzionamento con una delle due pompe con verso di circolazione invertito.





## CAPITOLO 9

# Aspetti pratici degli impianti di sollevamento

### Scelta del particolare tipo di pompa.

Consultati i testi: “Acquedotti” di Valerio Milano; “Impianti Sanitari” di Angelo Gallzio.

---

In questa sezione si riassumono tutte le principali tematiche che riguardano la scelta del particolare tipo di macchina operatrice da adottare per un impianto. In particolare, si accenna alle tematiche più importanti che caratterizzano le pompe negli impianti sanitari.

---

## 9.1 Grandezze fondamentali per una macchina operatrice

### 9.1.1 Concetti fondamentali e scelta del tipo di pompa

Come già descritto in precedenza, le pompe sono sostanzialmente costituite da una girante munita di pale, che imprime al liquido un movimento di rotazione, cedendo l'energia cinetica alla corrente che, tramite una cassa a spirale (detta *chiocciola*), viene convogliata nella tubazione di mandata. Un raccordo di entrata convoglia il fluido dalla tubazione di aspirazione alla bocca di ingresso della girante, imprimendo alla corrente una direzione opportuna per ridurre quanto più possibile le perdite per urto della vena contro le pale della girante stessa. L'energia cinetica acquistata dalla corrente nella girante viene a valle in gran parte trasformata in energia di pressione nella cassa a spirale che circonda la girante e ha una sezione che aumenta progressivamente, permettendo così al fluido di giungere ad una quota superiore a quella di partenza.

L'energia specifica ceduta al fluido nell'unità di tempo (cioè l'energia ceduta nell'unità di tempo per unità di peso) rappresenta la prevalenza della pompa; quando una semplice pompa non è sufficiente a fornire la prevalenza richiesta dalle esigenze dell'impianto, si possono installare più pompe in serie, oppure adoperare – nel caso dei pozzi – delle pompe multistadio, costituite da più giranti disposte in serie sullo stesso albero motore e collegate fra loro da condotti di ritorno.

**Pompe multistadio**

Le pompe multistadio, ad asse verticale, vengono generalmente impiegate negli acquedotti per il sollevamento dai pozzi; in tali pompe il motore può trovarsi sia in posizione più elevata rispetto ai vari stadi e sia in posizione più bassa e sommerso dall'acqua (pompe sommerse); in quest'ultimo caso, ovviamente, il motore si trova all'interno di una camera stagna. Le pompe, a seconda della direzione prevalente della corrente all'interno della girante, si suddividono in centrifughe (flusso radiale), in elicoidali o miste (con flusso elicoidale) e in assiali o a elica (con flusso assiale); nei pozzi trovano generalmente impiego solo pompe centrifughe.

**Grandezze fondamentali.** Le grandezze di maggiore rilievo che caratterizzano una pompa sono la portata  $Q$  e la prevalenza  $H$ , la potenza assorbita  $P$ , il rendimento  $\eta$  corrispondente ad un dato punto di funzionamento, pari al rapporto tra la potenza che la macchina cede al fluido e la potenza assorbita. Infine, il numero  $n$  di giri della girante in un dato intervallo di tempo, corrispondente alle condizioni di funzionamento normale. Per le pompe con motore elettrico, il numero di giri  $n$  al minuto primo è dato dalla:

$$n = \frac{60f}{p}; \quad (\text{IX.1})$$

essendo  $f$  la frequenza di rete (in Italia  $f = 50$  Hertz) e  $p$  è il numero di coppie polari della macchina elettrica.

È da notare che, essendo i motori delle pompe asincroni, a causa di fenomeni di scorrimento, il numero di giri effettivi risulta inferiore di circa il 3% rispetto a quello espresso dall'EQ. (IX.1).

**Prevalenza della pompa**

La prevalenza  $H$  risulta – come noto – pari alla differenza di energia specifica complessiva del fluido tra una sezione immediatamente a valle della bocca premente e una sezione immediatamente a monte della bocca aspirante della pompa e viene misurata in  $m$  di colonna d'acqua.

**Rendimento idraulico.** È da notare che non tutta l'energia fornita dalla girante viene acquistata dal fluido, a causa delle perdite idrodinamiche per urto nei condotti rotanti e statorici, per cui la prevalenza effettiva  $H$  risulta inferiore alla prevalenza interna o teorica  $H_i$ . Si definisce rendimento idraulico il rapporto:

$$\eta_i = \frac{H}{H_i}. \quad (\text{IX.2})$$

**Rendimento volumetrico.** A causa della differenza di pressione esistente tra la mandata e l'aspirazione, solo un'aliquota  $Q$  della portata  $Q_i$  che percorre la girante giunge alla tubazione di mandata, mentre un'aliquota  $Q_r$  viene ricircolata verso il tubo di aspirazione attraverso gli spazi tra la girante e la cassa (perdita per *trafilamento*); viene detto rendimento volumetrico  $\eta_v$  il rapporto:

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_i}. \quad (\text{IX.3})$$

**Il rendimento meccanico.** Questo rendimento viene definito come rapporto tra la potenza  $P_i$  che la pompa cede al fluido all'interno della macchina e la potenza  $P$  assorbita dal motore elettrico, la quale è maggiore di  $P_i$  a causa:

- delle perdite per attrito nei cuscinetti, supporti e tenute;
- dell'energia dissipata per il trascinarsi, da parte della girante in movimento, del fluido che si trova nella regione di spazio tra la girante e la cassa (infatti tale dissipazione la si fa in genere rientrare nel rendimento meccanico):

$$\eta_m = \frac{P_i}{P} = \frac{9,81 Q_i H_i}{P}; \quad (\text{IX.4})$$

con  $Q_i$  in  $m^3/s$ ,  $H_i$  in  $m$  e  $P$  in  $kW$ .

**Rendimento complessivo**

Il rendimento complessivo  $\eta$  della pompa è dato dalla:

$$\eta = \frac{P_{eff}}{P} = \frac{9,81QH}{P} = \frac{9,81(\eta_v Q_i)(\eta_i H_i)}{P} = \eta_v \cdot \eta_i \frac{9,81 Q_i H_i}{P} = \quad (IX.5)$$

$$= \eta_v \cdot \eta_i \eta_m ;$$

dove con  $P_{eff}$  si intende la potenza effettiva trasmessa al fluido sulla sezione della mandata; in incipiente uscita dalla macchina. L'EQ. (IX.5) porge quindi il legame:

$$\eta = \eta_v \eta_i \eta_m . \quad (IX.6)$$



NOTA. Il rendimento idraulico  $\eta_i$  varia tra 0,75 e 0,93 circa; il rendimento volumetrico  $\eta_v$  tra 0,88 e 0,95; il rendimento meccanico  $\eta_m$  tra 0,90 e 0,96; il rendimento globale  $\eta$  varia in genere tra 0,65 e 0,85 circa.

**Teoria della similitudine**

In base a considerazioni di similitudine meccanica, si dimostra – trascurando le forze di natura viscosa – che condizione perché pompe geometricamente simili siano simili anche dinamicamente, è che una data grandezza adimensionale, calcolata con riferimento al funzionamento nelle condizioni di massimo rendimento, assuma lo stesso valore per le diverse macchine. Tale grandezza adimensionale è detta *numero di giri caratteristico*  $n_s$  e può essere espressa in funzione del numero di giri effettivo  $n$  della macchina, di  $Q$  e di  $H$ :

La relazione del numero di giri caratteristico  $n_s$  è calcolata nel punto di funzionamento di massimo rendimento idraulico del flusso.

$$n_s = n \frac{Q^{1/2}}{(2gH)^{3/4}} . \quad (IX.7)$$

Essendo  $n_s$  un numero puro, il suo valore non dipende dal sistema di unità di misura scelto (purché  $n$ ,  $Q$ ,  $g$ ,  $H$  siano espressi nello stesso sistema).

Al variare del numero di giri caratteristico, cambiano la geometria interna (in particolare la forma della girante) e le caratteristiche funzionali delle pompe che possono essere classificate secondo quanto riportata nella tabella seguente, dove è indicata anche la massima prevalenza  $H_{max}$ :

**Tabella 9.1**

**Classificazione dei vari tipi di pompe in funzione dei numeri di giri caratteristici**

Tipo di pompa		$n_s$	$H_{max}$ (m)
Centrifughe (a flusso radiale)	lente:	0,03 ÷ 0,075	200 ÷ 120
	normali:	0,075 ÷ 0,12	120 ÷ 55
	veloci:	0,12 ÷ 0,20	55 ÷ 30
Elicoidali:		0,20 ÷ 0,39	30 ÷ 12
Assiali:		0,39 ÷ 1,00	12 ÷ 8

Si osserva che pompe con bassi valori del numero di giri caratteristico sono idonee a sollevare piccole portate con elevate prevalenze; all'aumentare di  $n_s$  si passa a pompe idonee a sollevare portate sempre maggiori con prevalenze man mano minori, fino a giungere a pompe con valori molto elevati di  $n_s$  (pompe a elica o assiali) idonee per portate molto grandi e prevalenze assai piccole. Dalla **Tabella 9.1** si vede che esiste un limite alla prevalenza  $H_{max}$ , che si può avere con una pompa avente un certo numero di giri caratteristico.

**Alte prevalenze**

Per prevalenze superiori a 200 m si ricorre a pompe multistadio, costituite da un numero  $N$  di giranti (generalmente uguali) poste in serie: con le giranti in serie si

sommano le prevalenze di ciascuna girante, mentre la portata sollevata resta la stessa. Il numero di giri caratteristico di ogni singola girante  $n_s$  (che elabora una portata  $Q$  sotto una prevalenza  $H/N$ ) risulta perciò maggiore di quello  $n_{tot}$  dell'intero gruppo di sollevamento, valutato come singola pompa equivalente, con prevalenza totale  $H$  e portata  $Q$ :

$$n_s = n \cdot \frac{Q^{1/2}}{(2g)^{3/4} \cdot \left(\frac{H}{N}\right)^{3/4}} = \left[ n \cdot \frac{Q^{1/2}}{(2g)^{3/4} \cdot H^{3/4}} \right] \cdot N^{3/4} = n_{tot} \cdot N^{3/4}. \quad (\text{IX.8})$$

Risultando  $n_s > n_{tot}$ , in questo modo si possono ottenere prevalenze anche maggiori di 200 m, con le successive giranti che rientrano nei valori della **Tabella 9.1**.

**Alto valore del numero di giri caratteristico**

Quando, invece, il numero di giri caratteristico della pompa risulta molto elevato, si possono impiegare le pompe a doppia entrata, in modo da ottenere un minor numero di giri caratteristico  $n_s$  per ciascuna delle due giranti:

$$n_s = n \cdot \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^{1/2}}{(2g)^{3/4} \cdot H^{3/4}} = \left[ n \cdot \frac{Q^{1/2}}{(2g)^{3/4} \cdot H^{3/4}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = n_{tot} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (\text{IX.9})$$

risultando in questo modo:  $n_s < n_{tot}$ .

**Curve caratteristiche**

Molto importanti per le pompe sono le curve caratteristiche di funzionamento, che legano fra loro le grandezze  $Q$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $\eta$  valutate per un valore costante del numero di giri  $n$  della girante. Le pompe presentano un punto di funzionamento in corrispondenza del quale il rendimento  $\eta$  è massimo; i valori di  $Q$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $\eta$  corrispondenti a tale punto sono detti valori nominali e vengono indicati rispettivamente con  $Q_n$ ,  $H_n$ ,  $P_n$ ,  $\eta_n$ . Le curve caratteristiche per i vari tipi di pompa possono essere fornite in forma adimensionale, rappresentando le leggi:

$$\frac{H}{H_n} = f\left(\frac{Q}{Q_n}\right) \quad \frac{P}{P_n} = f\left(\frac{Q}{Q_n}\right) \quad (\text{IX.10})$$

$$\frac{\eta}{\eta_n} = f\left(\frac{Q}{Q_n}\right);$$

tali curve, al variare di  $n_s$ , assumono andamenti sempre più differenti man mano che aumenta il valore di  $n_s$ .

