



EUROCODES SPREADSHEETS STRUCTURAL DESIGN ©2014
di Carlo Sigmund. Tutti i diritti riservati.

Prima edizione: Gennaio 2018
Formato cartaceo: 18.91 x 25.59

Parte 2 - Cinematica e vorticità per fluidi newtoniani e stokesiani

Questi sono essenzialmente degli appunti personali riguardanti la cinematica e la vorticità dei fluidi, presentati in via del tutto generale. Parte di questo lavoro ha concentrato l'attenzione essenzialmente sulla caratterizzazione del moto dei fluidi secondo lo schema di fluido ideale alla Euler e alla conseguente schematizzazione dei potenziali delle grandezze vettoriali cinematiche di campo. Si è fatto perciò riferimento implicito a tutta la trattazione della cinematica dei fluidi, così come presentata nei testi di Meccanica dei Fluidi, ai quali si rimanda per migliori e più dettagliate delucidazioni.

Per sola comodità personale, si sono riportate succintamente, per quanto possibile, alcune premesse di tipo matematico riguardanti il calcolo vettoriale e tensoriale, quest'ultime in termini molto basilari.

Si spera che quanto riportato sia almeno di invito o incentivo alla consultazione di testi più completi e seri. Per quanto mi riguarda, rimettere ordine su vecchi pezzi di carta e appunti sparsi qua e là fra pagine di libri un po' da me dimenticati è stato piacevole e ancora una volta interessante.



Copia Parziale di valutazione (Novembre 2017)

Parte 2 - Cinematica e vorticità per fluidi newtoniani e stokesiani

Carlo Sigmund

Parte 2

Cinematica e vorticità dei **FLUIDI STOKESIANI e NEWTONIANI**



Carlo Sigmund

Acquista online su [Bookstore lulu.com](https://www.lulu.com)

Matematica & Ingegneria

Prima edizione

• Stampato •

EUROCODES SPREADSHEETS STRUCTURAL DESIGN
© 2014 di Carlo Sigmund. Tutti i diritti riservati.
Via Primo Maggio 28/3 - 33017 Tarcento (UD)
info.soft.sigmund@tiscali.it
<http://eurocodespreadsheets.jimdo.com/eurocodes-spreadsheets/>

Editore e autore: Carlo Sigmund

Foto in copertina: *Water Drop*
<http://www.desktop-background.com/wallpaper/water-drop-crown-hd-wallpapers-794607>

Decorazioni/Arts utilizzate: designed by Freepik, <http://www.freepik.com>
* * *

Prima edizione, gennaio 2018
Formato cartaceo

Sigmund, Carlo
Matematica e fisica nel dimensionamento strutture secondo Eurocodici e normativa italiana

Titolo del libro: Parte 2 - Cinematica e vorticità dei fluidi newtoniani e stokesiani - Matematica & Ingegneria Strutture; Progettazione; Eurocodici Strutturali CEN TC/250.

Nessuna parte del presente documento può essere riprodotta, memorizzata in un sistema che ne permetta l'elaborazione, né trasmessa in qualsivoglia forma e con qualsivoglia mezzo elettronico o meccanico, né può essere fotocopiata, riprodotta o registrata altrimenti, senza previo consenso scritto dell'editore, tranne nel caso di brevi citazioni contenute in articoli di critica o recensioni.

La presente pubblicazione contiene le opinioni dell'autore e ha lo scopo di fornire informazioni precise e accurate. L'elaborazione dei testi, anche se curata con scrupolosa attenzione, non può comportare specifiche responsabilità in capo all'autore e/o all'editore per eventuali, errori, refusi e/o inesattezze. L'autore detiene i diritti per tutti i testi, le tabelle e le illustrazioni contenute in questo documento.