Per  $n_s$  molto bassi la prevalenza non risulta massima a mandata chiusa ( $Q = 0$ ), ma per un certo valore, sia pure piccolo della portata, ne deriva che la curva caratteristica  $H = H(Q)$  presenta un primo tratto non discendente. Perciò, per bassi valori della portata tali pompe presentano un funzionamento instabile, poiché a una data prevalenza corrispondono due valori di portata; peraltro tale campo è molto lontano da quello di normale impiego delle pompe, che non deve essere molto discosto dal punto di massimo rendimento.

All'aumentare di  $n_s$  la curva  $H = H(Q)$  discende più rapidamente e la curva  $\eta = \eta(Q)$  risulta meno piatta nell'intorno del punto di massimo rendimento; ciò significa che quando ci si scosta dalle condizioni di funzionamento normali si verificano cali di rendimento più forti per le pompe con elevati valori di  $n_s$ .

Per quanto riguarda la potenza assorbita, per bassi valori di  $n_s$ , si osserva che essa risulta minima a mandata chiusa e cresce all'aumentare di  $Q$ ; per le pompe elicoidali e assiali (relativamente alto numero di giri specifico  $n_s$ ) si ha invece un massimo di  $P$  per  $Q = 0$  e la curva  $P = P(Q)$  risulta sempre decrescente, con legge sempre più rapida man mano che aumenta  $n_s$ .

La **Figura 9.1** illustra qualitativamente l'andamento delle principali grandezze adimensionali in funzione del numero caratteristico della pompa.

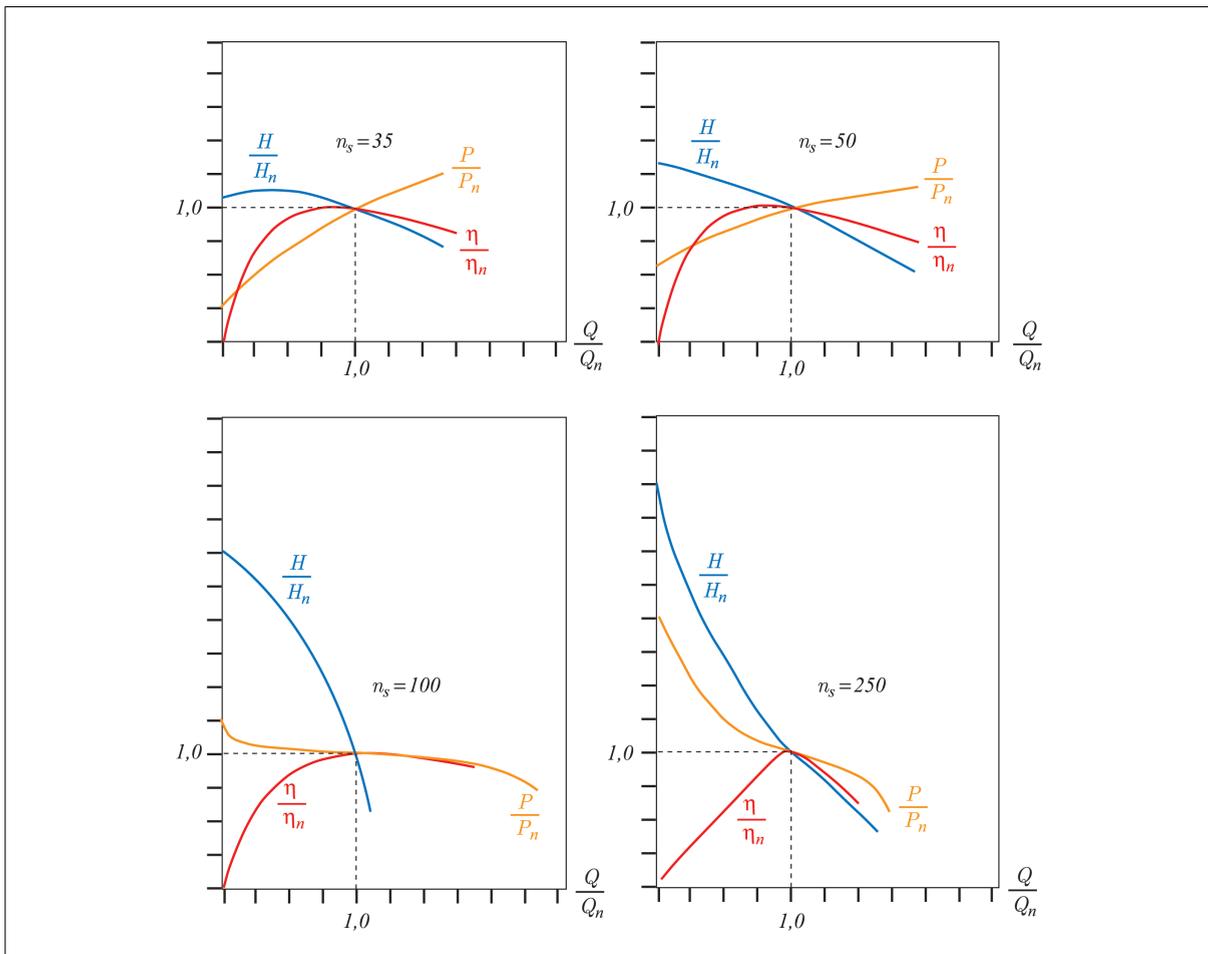
Quindi, per le pompe centrifughe, dotate di bassi valori di  $n_s$ , è opportuno che l'avviamento avvenga a mandata chiusa, in modo da avere inizialmente un minore assorbimento di potenza.



**NOTA.** Si osserva poi dall'equazione a pag. 163, (**EQ. IX.7**) che, a parità di numero di giri effettivo  $n$ , per pompe simili aventi quindi stesso numero di giri caratteristico  $n_s$ , man mano che aumenta il valore della portata aumenta anche quello della prevalenza e aumentano anche, ovviamente, le dimensioni della pompa.

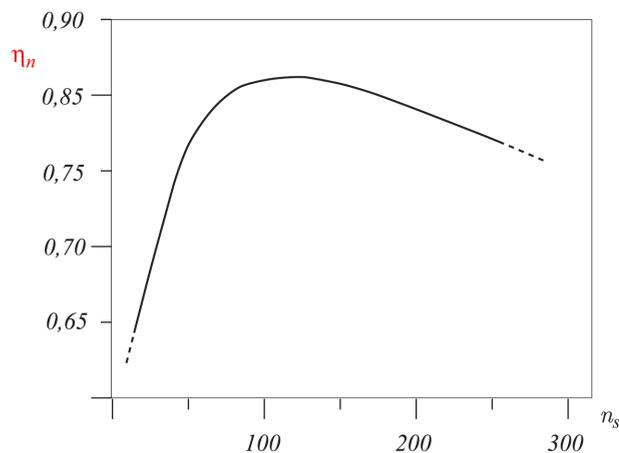
Pompe simili, pur avendo la stessa curva caratteristica adimensionale  $\eta/\eta_n = f(Q/Q_n)$ , presentano un valore di rendimento nominale  $\eta_n$  crescente all'aumentare della portata nominale  $Q_n$ ; ciò è dovuto al fatto che le perdite di natura meccanica e volumetrica risultano percentualmente meno sensibili per pompe di grosse dimensioni che per piccole pompe con portate modeste. Per un fissato valore del numero di giri caratteristico  $n_s$  corrisponde un determinato valore del rendimento nominale  $\eta_n$  che può avere la pompa. Nella **Figura 9.2** è indicativamente riportato, in funzione di  $n_s$ , il valore del rendimento nominale massimo  $\eta_n$  che può avere una pompa.

Le case produttrici di pompe producono, per un certo valore di  $n_s$ , una gamma di pompe di dimensioni diverse, che coprono un certo campo di impiego nel



**Figura 9.1.** Curve caratteristiche adimensionali di una macchina operatrice al variare del valore del numero di giri caratteristico  $n_s$ .

**Figura 9.2**  
Massimo rendimento nominale di una macchina operatrice in funzione del numero di giri caratteristico  $n_s$ .



piano ( $Q-H$ ), con vari valori di rendimento abbastanza elevati: vengono forniti diagrammi a mosaico delle curve ( $Q-H$ ), che permettono di individuare rapidamente il campo di impiego di ciascun tipo di pompa e di scegliere quindi quello più adatto alle esigenze di servizio.

**Curve caratteristiche.** Le curve caratteristiche delle pompe si riferiscono al numero di giri di funzionamento normale che, per le pompe con motore elettrico, è dato dall'espressione a pag. 162, (EQ. IX.1); solo per pompe molto grandi può risultare conveniente prevedere un dispositivo che consente di variare il numero di giri, in modo da poter meglio adattare le condizioni di funzionamento della pompa a quelle di impiego, così che la pompa stessa lavori sempre in un punto non molto lontano da quello di massimo rendimento.

#### Leggi di similitudine meccanica

In base alle leggi della similitudine meccanica, si dimostra che, per una data macchina, note le curve caratteristiche per un dato numero di giri effettivo  $n_{s1}$ , sono immediatamente deducibili quelle corrispondenti ad un altro numero di giri effettivo  $n_{s2}$  nel seguente modo: al generico punto di funzionamento della pompa che si ha per  $n_s = n_{s1}$ , caratterizzato dai valori  $Q_1$ ,  $H_1$ ,  $P_1$  e  $\eta_1$  di portata, prevalenza, potenza assorbita e rendimento, corrisponde, per  $n_s = n_{s2}$ , un punto di funzionamento con i seguenti valori  $Q_2$ ,  $H_2$ ,  $P_2$  e  $\eta_2$  delle stesse grandezze:

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{n_{s2}}{n_{s1}}; \quad (\text{IX.11})$$

$$H_2 = H_1 \cdot \left(\frac{n_{s2}}{n_{s1}}\right)^2; \quad (\text{IX.12})$$

$$P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{n_{s2}}{n_{s1}}\right)^3; \quad (\text{IX.13})$$

$$\eta_2 = \eta_1. \quad (\text{IX.14})$$



NOTA. Si fa presente che in effetti, per la similitudine dinamica, i punti di funzionamento che si corrispondono per due differenti numeri di giri effettivi sono caratterizzati dallo stesso valore solo del rendimento idraulico  $\eta_i$ ; mentre il rendimento volumetrico e quello meccanico, e quindi il rendimento globale  $\eta$ , risultano diversi.

Per tali motivi le equazioni EQ. (IX.11), EQ. (IX.12), EQ. (IX.13) e EQ. (IX.14), dedotte nell'ipotesi di rendimento costante, risultano nella realtà approssimate e possono ritenersi valide solo per variazioni massime del numero di giri effettivo  $n_{s2}$  del 20% circa (in più o in meno) rispetto a  $n_{s1}$ .

## 9.2 Le pompe negli impianti sanitari

### 9.2.1 Tipo di pompe adottate

Dei vari tipi di pompe quello che viene esclusivamente usato negli impianti sanitari è quello centrifugo. Le pompe centrifughe presentano, rispetto a quelle di altro tipo, i seguenti vantaggi:

- di costare relativamente poco come impianto e come esercizio;
- di occupare poco spazio e di pesare poco;
- di poter essere accoppiate direttamente ai motori elettrici.