Copia Parziale di valutazione (Novembre 2017)

Sommario

<i>Introduzione</i>	vii	<i>Moti con divergenza e rotore non nulli</i>	b-34
		<i>Il potenziale delle accelerazioni</i>	b-35
A. Alcune premesse sulla cinematica dei fluidi	a-1	C. La vorticità	c-1
A-1 <i>Descrizione lagrangiana ed euleriana</i>	<i>a-1</i>	C-1 <i>Teoremi sulla vorticità</i>	<i>c-1</i>
<i>Descrizione lagrangiana</i>	<i>a-1</i>	<i>Alcune premesse</i>	<i>c-1</i>
<i>Descrizione euleriana</i>	<i>a-2</i>	<i>Teorema di LAGRANGE: esistenza del potenziale del campo delle velocità</i>	<i>c-3</i>
<i>Il campo delle accelerazioni</i>	<i>a-4</i>	<i>Teorema di Kelvin</i>	<i>c-4</i>
A-2 <i>Visualizzare i campi di moto</i>	<i>a-10</i>	<i>Primo teorema di HELMHOLTZ</i>	<i>c-4</i>
<i>Linee di flusso</i>	<i>a-10</i>	<i>Secondo teorema di Helmholtz</i>	<i>c-6</i>
<i>Traiettorie</i>	<i>a-13</i>	<i>I moti baroclinici: non rispetto dei teoremi di HELMHOLTZ</i>	<i>c-8</i>
<i>Linee di fumo</i>	<i>a-14</i>	C-2 <i>Trattazione della distribuzione dei vortici in Aerodinamica</i>	<i>c-11</i>
<i>Linee di tempo</i>	<i>a-15</i>	<i>Distribuzione dei vortici</i>	<i>c-11</i>
A-3 <i>Rappresentazione grafica di un campo di moto</i>	<i>a-16</i>	<i>Ulteriori suddivisioni dei teoremi di Helmholtz</i>	<i>c-12</i>
<i>Profili</i>	<i>a-16</i>	<i>Superfici vorticide in aerodinamica</i>	<i>c-13</i>
<i>Mappe vettoriali</i>	<i>a-16</i>	<i>Teorema di Kutta e Joukowski</i>	<i>c-17</i>
<i>Isoinee (o curve di livello)</i>	<i>a-17</i>	<i>dedotto dalle equazioni dinamiche</i>	<i>c-17</i>
B. Analisi della cinematica dei fluidi	b-1		
B-1 <i>Tipi di moto e di deformazione degli elementi fluidi</i>	<i>b-1</i>		
<i>Le velocità di deformazione</i>	<i>b-1</i>		
<i>Il campo delle accelerazioni</i>	<i>b-15</i>		
<i>Equazione di bilancio della vorticità</i>	<i>b-17</i>		
B-2 <i>Descrizioni globali: i potenziali e i tipi di moto</i>	<i>b-19</i>		
<i>I potenziali di STOKES</i>	<i>b-19</i>		
<i>Potenziale scalare delle velocità</i>	<i>b-19</i>		
<i>Funzioni di corrente</i>	<i>b-23</i>		
<i>Moti irrotazionali e isocori</i>	<i>b-27</i>		
<i>Relazione geometrica fra superfici equipotenziati e di corrente</i>	<i>b-33</i>		

Introduzione

Questi sono essenzialmente degli appunti personali riguardanti la cinematica e la vorticità dei fluidi, presentati in via del tutto generale. Parte di questo lavoro ha concentrato l'attenzione essenzialmente sulla caratterizzazione del moto dei fluidi secondo lo schema di fluido ideale alla EULER e alla conseguente schematizzazione dei potenziali delle grandezze vettoriali cinematiche di campo. Si è fatto perciò riferimento implicito a tutta la trattazione della cinematica dei fluidi, così come presentata nei testi di Meccanica dei Fluidi, ai quali si rimanda per migliori e più dettagliate delucidazioni.

Per sola comodità personale, si sono riportate succintamente, per quanto possibile, alcune premesse di tipo matematico riguardanti il calcolo vettoriale e tensoriale, quest'ultime in termini molto basilari.