Inoltre, le pompe centrifughe non subiscono avarie se per un errore di manovra viene parzialmente o anche totalmente chiusa una saracinesca posta sulla mandata. Come noto, i dati caratteristici di una pompa centrifuga sono: portata, prevalenza e numero di giri. Altrettanto importanti sono: la velocità, l'altezza di aspirazione, l'altezza di carico (o battente) e le perdite di carico. Si riassumono brevemente qui di seguito:

**Portata.** La portata  $Q$  di una pompa è rappresentata dal volume liquido effettivamente disponibile alla bocca di mandata della macchina, nell'unità di tempo. Essa si esprime in metri cubi all'ora ( $m^3/h$ ) oppure, più semplicemente, in litri al minuto ( $l/min$ ) o litri al secondo ( $l/s$ ).

**Velocità.** È la velocità del liquido nella tubazione. Si esprime in metri al secondo ( $m/s$ ).

**Altezza d'aspirazione.** L'altezza geodetica d'aspirazione è la distanza verticale che separa il livello del liquido dalla bocca d'aspirazione; convenzionalmente viene riferita all'asse della macchina.

**Altezza di carico.** L'altezza di carico si ha quando la pompa funziona sotto battente, cioè quando riceve il liquido alla bocca di aspirazione da un serbatoio ad una quota superiore a quella della pompa. Rappresenta, quindi, la distanza verticale che separa il livello dell'acqua del serbatoio d'alimentazione e l'asse della pompa, oppure l'altezza di colonna d'acqua relativa alla pressione dell'acquedotto.

**Prevalenza.** La prevalenza  $H$  è l'aumento di energia totale che una determinata quantità di liquido (generalmente riferita ad  $1\text{ kg}$  di fluido) riceve tra l'ingresso e l'uscita della pompa nell'unità di tempo<sup>(9.1)</sup>; essa è data praticamente dalla differenza di pressione tra una sezione immediatamente a valle della sezione premente e una sezione immediatamente a monte della bocca aspirante della pompa, e viene misurata in metri di colonna del liquido pompato.

**Perdite di carico.** Sono perdite di energia (essenzialmente di pressione), dovute alla rugosità delle pareti dei tubi, alle deviazioni, agli strozzamenti, ecc. Esse vengono valutate in metri di colonna del liquido che fluisce.

(9.1) La prevalenza  $H$  è l'energia specifica ceduta al fluido nell'unità di tempo; cioè l'energia ceduta nell'unità di tempo per unità di peso del fluido. Per cui, la potenza (effettiva)  $P_{eff}$  [ $kW$ ] che una pompa di prevalenza  $H$  e portata volumica  $Q$  cede ad un fluido di densità  $\rho$  è data da:  

$$P_{eff} = \rho g \cdot Q \cdot H.$$

### 9.2.2 Lunghezza delle tubazioni

La lunghezza delle tubazioni è rappresentata dallo sviluppo esterno di tutti i tubi che formano la tubazione. La sua conoscenza è necessaria per stabilire le perdite di carico distribuite.



NOTA. La velocità dell'acqua nelle tubazioni non deve per nessun motivo essere superiore ai  $2 \text{ m/s}$ . Nel tubo aspirante è buona norma non superare  $1 \text{ m/s}$ .

Siccome le pompe centrifughe sono sempre accoppiate direttamente al motore elettrico, il loro numero di giri effettivo corrisponde a quello del motore la cui velocità di rotazione è ben determinata dalla frequenza della corrente e dal numero di polarità. Le elettropompe centrifughe più lente sono (a parità di altre condizioni) più costose, ma anche meno rumorose.

La sezione del tubo aspirante può, grosso modo, essere calcolata assegnando al liquido che in esso fluisce una velocità che varia entro  $0,5 \div 1 \text{ m/s}$  per condotte più o meno lunghe.

Una pompa funziona in quanto crea nel tubo aspirante una depressione e quindi in esso la pressione atmosferica, agente sul pelo libero della massa d'acqua da sollevare, fa salire l'acqua teoricamente fino ad un'altezza corrispondente a quella di detta pressione:  $1 \text{ bar } 10,33 \text{ mH}_2\text{O}$ . All'atto pratico, però, a causa dell'esistenza di resistenze di attrito, una pompa è in grado di sollevare nel tubo di aspirazione una colonna d'acqua di circa  $8 \text{ m}$ . Oltre questa altezza, si avrebbero dei fenomeni di cavitazione con passaggio in fase aeriforme dei gas e vapori disciolti nell'acqua in condizioni ambiente di  $1 \text{ atm}$ .

In generale, per aumentare l'altezza di aspirazione occorre aumentare la sezione del tubo diminuendo ancora la velocità dell'acqua, e quindi le resistenze (perdite di carico). Ma in nessun caso l'altezza di aspirazione deve superare gli  $8 \text{ m}$ .

Le tubazioni di aspirazione, per avere contenute perdite di carico, devono avere le dimensioni di 1 o 2 diametri superiori rispetto a quelle di mandata; anche se l'attacco della pompa in certi casi è inferiore.

#### Tubo aspirante

Nel tratto aspirante si vince la prevalenza solo grazie alla depressione creato nel corpo pompa, quindi si devono evitare giunzioni difettose che ostacolerebbero l'aspirazione del liquido.

Il tubo aspirante deve essere sempre acclive verso la pompa; essere cioè in continua pendenza verso la bocca aspirante e a tenuta assolutamente ermetica. È bene anche munire il tubo aspirante (nella sua parte immersa) di una valvola di ritegno che permetta l'entrata dell'acqua verso la pompa, ma non in verso contrario.

Per evitare che l'acqua spinta nel tubo di mandata, all'interrompersi del funzionamento della pompa, possa dare luogo, col colpo d'ariete che viene a crearsi, a deterioramenti della girante e per evitare lo svuotamento del tubo premente, deve essere installata a valle della pompa una valvola di ritegno.

### 9.2.3 Potenza assorbita

Detta  $H$  la prevalenza manometrica totale della pompa in  $\text{m H}_2\text{O}$ ,  $Q$  la portata  $\text{m}^3/\text{s}$ , la potenza assorbita dalla pompa in  $\text{kW}$  è data dalla relazione:

$$P [\text{kW}] = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot Q \cdot H}{1000 \cdot \eta} = \frac{9,81 \cdot Q \cdot H}{\eta}; \quad (\text{IX.15})$$

Nel caso di acque caricate con liquami, si dovrà sempre utilizzare la formula generale.

essendo  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  e per l'acqua pulita  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Il rendimento  $\eta$  globale di una pompa può avere valori compresi tra  $0,90$  e  $0,65$ .

In una pompa centrifuga, diminuendo la portata (strozzando ad esempio con una saracinesca il tubo di mandata) aumenta la prevalenza (fino però ad un dato limite) e diminuisce la potenza assorbita. Per prevalenze superiori ad un certo valore, si accoppiano più giranti fra loro. In linea di massima, con una sola girante si può arrivare ad una prevalenza totale di  $150 \text{ m}$  purché la portata sia relativamente piccola e l'altezza d'aspirazione piccolissima o nulla.

#### Potenze effettive per il motore elettrico

La potenza del motore accoppiato ad una pompa centrifuga deve sempre essere superiore del  $10\%$  alla potenza che occorrerebbe esattamente per l'azionamento della pompa stessa, e ciò si fa per sopperire ad eventuali sovraccarichi imprevedibili o difficili da calcolare a priori, così come:

- possibili deterioramenti;
- variazioni nelle condizioni di lavoro;
- incertezza sul calcolo preciso delle resistenze offerte dai condotti;
- installazione in locali a temperatura ambiente elevata; ecc.

#### 9.2.4 Criteri pratici per l'installazione di una pompa centrifuga

In generale, nell'installazione di una pompa centrifuga conviene attenersi a queste regole generali:

1. diminuire l'altezza di aspirazione il più possibile curando la perfetta ermeticità dei giunti del tubo aspirante e la costante pendenza dello stesso verso la bocca aspirante;
2. alla base del tubo aspirante applicare una succhieruola per evitare l'aspirazione di corpi estranei ed una valvola di ritegno (se la pompa non è sotto battente);
3. qualora non fosse assolutamente possibile mantenere la pendenza prescritta del tubo di aspirazione, nel dorso della contropendenza o del sifone o dovunque possa accumularsi aria, installare un serbatoio alla sommità del quale aspiri una pompa a vuoto, un eiettore o analoghe macchine di aspirazione dell'aria;
4. nel caso di prevalenze notevoli e con lunghe condotte di mandata, per evitare le sovrappressioni cui può dare luogo un brusco arresto della pompa, inserire in derivazione o in serie sulla condotta di mandata una *cassa d'aria* (autoclave) munita di valvola di ritegno con derivazione in by-pass.

#### 9.2.5 Scelta del diametro economico dei tubi dell'impianto di sollevamento

Il diametro più conveniente dal lato economico (*spese d'impianto e spese di esercizio*) per le condotte permanenti, tenuto conto del prezzo medio dei tubi e delle elettropompe, nonché del costo dell'energia elettrica, può essere in linea di massima ricavato dalla seguente formula:

$$D = 15\sqrt{10 \cdot Q}; \quad (\text{IX.16})$$

dove:

- $D$  è il diametro del tubo, in  $mm$ ;
- $Q$  è la portata nella condotta premente, in  $l/s$ .



NOTA. Meglio però sarà sempre calcolare tale diametro (così come quella di aspirazione) con metodi scientifici basati sull'analisi delle perdite di carico, sull'analisi delle portate e in funzione delle lunghezze di tali tubazioni.

#### 9.2.6 Diminuzione dell'altezza di aspirazione in funzione dell'altitudine e in funzione della temperatura

Nel progetto di un impianto di sollevamento è bene rispettare precisi limiti sull'altezza di aspirazione di una pompa, che è prudente non superare se si vuol mantenere regolare il funzionamento della pompa stessa. Tali limiti sono riportati su specifici manuali di termotecnica.

Superando tali limiti indicati è da temersi il fenomeno della *cavitazione*. Questo ha luogo quando nella camera di ingresso della girante si raggiunge una depressione tale da liberare una parte notevole di aria o di altri gas che sono normalmente disciolti in soluzione nell'acqua. Tale fenomeno può provocare la rottura della vena nel qual caso la pompa si disinnesci. Il fenomeno si aggrava quando l'altezza di

aspirazione è tale da superare la tensione del vapore del liquido pompato, perché allora nel liquido stesso si formano cavità riempite dal vapore del liquido oltre che dai gas liberati.

#### Limiti per la temperatura del fluido

Quando la temperatura dell'acqua supera i  $65^{\circ}C$  è bene che l'acqua affluisca alla pompa con una opportuna pressione, indicata in metri di acqua (*altezza geodetica di affluenza*). Quando, invece, la temperatura dell'acqua supera i  $100^{\circ}C$ , per evitare l'ebollizione e la conseguente evaporazione, è necessario racchiudere l'acqua da sollevare in un recipiente chiuso e sottoposto a pressione, in modo di dotare l'acqua da sollevare di un franco di pressione  $\Delta p$  sufficiente a far spostare la sua temperatura di ebollizione oltre i  $100^{\circ}C$ . Tale  $\Delta p$  di pressione dovrà, inoltre, tenere conto delle inevitabili diminuzioni di pressione per perdite di carico lungo tutto il percorso di aspirazione.



NOTA. Quando si devono sollevare *liquidi volatili*, l'altezza di aspirazione deve essere ridotta per evitare che, formandosi dei vapori nella colonna aspirante, essi possano entrare nel corpo pompa arrestandone il funzionamento. La riduzione dell'altezza di aspirazione dipende dalla natura del liquido da sollevare e dalla sua temperatura all'interno delle tubazioni.

## CAPITOLO 10



# Scambi di energia e palettature delle turbomacchine

(turbomacchine operatrici radiali)

Dal testo "Turbomacchine" di Oreste Acton;  
Capitolo terzo.

---

Vengono focalizzati alcuni aspetti sull'interazione tra fluido e pale in macchine operatrici radiali.

---

## 10.1 Le palettature delle pompe centrifughe

### 10.1.1 Introduzione

Come già evidenziato nei precedenti paragrafi, le operatrici centrifughe presentano delle peculiarità che ne fanno delle macchine di semplice costruzione e di discreta efficienza anche senza eccessive cure progettistiche.

Mentre per le macchine operatrici assiali l'esigenza di far subire al fluido deviazioni sufficientemente elevate senza provocare distacchi della vena fluida durante il moto comporta l'affrontare e il risolvere complessi problemi aerodinamici, nelle operatrici radiali l'azione del campo centrifugo permette da un lato la creazione di un flusso veloce (grazie alla semplicità con cui si raggiungono alte velocità periferiche di rotazione), la cui decelerazione consente poi di trasformare quasi integralmente l'energia cinetica che il fluido ha ricevuto attraversando il rotore, e dall'altro la possibilità di una notevole compressione del fluido nell'interno del rotore, che può presentare una variazione di velocità di trascinamento molto elevata semplicemente grazie ad una forte variazione della distanza dall'asse di rotazione lungo i suoi condotti.

L'espressione euleriana del lavoro unitario (potenza per unità di portata massica) presenta, come noto, la forma:

$$\begin{aligned}
 P/\dot{m} &= L_{est} = U_2 C_{2t} - U_1 C_{1t} = \\
 &= \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{X.1}$$

Teorema di Bernoulli calcolato rispetto al riferimento relativo solidale con la palettatura rotorica, nell'ipotesi di fluido incompressibile.

Questa equazione è, nel caso delle macchine operatrici radiali, estremamente esplicita: se la macchina permette una forte variazione delle  $U$  e, di conseguenza, delle  $C$ , lo scambio energetico macchina-fluido può raggiungere valori estremamente elevati sia pure con velocità relative  $W$  poco variabili; poiché – osservando, ad esempio, la forma dell'equazione dell'energia nel moto relativo per un fluido supposto incompressibile (liquido) – le perdite per attrito nel rotore dipendono dal valore della velocità media relativa  $W$ ; infatti:

$$\left( gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2}{2} - \frac{U_1^2}{2} \right) = \left( gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2}{2} - \frac{U_2^2}{2} \right) + \left| L_{attriti} \right|_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{X.2})$$

dove il termine del lavoro dissipativo degli attriti dipende dal flusso relativo<sup>(10.1)</sup> della corrente fluida:

$$\left| L_{attriti} \right|_{1 \rightarrow 2} = \kappa_{rel} \frac{W_1^2}{g} . \quad (\text{X.3})$$



NOTA. Si può affermare quindi che questo è il motivo fondamentale del rapido sviluppo e della vastissima diffusione di queste turbomacchine, che presentano problemi fluidodinamici soltanto nelle realizzazioni particolarmente spinte (altissime velocità di rotazione e/o alti scambi energetici con il fluido); per contro la soluzione assiale necessita di particolare studio fluidodinamico anche per raggiungere soltanto un'efficienza modesta. Per quest'ultima categoria di macchine soltanto lo sviluppo delle conoscenze aerodinamiche ha permesso quindi realizzazioni valide, mentre per le macchine centrifughe anche soluzioni grossolane danno risultati industrialmente validi.

### 10.1.2 Le palettature delle macchine centrifughe

Già nei paragrafi precedenti si era data un'indicazione di massima della conformazione delle palettature di una turbomacchina operatrice radiale, indicando i criteri di funzionamento della macchina, che risulta costituita essenzialmente da un rotore con palettatura conformata in direzione prevalentemente normale all'asse di rotazione, che ha la funzione di accelerare fortemente il fluido (energia cinetica impressa alla corrente dal moto del rotore), e da una palettatura statorica che decelerando opportunamente il flusso ne incrementa la pressione.

Nella configurazione fondamentale la macchina presenta una *cassa* nella quale è alloggiato il rotore, con sviluppo essenzialmente in un piano normale all'asse di rotazione e con le pale aventi la sezione di ingresso e di uscita fondamentalmente su superfici cilindriche coassiali.

**Grado di reazione.** È consuetudine definire il *grado di reazione* il rapporto:

$$R = \frac{(\Delta i)_{rotore}}{(\Delta i)_{stadio}} . \quad (\text{X.4})$$

Poiché molto spesso – in un elemento di un compressore – l'incremento della pressione nello stadio risulta limitato<sup>(10.2)</sup>, si pone  $di = dp/\rho_m$ , avendo supposto per il valore della densità nello stadio il valore mediato tra quelli assunti all'entrata e all'uscita. Con questa approssimazione, l'espressione del grado di reazione assume la forma:

(10.1) Le perdite di carico rispetto al riferimento relativo dipendono dall'entità dell'altezza cinetica media relativa nel condotto. È agevole riferire tale perdita di carico in funzione di  $W_1^2/2$ , tramite l'introduzione di un opportuno coefficiente  $\kappa_{rel}$ .

(10.2) Per maggiori delucidazioni consultare il testo: "Turbomacchine" di ORESTE ACTON; pag. 163.

$$R = \frac{(\Delta i)_{rotore}}{(\Delta i)_{stadio}} \cong \frac{(p_u - p_e)_{rotore}}{(p_u - p_e)_{stadio}} = \frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1} \quad (\text{X.4}_a)$$

L'espressione dell'EQ. (X.4\_a) è esatta solo nel caso di fluido incomprimibile e per trasformazioni adiabatiche reversibili. Però, la comodità dell'espressione ora scritta, fa sì che in effetti venga molto spesso utilizzata anche quando il fluido risulta comprimibile e la trasformazione adiabatica reale (presenza di attriti interni).

Ragionando in termini di prevalenze, è possibile esprimere il grado di reazione per una macchina operatrice centrifuga mediante la seguente relazione:

$$R = \frac{(\Delta i)_{rotore}}{(\Delta i)_{stadio}} = \frac{gH_{rotore}}{gH_{stadio}} \cong \frac{\Delta p_{rotore}}{\Delta p_{stadio}}, \quad (\text{X.5})$$

che, in funzione delle velocità, si può esprimere con la:

$$R = \frac{[(U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2)]/2}{[(C_2^2 - C_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) + (U_2^2 - U_1^2)]/2} \quad (\text{X.6})$$

Nel caso di macchine radiali, il flusso all'entrata del rotore presenta componente della velocità assiale (lungo il tubo di aspirazione), per cui è nulla ( $C_{1u} = 0$ ) la componente della velocità assoluta nella direzione della velocità di trascinamento  $U_1$  all'entrata del rotore. Ovvero, risulta:  $C_1 = C_{1m}$ . In tal caso, l'espressione del grado di reazione assume l'aspetto:

$$R = \frac{(U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2)}{2U_2C_{2u}}; \quad (\text{X.7})$$

avendo tenuto conto del fatto che, in una girante centrifuga, il valore della velocità di trascinamento è tale da essere  $U_1 \ll U_2$  e, inoltre,  $C_{1u}$  praticamente nulla, in quanto la corrente fluida entrante nel rotore presenta solo componente assiale al tubo di aspirazione. Con queste posizioni, infatti, risulta:

$$gH_{stadio} = U_2C_{2u} - U_1C_{1u} \approx U_2C_{2u}.$$

Progettando una geometria della girante tale che sia verificata la condizione  $C_{1m} = C_{2m} = C_m$  - ovvero che la componente radiale della velocità assoluta valutata nella sezione di ingresso e di uscita dal rotore sia la medesima - si ha dal punto di vista delle componenti:

$$\begin{aligned} (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) &= (W_1^2 - U_1^2) - (W_2^2 - U_2^2) = C_m^2 - (W_2^2 - U_2^2) = \\ &= U_2^2 - (W_2^2 - C_m^2) = U_2^2 - (U_2 - C_{2u})^2. \end{aligned} \quad (\text{X.8})$$

e sostituendo nell'EQ. (X.8) risulta l'espressione:

$$R = \frac{U_2^2 - (U_2 - C_{2u})^2}{2U_2C_{2u}} = 1 - \frac{C_{2u}}{2U_2}. \quad (\text{X.7}_a)$$

#### Sul grado di reazione...

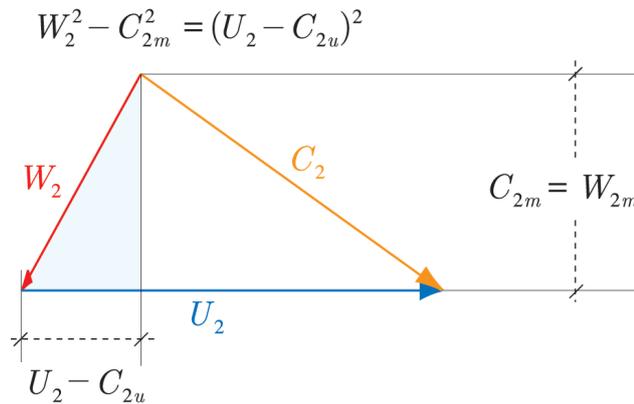
La forma delle palettature statorica e rotorica dipende essenzialmente dal grado di reazione.

Fino a qualche decennio addietro questo indice  $R$  veniva impiegato appunto per classificare le architet-

ture delle schiere palettate, ma adesso si sta sviluppando il criterio di introdurlo utilmente nei calcoli progettuali, ne consegue che certe approssimazioni prima accettabili oggi non trovano consenso.

[Vedere "Le Turbomacchine" di Carmelo Caputo; pag. 103].

**Figura 10.1**  
Generico triangolo di velocità sul bordo di uscita della girante (rotore) di una macchina operatrice.



NOTA. La relazione tra i moduli e le componenti delle velocità all'uscita della girante – data nell'**EQ. (X.8)** – sono ricavabili immediatamente considerando il triangolo di velocità rappresentato nella **Figura 10.1**.

### 10.1.3 Grado di reazione e rendimento per macchine operatrici radiali

Nelle trattazioni delle operatrici radiali è poco usato il *grado di reazione*, che tuttavia può anche in questo tipo di macchine assumere un significato interessante.