Si spera che quanto riportato sia almeno di invito o incentivo alla consultazione di testi più completi e seri. Per quanto mi riguarda, rimettere ordine su vecchi pezzi di carta e appunti sparsi qua e là fra pagine di libri un po' da me dimenticati è stato piacevole e ancora una volta interessante.



Ringrazio anticipatamente, e comunque, tutti Coloro i quali vorranno dedicare parte del loro tempo a qualche pagina di questi miei appunti.

Buona lettura, quindi.

Sezione A

Alcune premesse sulla cinematica dei fluidi

In questa e nelle successive sezioni viene riportata la trattazione teorica della schematizzazione della cinematica dei fluidi nello schema generale di fluido stokesiano (e quindi anche nella sua particolarizzazione newtoniana, dal punto di vista appunto del legame lineare sforzi-velocità di deformazione).

La *cinematica* si occupa dello studio del moto prescindendo dalle cause che lo determinano. La cinematica dei fluidi studia, quindi, il moto dei fluidi e il moto in cui è possibile descrivere tale moto. Il primo, e più familiare, è quello che consiste nel seguire il percorso della singola (generica) particella fluida misurandone in ogni punto e in ogni istante i valori di velocità e accelerazione assunti: *metodo lagrangiano*; la seconda è quella di definire delle sezioni di controllo (fisse rispetto ad un riferimento comunque scelto) su cui si vanno a misurare i valori locali della velocità e dell'accelerazione, in funzione dello spazio e del tempo, che il fluido presenta al procedere del suo moto: *metodo euleriano*.⁽ⁱ⁾

A-1

DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA

In questo capitolo vengono ricordati alcuni concetti di cinematica di particolare importanza nello studio del moto dei fluidi e si esaminano i diversi modi con cui è possibile visualizzare il campo di moto. Viene ricordata l'operazione di derivazione totale (o sostanziale) della quale viene illustrato il ruolo nella trasformazione delle equazioni di bilancio dalla descrizione *lagrangiana* (che studia il moto di una singola particella fluida studiata come punto materiale dotata di velocità e accelerazione) a quella *euleriana* (che studia l'evolversi del moto rispetto a dei punti di riferimento fissi nel tempo e nel dominio, e che quindi riguarda il campo di moto e le relative grandezze di campo, quali velocità e accelerazioni locali).

Descrizione lagrangiana

Come anticipato, la descrizione lagrangiana consiste (in generale) nel seguire materialmente il percorso dei singoli oggetti studiati (ad es. punto materiale, baricentro geometrico di un oggetto, particella fluida elementare, etc.). Un caso spesso menzionato nei testi di Fisica è il moto di una palla da biliardo che colpisce un'altra palla o le sponde. Tale tipo di moto, infatti, può essere notoriamente descritto mediante le leggi di Newton che permettono di prevederne con esatta precisione (salvo, l'effetto più o meno trascurabile degli attriti volventi, per strisciamento o per resistenza dell'aria) il percorso, gli scambi di quantità di moto e di energia cinetica con gli altri oggetti interagenti. La soluzione del problema così posto implica la determinazione del vettore posizione e del vettore velocità di ciascun oggetto

(i) In questo caso, le funzioni di velocità e pressione (come anche, più in generale, le variabili di densità, pressione e temperatura) si definiscono quali "variabili di campo", appunto perché sono suscettibili di misurazione "immergendo" nel particolare punto di riferimento x (e in un certo istante t) del dominio una sonda (ad esempio, un termometro, un misuratore statico di pressione o un misuratore di velocità).

avendo esplicitato con $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_k v_k(\mathbf{x}, t)$ i tre versori degli assi cartesiani coordinati per esprimere il vettore velocità nel particolare punto $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ e quindi nel generico istante di tempo t . La scrittura, secondo la *notazione degli indici ripetuti*, è equivalente a questa ben nota (sommando sull'indice ripetuto *k-esimo*):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_k v_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_x v_x(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_y v_y(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_z v_z(\mathbf{x}, t).$$