Se si mantiene l'ipotesi di costanza della componente radiale della velocità assoluta  $C_{1m} = C_{2m} = C_m$ , la definizione di grado di reazione – nel caso di macchina operatrice radiale – porta all'espressione vista nell'**EQ. (X.7\_a)**:

$$R = 1 - \frac{C_{2u}}{2U_2}$$

Ma il grado di reazione può anche definirsi – con un'espressione esatta – con il rapporto:

$$R = \frac{(\Delta i)_{rotore}}{(\Delta i)_{stadio}}; \quad (\text{X.9})$$

che, sempre trascurando le variazioni del termine cinetico assoluto  $C^2/2$ , si riscrive come:

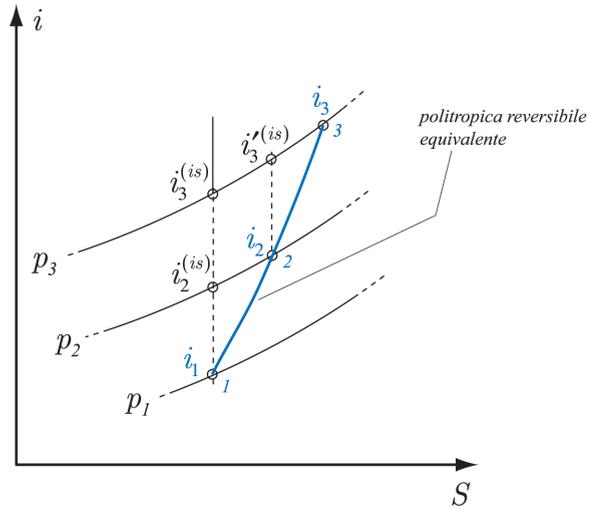
$$R = \frac{i_2 - i_1}{i_3 - i_1}; \quad (\text{X.9}_a)$$

dove  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  sono, nell'ordine, i valori dell'entalpia del fluido (nella sua trasformazione reale adiabatica non isentropica) all'entrata dello stadio (e quindi anche del rotore), all'entrata del diffusore<sup>(10.3)</sup> (e quindi all'uscita del rotore), ed infine all'uscita dallo stadio elementare.

Concordemente al diagramma rappresentato nella **Figura 10.2** a pag. 175, si definiscono i rendimenti dello stadio, del rotore e del diffusore nella forma:

(10.3) In una macchina operatrice, il diffusore è posto dopo l'organo che ha ceduto energia cinetica al fluido (rotore), in modo da "diffondere" e trasformare tale energia ricevuta in energia sostanzialmente di pressione, più a valle.

**Figura 10.2**  
Piano entalpia entropia con tracciamento della politropica reversibile equivalente relativa ad una trasformazione adiabatica reale.



- rendimento globale dello stadio elementare:

$$\eta_{stadio} = \frac{i_3^{(is)} - i_1}{i_3 - i_1}; \tag{X.10}$$

- rendimento del rotore:

$$\eta_{rotore} = \frac{i_2^{(is)} - i_1}{i_2 - i_1}; \tag{X.11}$$

- rendimento dell'organo diffusore:

$$\eta_{diffusore} = \frac{i_3'^{(is)} - i_2}{i_3 - i_2} \approx \frac{i_3^{(is)} - i_2^{(is)}}{i_3 - i_2}. \tag{X.12}$$

Ciò posto, è possibile correlare i rendimenti parziali dello stadio con il grado di reazione; si ha infatti:

$$\eta_{stadio} = \frac{[i_3^{(is)} - i_2^{(is)}] + [i_2^{(is)} - i_1]}{i_3 - i_1}, \tag{X.13}$$

e ricavando i diversi termini in parentesi dalle EQ. (X.11) e EQ. (X.12) si ottiene:

$$\begin{aligned} \eta_{stadio} &= \frac{[(i_3 - i_1) - (i_2 - i_1)] \cdot \eta_{diffusore} + (i_2 - i_1) \cdot \eta_{rotore}}{\frac{1}{R} \cdot (i_2 - i_1)} = \\ &= (1 - R) \cdot \eta_{diffusore} + R \cdot \eta_{rotore} \end{aligned} \tag{X.14}$$

L'espressione finale del rendimento di stadio in funzione del rendimento del diffusore e del rotore assume l'espressione:

$$\eta_{stadio} = R \cdot \left[ \eta_{rotore} + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \cdot \eta_{diffusore} \right] \quad (X.15)$$

Tale espressione suggerisce che l'incremento del grado di reazione per aumentare il rendimento di stadio è efficace solo se i rendimenti delle due parti della macchina non risentono negativamente dell'aumento del grado di reazione stesso. A tal proposito, si deve tenere presente che un aumento del grado di reazione  $R$  significa un maggiore incremento di energia di pressione nel rotore, e ciò può essere realizzato soltanto con più elevate decelerazioni relative nel rotore (canali interpallari divergenti: moto subsonico), difficili da ottenere senza abbassare il suo rendimento.

In una macchina operatrice, per ottenere elevati rapporti di compressione, è necessario divergere i canali interpallari del rotore. Ciò, però, è limitato dal fatto che maggiore è la divergenza imposta ai canali interpallari, maggiori sono i fenomeni di distacco della vena fluida dalle pareti delle pale. Ciò comporta forti dissipazioni e repentino abbassamento del rendimento del rotore.

## 10.2 Il rendimento della schiera rotorica

### 10.2.1 Il rendimento di palettatura

Il rendimento  $\eta_p$  di una palettatura rotorica viene valutato tenendo anche conto degli aspetti cinetici della corrente fluida. Tale rendimento viene denominato *rendimento di palettatura* di uno stadio. Tale rendimento viene di regola formulato per turbomacchine motrici, quale rapporto tra il lavoro captato dalla palettatura rotorica (nell'ipotesi che la corrente fluida attraversi entrambe le palettature dello stadio) e l'energia globale disponibile a monte dello stadio stesso:

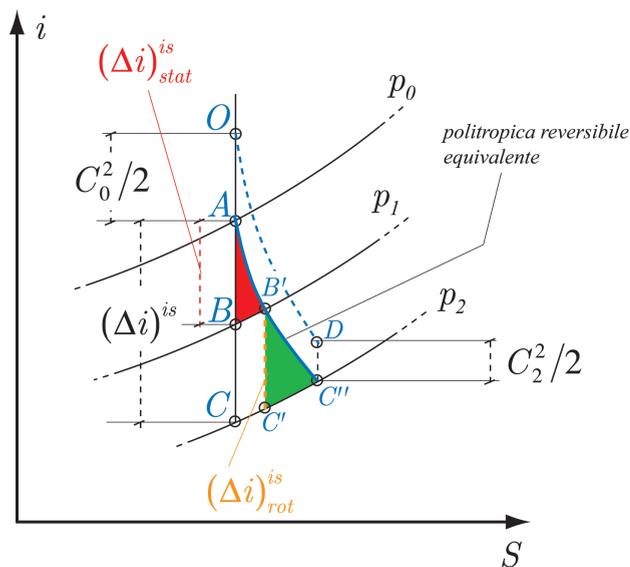
$$\eta_p = \frac{L}{\frac{C_0^2}{2} + (\Delta i)_{is}} \quad (X.16)$$

**Figura 10.3**

Politropica reversibile relativa ad un'espansione adiabatica reale (macchina motrice).

**NOTA:**

A-B: statore;  
BC: rotore.





NOTA. Nulla vieta, ovviamente, di scrivere un'espressione analoga – con l'energia conferita al fluido al numeratore e quella meccanica spesa al denominatore – per le macchine operatrici.

Nel denominatore dell'**EQ. (X.16)** è compresa sia l'energia cinetica posseduta all'ingresso del fluido (ovviamente in termini di unità di massa) sia la caduta entalpica isentropica tra le pressioni di alimentazione e di scarico dello stadio.

Con riferimento alla **Figura 10.3**, la caduta<sup>(10.4)</sup> entalpica isentropica disponibile per lo stadio è  $\Delta i_{AC} \equiv (\Delta i)^{is}$ , cui si aggiunge l'energia cinetica  $C_0^2/2$  inizialmente posseduta dal fluido per formare l'energia totale disponibile del fluido prima di entrare nello stadio elementare.

**Politropica reversibile equivalente**

Se si rappresenta con il punto  $C''$  lo stadio termodinamico finale del fluido, la trasformazione termodinamica di espansione può essere rappresentata dalla linea  $AC''$ , quale corrispondente politropica reversibile equivalente.

Poiché all'uscita dello stadio il fluido possiede l'energia cinetica  $C_2^2/2$ , il punto rappresentativo della situazione energetica finale del fluido è il punto  $D$ , mentre il punto  $O$  è rappresentativo di quella iniziale. Ne consegue che il lavoro che figura al numeratore dell'**EQ. (X.16)** è pari – in valore assoluto – al  $\Delta i_{OD}$ , mentre il denominatore è pari a  $\Delta i_{OC}$ . Si può dunque scrivere:

$$\eta_p = \frac{L}{\frac{C_0^2}{2} + (\Delta i)_{is}} = \frac{\Delta i_{OD}}{\Delta i_{OC}} = \frac{\Delta i_{OC''}}{\Delta i_{OC}} \cdot \frac{\Delta i_{OD}}{\Delta i_{OC''}} = \eta_t \cdot \eta_c; \quad (\text{X.16}_a)$$

avendo indicato:

- con  $\eta_t = \Delta i_{OC''}/\Delta i_{OC}$  il rendimento dell'energia termodinamica;
- con  $\eta_c = \Delta i_{OD}/\Delta i_{OC''}$  il rendimento della parte cinetica dell'energia.

Della componente termodinamica si può dimostrare che esiste la relazione:

$$\eta_t = \vartheta \frac{\Delta i_{OA} + \eta_e \Delta i_{AB} + \eta_g \Delta i_{B'C'}}{\Delta i_{OA} + \Delta i_{AB} + \Delta i_{B'C'}} \quad (\text{X.17})$$

la quale mostra che la componente termodinamica  $\eta_t$  del rendimento di palettatura è data dal prodotto del parametro  $\vartheta > 1$  (*fattore di recupero*) per la media pesata dei rendimenti: unitario per il tratto  $OA$ ;  $\eta_e$  per il tratto  $AB'$  ed  $\eta_g$  per il tratto  $B'C''$  (essendo pesi i salti entalpici isentropici interessati). Risultando, in particolare:

- $\eta_e = \Delta i_{AB'}/\Delta i_{AB}$ ;
- $\eta_g = \Delta i_{B'C'}/\Delta i_{B'C''}$ ;
- $\vartheta = (\Delta i_{OA} + \Delta i_{AB} + \Delta i_{B'C'})/(\Delta i_{OA} + \Delta i_{AB} + \Delta i_{BC})$ .

Risulta  $\vartheta > 1$ , infatti è:

$$\Delta i_{B'C'} > \Delta i_{BC}. \quad (\text{X.18})$$

**Fattore di recupero**

Questo manifesta che le perdite statoriche – durante un'espansione – rendono disponibile per la palettatura rotorica una caduta entalpica maggiore ( $\Delta i_{B'C'}$ ) di quella che si sarebbe avuta in assenza di dette perdite ( $\Delta i_{BC}$ ). Le quali risultano così in parte recuperate.

Il parametro  $\vartheta$  può essere calcolato in base ad un'oculata valutazione dei coefficienti di efflusso delle velocità:

- per lo statore:  $\varphi = C_2/C_{2(\limite)}$
- per il rotore:  $\psi = W_2/W_{2(\limite)}$ ;

(10.4) Nel caso di macchina motrice, le cadute entalliche si considerano con valore positivo: moduli.

dove il pedice “limite” significa il valore ideale della velocità, in assenza di fenomeni dissipativi o urti. Occorre però osservare che i due parametri  $\varphi$  e  $\psi$  dipendono fortemente dai valori delle velocità di efflusso e dalle angolazioni delle palettature; cosicché non è possibile effettuare calcoli separati per le due componenti  $\eta_t$  ed  $\eta_c$  del rendimento di palettatura  $\eta_p$ , il quale perciò deve essere determinato a seguito di successivi calcoli di tentativo.

La componente cinetica  $\eta_c$  del rendimento di palettatura è inferiore all'unità perché il fluido esce dalla macchina con una velocità  $C_2$ , necessaria per allontanare il fluido dalla girante, e che talvolta è ragguardevole al fine di contenere le dimensioni della palettatura.

**10.2.2 Rendimento di palettatura per macchina operatrice**

Con riferimento alla **Figura 10.4**, che rappresenta le vicissitudini fisiche ed energetiche del fluido, si può affermare che nell'attraversare il rotore l'unità di massa del fluido evolvente passa dall'entalpia totale  $i_{t1} = i_1 + C_1^2/2$  al valore di entalpia totale  $i_{t2} = i_2 + C_2^2/2$ , scambiando il lavoro  $L_{est} = i_{t2} - i_{t1}$ : a valle del rotore, quindi, è già raggiunto dal fluido il massimo livello energetico: esso non può più variare, data l'assenza di scambio di lavoro nella successiva palettatura (statore).

Infatti, nell'attraversare lo statore (tratto 2-3), risulta la conservazione dell'entalpia totale  $i_{t3} - i_{t2} = 0$  e quindi:

$$i_3 + \frac{C_3^2}{2} = i_2 + \frac{C_2^2}{2}, \tag{X.19}$$

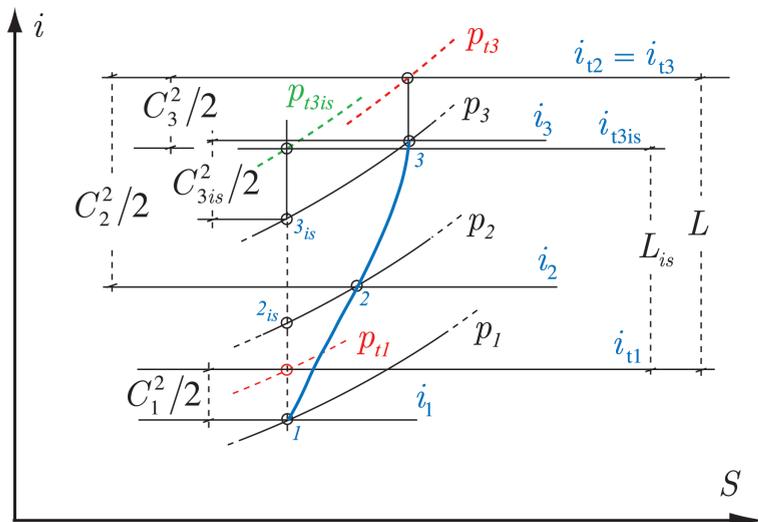
e la variazione di entalpia statica è legata alla variazione dell'energia cinetica:

$$i_3 - i_2 = \frac{C_3^2 - C_2^2}{2}. \tag{X.19_a}$$

La pressione (statica) che dal valore  $p_1$  all'entrata del rotore, era passata all'uscita di questi al valore  $p_2$ , aumenta ulteriormente nello statore al valore  $p_3$ . Ma l'andamento della trasformazione sul piano entalpico mette bene in evidenza l'influenza negativa che la non isoentropicità della trasformazione ha sulle caratteristiche finali del fluido.

**Figura 10.4**  
 Politropica reversibile corrispondente ad una compressione (macchina operatrice). Diagramma in termini anche di entalpie e pressioni totali

**NOTA:**  
 1-2: rotore;  
 2-3: statore.



**Pressione totale (di ristagno)**

Introducendo la definizione di pressione di ristagno:

$$p_t \equiv p + \rho g + \rho \frac{C^2}{2}, \quad (\text{X.20})$$

ed ammettendo che lo scopo finale della macchina operatrice sul fluido sia quello di aumentare la pressione da  $p_1$  a  $p_3$  e l'energia cinetica da  $C_1^2/2$  a  $C_3^2/2$ , si può affermare che l'incremento di energia causato dai fenomeni dissipativi comporta:

- un aumento del lavoro da eseguire sul fluido:  
da  $L_{est}^{(is)} = i_{t3is} - i_{t1}$  al valore  $L_{est} = i_{t3} - i_{t1} > L_{est}^{(is)}$ ;
- diminuzione della *pressione totale*  $p_t$  ottenibile:  
da  $p_{t3is}$  al valore  $p_{t3} < p_{t3is}$ .

Il rendimento di palettatura dello stadio, per la macchina operatrice, è definibile:

$$\eta_p = \frac{L_{est}^{(is)}}{L_{est}} = \frac{i_{t3is} - i_{t1}}{i_{t3} - i_{t1}} \equiv \frac{i_{3is} - i_1}{(i_3 - i_1)} \cdot \frac{(i_3 - i_1)}{i_{t3} - i_{t1}} = \eta_t \cdot \eta_c. \quad (\text{X.21})$$

avendo posto (vedere **Figura 10.4**):

- il rendimento termodinamico:  $\eta_t = (i_{3is} - i_1)/(i_3 - i_1) < 1$ ;
- il rendimento cinetico:  $\eta_c = (i_3 - i_1)/(i_{t3} - i_{t1}) < 1$ .



**NOTA.** Nell'**EQ. (X.21)** si è adottata l'approssimazione che i salti entalpici statici hanno valori superiori alle variazioni di energia cinetica subite dal fluido<sup>(10.5)</sup>, per cui si è posto, in via di prima approssimazione, la posizione:  $i_{t3is} - i_{t1} \equiv i_{3is} - i_1$ . Infatti:

$$i_{t3is} - i_{t1} = i_{3is} - i_1 + \frac{C_3^2 - C_1^2}{2} \stackrel{=0}{\equiv} i_{3is} - i_1. \quad (\text{macchine motrici})$$

**Nota importante**



È da rimarcare che nel caso delle macchine motrici (pompe) generalmente il salto entalpico statico ha valori notevolmente superiori alle variazioni di energia cinetica subite dal fluido. Ciò, più raramente, è vero nel caso di macchine operatrici (turbine), ma molto spesso, specie quando occorre sviluppare trattazioni la cui semplicità formale consente di mettere in luce aspetti fondamentali del comportamento delle macchine, si preferisce adottare l'approssimazione di considerare le altezze cinetiche trascurabili, sia per via della loro minima variazione tra entrata e uscita dello stadio elementare, sia perché minori rispetto alle entalpie statiche nelle varie sezioni dello stadio (rotore e statore).

Si deve anche dire che ove la macchina è inserita in un impianto tramite una serie di tubazioni che le adducono e le asportano il fluido, l'ordine di grandezza delle velocità di questi nelle tubazioni stesse non varia, così che la variazione del comportamento delle macchine tramite le definizioni "approssimate" dei rendimenti – vedere **EQ. (X.21)** – è più che sufficiente per l'analisi dell'impianto.

La componente cinetica  $\eta_c$  del rendimento di palettatura è sempre inferiore all'unità per consentire al fluido di uscire dallo stadio della macchina, in modo da allontanare il fluido (ormai "elaborato") dalla girante con velocità  $C_2$ . Tale velocità che, per gli stadi intermedi di una turbomacchina spesso può essere in parte recuperata sotto forma di velocità  $C_0^{(succ)}$  di ingresso per lo stadio successivo. Il valore è dell'ordine del centinaio di  $m/s$ , ma per l'ultimo stadio – per il quale nessun recupero è possibile – esso può giungere a  $250 \div 300 \text{ m/s}$  per favorire lo smaltimento

(10.5) Ciò è più vero per le macchine motrici che per le macchine utilizzatrici; ma l'approssimazione adottata risulta comunque utile per la valutazione di aspetti qualitativi sulla trasmissione dell'energia tra fluido e palettatura.

## Nota importante



della portata senza eccedere nelle dimensioni.<sup>(10.6)</sup> In virtù delle caratteristiche presentate dal rendimento cinetico  $\eta_c$ , ne consegue che tale rendimento può essere calcolato una volta noti i due triangoli di velocità all'ingresso ed all'uscita della palettatura rotorica.

Ciascun triangolo richiede tre informazioni per essere definito (ad esempio: l'angolo acuto compreso tra le direzioni dei vettori  $C_i$  e  $U_i$ ; il valore di  $U_i$ ; ed infine la componente di velocità per lo smaltimento della portata:  $W_{im} = C_{im}$ ); ma, nella fattispecie, essendo i rendimenti *rapporti* di energie (o di differenze delle medesime) proporzionali a quadrati delle velocità, le quali velocità sono tutte rappresentate dalle lunghezze dei lati dei triangoli, appare evidente che ai nostri fini occorre conoscere la *forma* e non le dimensioni dei triangoli; occorre cioè operare in *similitudine*. Bastano cioè non sei, ma cinque informazioni – tra di loro indipendenti – che siano rapporti tra lati e/o funzioni trigonometriche di angoli tra i vettori.



NOTA. Si può dunque affermare che la componente cinetica  $\eta_c$  del rendimento di palettatura (importante a livello di studio preliminare) dipende da cinque *parametri adimensionali* (perché, come detto, rapporti tra grandezze omogenee) dei triangoli di velocità della palettatura rotorica.

Conviene scegliere i più significativi di questi parametri e quindi:

- il rapporto  $U_1 / C_1$  del triangolo d'ingresso, particolarmente significativo perché confronta la velocità periferica della palettatura con quella assoluta del fluido che la investe, e deve perciò essere considerato il *rapporto cinematico fondamentale*<sup>(10.7)</sup>;
- una funzione trigonometrica dell'angolo  $\alpha_1$  tra i lati  $U_1$  e  $C_1$  del triangolo d'ingresso; trattandosi di angolo piuttosto piccolo è comodo scegliere il *coseno*;
- il rapporto  $U_2 / U_1$  tra le velocità di trascinamento all'uscita e all'ingresso della palettatura rotorica, che indica il *grado di assialità* della macchina;
- il rapporto tra le componenti meridiane  $C_{2m} / C_{1m}$  ovvero  $W_{2m} / W_{1m}$  dei triangoli d'uscita e d'ingresso, importante perché si tratta delle componenti che forniscono la portata essendo normali ai vettori  $U$ ;
- il *grado di reazione*  $R$ , il quale è certamente adatto perché funzione di tutte le sei velocità dei triangoli.

In conclusione, dunque:

$$\eta_c = f\left(\frac{U_1}{C_1}; \cos\alpha_1; \frac{U_2}{U_1}; \frac{C_{2m}}{C_{1m}}; R\right). \quad (\text{X.22})$$

Poiché si è visto che  $\eta_p = \eta_t \cdot \eta_c$  e che  $\eta_t$  dipende dai coefficienti riduttori delle velocità di flusso  $\varphi$  e  $\psi$ , l'**EQ. (X.22)** si può trasformare nell'espressione più generale:

$$\eta_p = f\left(\frac{U_1}{C_1}; \cos\alpha_1; \frac{U_2}{U_1}; \frac{C_{2m}}{C_{1m}}; R; \varphi; \psi\right). \quad (\text{X.22}_a)$$

(10.6) Nel caso di turbine in moto (aerei) il discorso non è del tutto valido (vedere il concetto del "dilemma propulsivo").

(10.7) La velocità assoluta  $C_1$  del fluido nella sezione di entrata del rotore è proporzionale alla radice quadrata dell'entità della variazione entalpica subita dal fluido nello statore: equazione dell'energia del fluido nel passaggio attraverso lo statore, in cui è  $L_{est} = 0$ .

## CAPITOLO 11

# Classificazione e caratteristiche generali delle macchine a fluido

**Macchine operatrici e motrici.**

**Consultato il testo: “Introduzione allo studio delle Macchine” di Oreste Acton e Carmelo Caputo.**

---

In questa parte viene fornita una breve panoramica sulle principali macchine a fluido e sulle loro principali caratteristiche generali.