Allo stesso identico modo, viene definito la variabile di campo dell'accelerazione:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_k a_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_x a_x(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_y a_y(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_z a_z(\mathbf{x}, t)$$

notoriamente “derivata” dalla funzione di campo velocità mediante l'operazione di derivata sostanziale (i versori degli assi coordinati si assumono implicitamente fissi rispetto a un sistema di riferimento comunque scelto):

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_x \frac{D}{Dt} v_x(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_y \frac{D}{Dt} v_y(\mathbf{x}, t) + \mathbf{i}_z \frac{D}{Dt} v_z(\mathbf{x}, t).$$

Tali variabili (cinematiche) di campo (vettoriali) verranno quindi indicati anche come:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \equiv \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z = \mathbf{i}_k v_k$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \equiv \mathbf{i}_x a_x + \mathbf{i}_y a_y + \mathbf{i}_z a_z = \mathbf{i}_k a_k.$$

Variabili di campo e descrizione euleriana. Con la descrizione euleriana tutte queste variabili di campo risultano definite in ciascun punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z, t)$ e quindi anche per ciascun istante di tempo t considerato. Con l'approccio euleriano non ci si preoccupa, né si può avere conoscenza, di ciò che accade alle singole particelle di fluido ma si possono solo determinare i valori che assumono le variabili di campo (quali ad esempio, la pressione, la temperatura, la velocità e l'accelerazione, etc.) in un determinato punto o sezione (di controllo) e in un determinato istante.

In sostanza, la definizione delle variabili di campo unitamente alla descrizione euleriana del moto, consentono di studiare completamente il moto del fluido nel suo insieme analizzando solo gli “effetti di confine” esistenti e misurati sul contorno esterno del volume di controllo, prescindendo (almeno per i casi stazionari/permanenti) da tutto ciò che accade nei punti interni del volume di controllo fissato. Quest'ultima precisazione è di fondamentale importanza perché permette operativamente di affrontare problemi comunque complessi che, sotto opportune ipotesi e scelte, possono essere completamente studiati facendo attenzione ai soli fenomeni che avvengono su particolari porzioni della frontiera dei volumi di controllo, potendo così ignorare completamente ciò che accade al loro interno.

Differenze tra i due approcci. La differenza tra i due approcci descrittivi è più chiara se si pensa di voler osservare le proprietà di un corso d'acqua. Con l'approccio *lagrangiano*, l'osservatore (o lo strumento di misura) si muove verso valle con la corrente. Con l'approccio euleriano, l'osservatore (o lo strumento di misura) rimane fermo rispetto alla sponda.

Nella maggior parte dei problemi pratici non interessa infatti conoscere le vicissitudini di ogni singola particella ma, piuttosto, la descrizione di insieme del moto e quindi i valori che assumono in generale la pressione, la velocità, la temperatura, etc., in punti e in istanti particolari. Pertanto, la descrizione euleriana è quella che si presta meglio allo studio di tali

➡ IMPORTANTE

problematiche. Per esempio, in una galleria del vento, le sonde di pressione e di velocità sono di solito sistemate in posizioni fisse rispetto al moto della corrente.

Per poter seguire l'approccio *euleriano* è necessario riscrivere opportunamente le usuali equazioni di bilancio e soprattutto del moto che seguono nativamente l'approccio *lagrangiano* (si pensi, ad esempio, alla nota legge di NEWTON sul bilancio della quantità di moto).

Il campo delle accelerazioni

Se si dovesse (o volesse) seguire una particolare particella di fluido mentre si muove in una corrente, si userebbe la descrizione *lagrangiana* e le equazioni del moto potrebbero essere applicate direttamente. Per esempio, la posizione nello spazio di una particella sarebbe definita in termini di coordinate:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \equiv \mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z = \mathbf{i}_k x_k$$

mediante le funzioni seguenti:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

del punto $\mathbf{x}$ raggiunto dalla particella al generico istante di tempo t . Quando, invece, sia opportuno adottare la descrizione *euleriana*, è necessario utilizzare formalismi differenti che facciano riferimento appunto alle sole variabili di campo (come definite più sopra).