---

### 11.1 Generalità sulle macchine a fluido

#### 11.1.1 Introduzione

Quando la conversione *energia primaria*  $\rightarrow$  *energia meccanica utile* viene realizzata da un solo e compatto apparecchio, questo prende il nome di *macchina motrice*. Proprio per questa consuetudine ormai generale, ogni volta in cui l'interazione tra fluido e apparecchiatura è concentrata in un solo congegno (sia pure più o meno complesso), quest'ultimo prende il nome di *macchina (a fluido)*.

Ne è derivata quindi la dizione di “macchina” anche per quei congegni che effettuano una conversione di energia nel senso *macchina*  $\rightarrow$  *fluido* e quindi non effettuano direttamente la conversione di un'energia primaria (acqua o aria): ciò è ampiamente giustificato sul piano pratico dal fatto che gli impianti motori più complessi utilizzano oltre alle *macchine motrici* anche questi tipi di apparati che, perciò, assumono il nome di *macchine operatrici (a fluido)* in quanto, di regola, “operano” sul fluido cedendo a questo parte dell'energia meccanica trasmessa alla macchina da apposito motore.

Si può quindi concludere che, focalizzando l'attenzione sulle *macchine*, una prima e fondamentale suddivisione riguarda appunto il senso della trasmissione di energia: nel caso di trasmissione dal fluido alla macchina si parla di *macchina motrice (a fluido)*, mentre nel caso di trasmissione dalla macchina al fluido si parla

**Equazione dell'energia per l'unità di massa**

L'equazione dell'energia può essere posta nella forma (per l'unità di massa fluida):

$$d(u + \frac{1}{2}C^2 + gz) = \rho_m dt + \rho_t dt; \tag{B.28}$$

dove:

- $\rho_m$  è la potenza meccanica trasmessa all'unità di massa;
- $\rho_t$  è la potenza termica trasmessa attraverso il contorno esterno della massa fluida (per unità di massa).

Pertanto, in termini di potenze (trascurando l'energia potenziale):

$$\frac{D}{Dt}(u + \frac{1}{2}C^2) = \rho_m + \rho_t. \tag{B.29}$$

Dall'**EQ. (B.22\_a)** ci si rende conto che il lavoro per unità di massa fluida delle forze di pressione (*lavoro di spostamento*) incrementa sia l'energia cinetica che l'energia interna (il lavoro della forza peso dipende solamente dalla differenza di altezza). Infatti, il lavoro di spostamento (per unità di massa fluida) – in virtù della relazione sulla differenziazione per parti – può essere scisso in due differenti lavori:

$$-d(pv) = -p dv - v dp. \tag{B.30}$$

È facile riconoscere che il termine  $-v dp$  è il lavoro delle forze di superficie che incrementa sia l'energia cinetica che l'energia interna (vedere a pag. VIII, **(EQ. B.15)**); mentre, il termine  $-p dv$  è il lavoro di pura deformazione elastica (dilatazione/contrazione) che aumenta solo l'energia interna del fluido. Per cui l'equazione dell'energia globale si può esprimere nella forma:

$$d u + d(\frac{1}{2}C^2) + g dz = dL_{est} + dQ_{est} - p dv - v dp. \tag{B.31}$$

A questo punto, se si aggiunge membro a membro il termine  $\rho_d dt$ , si ottiene:

$$\rho_d dt + d(\frac{1}{2}C^2) + g dz + d u = dL_{est} - v dp - p dv + dQ_{est} + \rho_d dt; \tag{B.32}$$

dove risulta anche  $dQ_{est} = \rho_t dt$ ; in quanto l'equazione fa riferimento all'unità di massa fluida evolvente. Ma, in virtù del I° Principio della termodinamica, sappiamo che vale la relazione:

$$d u = (\rho_t dt + \rho_d dt) - p dv; \tag{B.33}$$

per cui l'**EQ. (B.32)** si riduce alla forma:

$$d(\frac{1}{2}C^2) + g dz = dL_{est} - v dp - \rho_d dt; \tag{B.34}$$

ovvero, si riconosce l'espressione dell'equazione dell'energia in forma meccanica (per unità di massa fluida).

**Il bilancio dell'energia cinetica.** Se si considera il solo bilancio dell'energia cinetica, è immediato osservare che solo una parte della potenza meccanica globale incrementerà l'energia cinetica. Infatti, la potenza meccanica di deformazione elastica incrementa solo l'energia interna del fluido e la parte di potenza meccanica perduta internamente in calore causa gli attriti, non incrementando l'energia cinetica, incrementa anch'essa l'energia interna, come mostrato chiaramente dal I° Principio della Termodinamica (vedere **EQ. (B.33)**).

Questo porta ad osservare che l'incremento di energia cinetica – sempre per unità di massa fluida – è dovuto a quella sola parte della potenza meccanica che non va ad incrementare l'energia interna. Ovvero, se si indica con  $d\mathcal{L}_{def} = -p dv$  il

Appendice  
**B**

**NOTA:**  
È importante rimarcare che l'energia meccanica  $-v dp$  non comprende il lavoro di dilatazione/contrazione; in quanto quest'ultimo non contribuisce a variare l'energia cinetica, ma solo l'energia interna.



**NOTA:**  
L'energia meccanica totale somministrata dall'esterno alla massa fluida fa variare sia l'energia interna che l'energia cinetica. Per calcolare la quota parte di energia meccanica che varia la sola energia cinetica è necessario sottrarre all'energia meccanica totale sia il lavoro di contrazione/dilatazione, sia l'energia dissipata dagli attriti in calore.

lavoro di deformazione elastica subito dal fluido durante il suo moto dalle forze esterne, e si indica con  $\mathcal{P}_d dt$  l'entità della quota parte di lavoro meccanico dissipato internamente alla massa fluida causa gli attriti, allora la potenza meccanica efficace che va effettivamente ad incrementare l'energia cinetica del fluido è:

$$d\mathcal{P}_m^{(eff)} \equiv d\mathcal{P}_m - (\mathcal{P}_d dt + d\mathcal{L}_{def}); \quad (B.35)$$

quindi, relativamente all'unità di massa, l'equazione dell'energia meccanica può essere posta nella forma:

$$d(\frac{1}{2}C^2) + gdz = d\mathcal{P}_m^{(eff)} \equiv d\mathcal{P}_m - (\mathcal{P}_d dt + d\mathcal{L}_{def}); \quad (B.36)$$

Se si moltiplicano ambo i membri di questa equazione per  $dm = \rho dV$  e si divide tutto per il tempuscolo  $dt$ , e si integra poi su tutto il volume, si ottiene (trascurando il termine legato all'energia potenziale del campo gravitazionale):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(\frac{1}{2}C^2) dV = \mathcal{P}_m - \left( \mathcal{P}_d - \int_V p(\text{div}\mathbf{v}) dV \right). \quad (B.37)$$



NOTA. Il termine integrale dipendente dalla divergenza della velocità può essere giustificato considerando la definizione della divergenza del campo della velocità:

$$\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \text{div}\mathbf{v} = \rho \frac{Dv}{Dt}; \quad (B.38)$$

in generale, la divergenza del campo della velocità in un punto misura la velocità di variazione dell'unità di volume della massa fluida nel punto medesimo. Trattando di unità di massa, la divergenza della velocità misura – in virtù della forma dell'EQ. (B.38) – la velocità di variazione dell'unità del volume specifico. Inoltre, tra densità e volume specifico è nota la relazione  $1 = \rho v$ .

Pertanto, si ha il seguente legame:

$$\frac{dm}{dt} d\mathcal{L}_{def} = \left( \frac{\rho dV}{dt} \right) \cdot (-p dv) = -p \rho \frac{Dv}{Dt} dV = -p(\text{div}\mathbf{v}) dV; \quad (B.39)$$

che integrata porge:

$$\int \frac{dm}{dt} d\mathcal{L}_{def} = - \int_V p(\text{div}\mathbf{v}) dV = - \int \dot{m} p dv \quad (B.40)$$

giustificando, quindi, il passaggio dall'EQ. (B.36) all'EQ. (B.37).

## B.2 L'equazione del moto

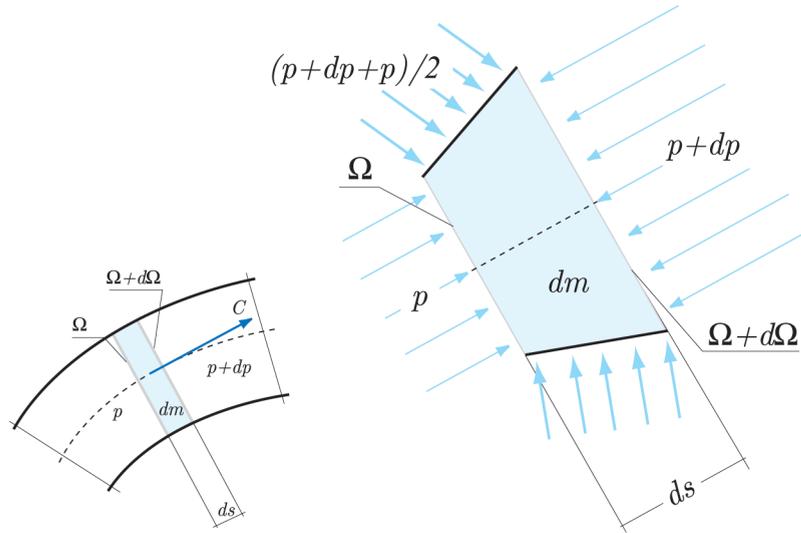
### B.2.1 Equazioni fondamentali

L'equazione del moto non è altro che l'applicazione della *seconda legge di Newton* ad una particella fluida; si tratta quindi di scrivere la relazione che indica l'equilibrio tra la forza agente  $d\mathbf{F}$  sulla particella e il prodotto della sua massa ( $dm$ ) per la sua accelerazione ( $\mathbf{a}$ ), cioè:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{a} dm. \quad (B.41)$$

**Figura B.2**

Risultante delle forze di pressione agenti su un volume infinitesimo di fluido.



Appendice

B

Il vettore  $d\mathbf{F}$  rappresenta necessariamente la risultante di *tutte* le forze agenti sulla massa  $dm$  che ne causano l'accelerazione  $\mathbf{a}$ , avente la stessa direzione di  $d\mathbf{F}$ .

Le forze che sono applicate ad una particella fluida sono essenzialmente di due tipi:

1. forze di superficie  $d\mathbf{F}_s$ ;
2. forze di massa  $\mathbf{g} dm$ .

Le forze di superficie, a loro volta, possono scindersi in due categorie di forze:

- forze di pressione  $d\mathbf{F}_{sp}$  (agenti normalmente sulla superficie della particella) e forze di taglio  $d\mathbf{F}_{st}$  (sollecitazioni tangenziali sulla stessa superficie, causa la viscosità del fluido).

Inoltre, se si tiene conto dell'effetto di eventuali macchine con elementi mobili immersi in seno al fluido, si può introdurre – almeno in linea di principio – una forza  $dm\mathbf{F}_{est}$  che tenga conto dell'effetto della macchina sul singolo elemento fluido.

Pertanto, l'EQ. (B.41) assume l'aspetto:

$$d\mathbf{F}_{sp} + d\mathbf{F}_{st} + \mathbf{g} dm + dm\mathbf{F}_{est} = \mathbf{a} \rho dV. \quad (\text{B.41}_a)$$



NOTA. La determinazione dell'entità delle forze superficiali, può essere effettuata valutando l'interconnessione tra sollecitazioni e deformazioni subite dalla particella a causa di queste.

**Forze di pressione.** Si consideri un tronco di corrente di forma generica infinitesima (vedere **Figura B.2**). La risultante delle forze di pressione lungo la direzione  $\mathbf{i}$  del moto porge (trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo):

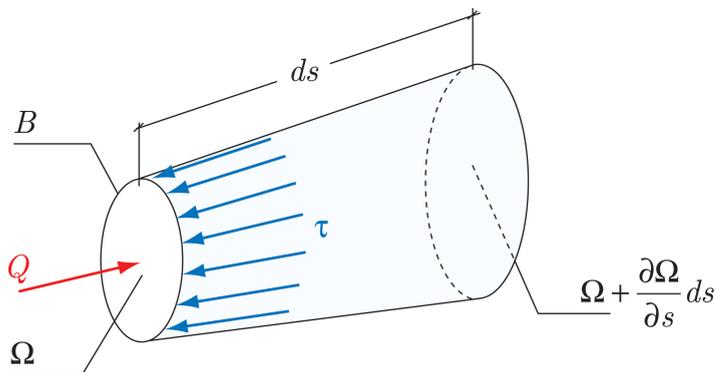
$$d\mathbf{F}_{sp} = \mathbf{i} p \Omega - \mathbf{i} (p + dp) \Omega; \quad (\text{B.42})$$

considerando, inoltre, che il volume del tronco infinitesimo di corrente fluida è esprimibile come  $dV = \Omega ds$ , essendo  $ds$  la lunghezza del tronco, si ha anche:

$$d\mathbf{F}_{sp} = -\mathbf{i} \Omega dp = -\mathbf{i} dV \frac{dp}{ds} = -dV \text{grad} p = -dV \nabla p; \quad (\text{B.43})$$

**Figura B.3**

Risultante della forza di taglio agente sulla superficie di un elemento fluido.  $B ds$  è la superficie laterale su cui agisce lo sforzo di taglio  $\tau$ .



**Forze di massa.** Per quanto riguarda la forza gravitazionale di massa, se si assume il senso positivo dell'asse  $z$  (quindi del versore  $\mathbf{i}_z$ ) verso l'alto e si indica con  $z$  la quota geodetica, si ha:

$$\mathbf{g} dm = -g \mathbf{i}_z dm = -dm \text{grad}(gz) = -dm \nabla(gz). \tag{B.44}$$

**Forze di taglio.** Per un generico tronco elementare di fluido, le forze di taglio agiscono sul contorno esterno e sono dirette in verso opposto al moto dell'elemento fluido. La risultante delle forze di taglio si calcola:

$$d\mathbf{F}_{st} = \tau B ds = \tau_m dm; \tag{B.45}$$

avendo introdotto il particolare vettore  $\tau_m \equiv \tau / \rho R$ , dipendente dalle caratteristiche del fluido ( $\tau; \rho$ ) e delle pareti ( $R = \Omega / B$ ). Essendo infatti  $R$  il raggio idraulico relativo al flusso dell'elemento fluido lungo  $ds$ .

Pertanto, avendo il vettore  $\tau_m$  stesso verso del vettore  $\tau$  – e quindi diretto sempre in verso contrario al moto dell'elemento fluido – la forza infinitesima associata a sforzi di taglio, si esprimerà:

$$d\mathbf{F}_{st} = \tau_m dm = \tau_m \rho dV; \tag{B.46}$$

essendo la massa infinitesima pari a  $dm = \rho dV$ .

**Equazione dinamica dell'equilibrio**

Ciò posto, l'equazione dinamica delle forze, applicata all'elemento fluido infinitesimo acquista la forma:

$$-dV \nabla p + \tau_m \rho dV - dm \nabla(gz) + dm \mathbf{F}_{est} = \mathbf{a} \rho dV; \tag{B.47}$$

che, semplificata, dà:

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \nabla p + \tau_m - \nabla(gz) + \mathbf{F}_{est} = \mathbf{a}} \tag{B.48}$$

**Equazione del moto**

Tale equazione può anche essere scritta in funzione della velocità  $\mathbf{C}$ :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \tau_m - \nabla(gz) + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{C}. \tag{B.49}$$

Appendice  
B



NOTA. L'equazione del moto può assumere veste diversa e talora più adeguata alla sua utilizzazione se si tiene conto del Primo Principio della Termodinamica, in forma entalpica:

$$Tds = di - \frac{dp}{\rho}, \quad (\text{B.50})$$

che si può scrivere<sup>(B.3)</sup>:

$$T\nabla S = \nabla i - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (\text{B.50}_a)$$

A questo punto, inglobando nell'equazione del moto l'equazione del I° Principio della Termodinamica, si ottiene:

$$T\nabla S - \nabla i + \boldsymbol{\tau}_m - \nabla(gz) + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{C}. \quad (\text{B.49}_a)$$

A questo punto, se si tiene conto dell'esistenza della relazione vettoriale:

$$\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{C} = \nabla \left( \frac{C^2}{2} \right) - \mathbf{C} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{C}),$$

l'equazione del moto assume la forma:

$$T\nabla S - \nabla i + \boldsymbol{\tau}_m - \nabla(gz) + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{C^2}{2} \right) - \mathbf{C} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{C}). \quad (\text{B.49}_b)$$

Riordinando i vari termini si può scrivere:

$$\mathbf{C} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{C}) + T\nabla S + \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \left( i + \frac{C^2}{2} + gz \right). \quad (\text{B.51})$$

**Entalpia totale (o di ristagno)**

A questo punto, se si introduce la funzione *entalpia totale* (o di *ristagno*):

$$i_T = i + \frac{C^2}{2} + gz \quad (\text{B.52})$$

si ottiene l'equazione:

$$\mathbf{C} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{C}) + T\nabla S + \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla i_T. \quad (\text{B.51}_a)$$

**Fluido incompressibile.** Nel caso in cui sia  $\rho = \text{cost}$ , l'equazione del moto può scriversi:

$$\mathbf{C} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{C}) - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \nabla(gz) + \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{C^2}{2} \right) \quad (\text{B.53})$$

e quindi:

$$\mathbf{C} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{C}) + \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{1}{2} \rho C^2 + gz \right); \quad (\text{B.54})$$

cioè:

(B.3) Se si divide ambo i membri dell'(B.50) per il percorso differenziale  $ds$ , si ottiene un'equazione in funzione dei gradienti delle varie grandezze rispetto la direzione  $s$ .

Con questa ipotesi, detto  $\mathbf{r}$  il raggio vettore del sistema assoluto ed  $\mathbf{r}'$  il raggio nel sistema relativo (solidale al rotore), detta  $\mathbf{W}$  la velocità relativa del punto considerato rispetto al sistema relativo,  $\mathbf{U}$  la velocità di trascinamento dello stesso punto dovuta al moto del sistema relativo, vale, come ben noto, la:

$$\mathbf{C} = \mathbf{W} + \mathbf{U} \tag{B.66}$$

che, con le ipotesi sopra poste, si può scrivere pure:

$$\mathbf{C} = \mathbf{W} + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') \tag{B.66_a}$$

con  $\boldsymbol{\omega}$  velocità angolare del sistema relativo. Inoltre, si scriverà pure:

$$\mathbf{C} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}'}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' . \tag{B.66_b}$$

L'accelerazione assoluta di una particella fluida è:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{C} ; \tag{B.67}$$

senza entrare nel merito della dimostrazione, si può dimostrare che esiste la seguente relazione vettoriale tra l'accelerazione assoluta  $\mathbf{a}$  e la velocità relativa  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \wedge \mathbf{r} + (\mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{W}) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W}) ; \tag{B.68}$$

dove:

- $2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W}$  è l'accelerazione complementare di Coriolis;
- $\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W})$  è l'accelerazione di trascinamento.

L'EQ. (B.68) consente la scrittura dell'equazione del moto in termini relativi. Infatti, sostituendo l'espressione di  $\mathbf{a}$  (in funzione della velocità relativa  $\mathbf{W}$ ) nell'equazione del moto assoluto (vedere a pag. XV, (EQ. B.48)) si ottiene:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{\tau}_m - \nabla(gz) + \mathbf{F}_{est} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \wedge \mathbf{r} + (\mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{W}) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W}) . \tag{B.69}$$

Tenendo conto del I° Principio della Termodinamica, e supponendo il caso di velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  costante in modulo (oltre che in direzione); valendo inoltre la:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W}) = -\nabla\left(\frac{\boldsymbol{\omega}^2 r^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{U^2}{2}\right),$$

si può scrivere l'equazione del moto in termini relativi in questa forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_{est} + T\nabla S + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{W}) = \\ = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla\left(i + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + gz\right). \end{aligned} \tag{B.70}$$

NOTA. Si è tenuto conto del fatto che sussiste la seguente relazione vettoriale:

$$\mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{W} = \nabla\left(\frac{W^2}{2}\right) - \mathbf{W} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{W}) .$$



**L'equazione dell'energia nel moto relativo.** Tralasciando i vari calcoli, si può dimostrare che dal punto di vista dell'osservatore solidale al rotore, l'equazione dell'energia assume la forma:<sup>(B.4)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{W^2}{2} \right) dt + di_{T_R} = dQ_{est}, \quad (\text{B.71})$$

in cui si è definita l'entalpia totale relativa:

$$i_{T_R} \equiv i + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + gz.$$

**Fluido  
incompressibile**

Analogamente, si può ricavare l'espressione dell'energia nel moto relativo per un fluido incompressibile, con la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{W^2}{2} \right) dt + d \left( \frac{p_{T_R}}{\rho} \right) = \boldsymbol{\tau}_m \cdot \mathbf{W} dt; \quad (\text{B.72})$$

dove si è posto:

$$p_{T_R} \equiv p + \frac{1}{2} \rho W^2 - \frac{1}{2} \rho U^2 + gz$$

la pressione totale relativa del fluido.

Nel caso di moto permanente e adiabatico, le ultime due equazioni si scrivono semplicemente:

$$di_{T_R} = 0 \quad (\text{B.71}_a)$$

$$d \left( \frac{p_{T_R}}{\rho} \right) = \boldsymbol{\tau}_m \cdot \mathbf{W} dt < 0. \quad (\text{B.72}_a)$$

La prima equazione esprime la costanza dell'entalpia totale relativa lungo la traiettoria della particella. Nel caso ci fosse una zona del campo di moto tutta attraversata da traiettorie, in cui è  $i_{T_R} = \text{cost}$ , allora l'EQ. (B.71\_a) risulta valida in tutto il campo.

L'EQ. (B.72\_a) mette in evidenza il fatto che, nel caso di moto stazionario e adiabatico di fluido incompressibile, la presenza degli attriti influiscono sul termine  $p_{T_R}/\rho$ .

(B.4) L'osservatore relativo, essendo solidale al rotore, afferma – dal suo punto di vista – che non ci sono elementi mobili in seno al fluido. Pertanto egli ritiene il termine  $L_{est}$  nullo.



# *Bibliografia*

- [1] *Acquedotti*; V. MILANO;
- [2] *Compressori ed Espansori Volumetrici*; ACTON, CAPUTO;
- [3] *Introduzione allo studio delle Macchine a Fluido*; ACTON, CAPUTO;
- [4] *Le Turbomacchine*; CARMELO CAPUTO;
- [5] *Manuale di Idronica*; CAZZANIGA;
- [6] *Termodinamica e trasmissione del Calore*; YUNUS A. ÇENGEL;
- [7] *Termotecnica; Edizioni MIR*;
- [8] *Turbine*; GIOVANNI MOLINARI;
- [9] *Turbomacchine*; G. A. PIGNONE, V. R. VERCELLI;
- [10] *Turbomacchine*; ACTON CAPUTO.