Si consideri, ad esempio, la seconda legge di Newton (bilancio della quantità di moto) applicata al baricentro della generica particella fluida (quindi considerata, dal punto di vista cinematico e dinamico) come un punto materiale nello spazio del dominio:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \frac{D}{Dt} \mathbf{v}$$

secondo la quale, la risultante (vettoriale) delle forze agenti (e passanti per il baricentro geometrico G) sulla particella di fluido è pari al prodotto della sua massa per la sua accelerazione. Per definizione, l'accelerazione di una particella di fluido è appunto la derivata sostanziale della sua velocità (nel punto e nell'istante di tempo considerati):

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_k \frac{D}{Dt} v_k(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A-1})$$

IMPORTANTE

Tuttavia, poiché la generica particella fluida si muove con il fluido di cui fa parte, la velocità della particella stessa deve essere identica (coincidente, per l'esattezza) a quella che assume il campo delle velocità del fluido nel punto di coordinate $\mathbf{x}$ in cui si trova a transitare la suddetta particella proprio in quell'istante t . In altre parole:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv (v_x, v_y, v_z) = [v_x(t), v_y(t), v_z(t)].$$

Nello sviluppare la derivata sostanziale nella (A-1) bisogna quindi considerare che la variabile dipendente $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ risulta funzione di quattro variabili dipendenti t ; $x = x(t)$; $y = y(t)$ e $z = z(t)$, per cui in virtù della definizione di *differenziale totale esatto* della funzione vettoriale $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ si scriverà:

$$d\mathbf{v}(x, y, z, t) = d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz \right). \quad (\text{A-2})$$

IMPORTANTE

Poiché la particella fluida si muove solidalmente con la corrente fluida (di cui evidentemente fa parte integrante), i rapporti differenziali dx/dt , dy/dt e dz/dt devono necessariamente

Moltiplicando infatti entrambi i membri di ciascuna delle espressioni dei differenziali totali delle componenti del campo delle velocità per il corrispondente versore, si ottengono le seguenti relazioni vettoriali:

$$\mathbf{i}_x dv_x = \mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \left(\mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right) \quad (\text{A-13})$$

$$\mathbf{i}_y dv_y = \mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial t} dt + \left(\mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) \quad (\text{A-14})$$

$$\mathbf{i}_z dv_z = \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial t} dt + \left(\mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right). \quad (\text{A-15})$$

Sommando poi queste tre equazioni vettoriali membro a membro, si ottiene:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \mathbf{i}_x dv_x + \mathbf{i}_y dv_y + \mathbf{i}_z dv_z = \mathbf{i}_k dv_k \\ &= \mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial t} dt + \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial t} dt + \\ &\quad + \left(\mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \mathbf{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right) + \\ &\quad + \left(\mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \mathbf{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) + \\ &\quad + \left(\mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right). \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

Potendo portare i versori dei tre assi coordinati (supposti fissi) all'interno delle operazioni di derivazione parziale, si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z)}{\partial x} dx + \\ &\quad + \frac{\partial (\mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z)}{\partial y} dy + \\ &\quad + \frac{\partial (\mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z)}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

coincidente con la già vista (A-2). Stante infatti la definizione (A-9), si scriverà in maniera più concisa per la generica componente k -esima della velocità $\mathbf{v}$:

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} dt + dx_i (\text{grad} \mathbf{v})_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial t} dt + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{A-18})$$

e quindi la relativa derivata sostanziale della componente k -esima di velocità:

$$\frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i (\text{grad} \mathbf{v})_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (\text{A-19})$$



dove l'unico termine con indici ripetuti è quello a III membro, per cui si fissa k e si somma sull'indice i -esimo. In termini vettoriali, queste ultime relazioni assumono l'aspetto compatto rispettivamente:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + d\mathbf{x} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \quad (\text{A-20})$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \quad (\text{A-21})$$

Il primo termine a II o a III membro della:

$$\frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i (\text{grad} \mathbf{v})_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (\text{A-26})$$

è chiamato *accelerazione locale* ed è diverso da zero solo quando il moto è vario. Il secondo termine è chiamato quindi *accelerazione convettiva* e può essere diverso da zero anche quando il moto è permanente, cioè un moto durante il quale in ciascun punto del campo le grandezze caratteristiche di esso non variano nel tempo. L'accelerazione convettiva tiene conto del fatto, nell'intervallo di tempo dt , la particella si sposta (moto di convezione) in una nuova posizione dove, in generale, la velocità è localmente diversa (se, in particolare, il moto è permanente i valori locali non mutano nel tempo: derivata parziale rispetto al tempo identicamente nulla).

Si consideri infatti l'efflusso permanente di acqua da un ugello di un tubo da giardino: per la diminuzione della sezione allo sbocco, la velocità dell'acqua all'uscita è maggiore di quella che scorre a monte nel tubo. Le particelle fluide, lungo la traiettoria dal tubo allo sbocco in atmosfera, evidentemente accelerano, anche se il moto è permanente. In questo caso, infatti, l'accelerazione è diversa da zero a causa dei soli fenomeni convettivi (che nel caso di un liquido o un fluido incompressibile⁽ⁱⁱⁱ⁾ sono dovuti a sole variazioni della sezione di transito della portata massica: tubi, o tronchi di tubo, divergenti o convergenti).

Si osservi che, mentre il moto è (localmente) permanente rispetto a un punto fissato x nell'approccio *euleriano*, esso non è permanente rispetto all'altro approccio *lagrangiano* dove, rispetto ad un sistema di riferimento comunque scelto, la particella fluida si vede muovere come un punto materiale nello spazio allo scorrere del tempo.



ESEMPIO A-1



Accelerazione di una particella fluida attraverso un ugello di scarico

Si consideri un ugello di scarico (quindi un tronco di tubazione convergente) di lunghezza $L = 0,10$ m, avente diametro della sezione di entrata $D_{\text{in}} = 10$ cm e diametro della sezione di uscita $D_{\text{out}} = 0,5$ cm da cui effluisce una portata (volumetrica) liquida di $Q_v = 0,05$ l/s. Calcolare l'accelerazione (media) di una particella di fluido che si muova lungo la traiettoria coincidente con l'asse dell'ugello stesso. Si impieghi sia l'approccio lagrangiano sia l'approccio euleriano. Il moto sia permanente, e si assuma l'asse delle x coincidente con l'asse s dell'ugello individuato dal versore $\hat{s}$.

Soluzione

Il moto è permanente: è nulla l'accelerazione locale ma non l'accelerazione convettiva. Pertanto, la formulazione generale (A-26), si riduce alla:

$$\frac{Dv_k}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial t}}_{=0} + v_i (\text{grad} \mathbf{v})_{ik} = \underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial t}}_{=0} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Poiché il moto convettivo si svolge lungo la sola direzione individuata dal versore $\hat{s}$ (imposto coincidente con l'asse $x_1 = x$), quest'ultima relazione non può che presentare gli indici in questo modo: $i = k = 1$ (ovvero "1" per asse $x_1 = x$). Di conseguenza, è:

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \Rightarrow \boxed{a = \frac{Dv}{Dt} = v \frac{\partial v}{\partial s}} \quad (\text{A-27})$$

(iii) Efflussi con numero di MACH < 0,3.

avendo indicato con a e con v direttamente i moduli rispettivamente dell'accelerazione e della velocità della particella fluido nel suo moto rettilineo (lungo l'asse s).

Approccio lagrangiano. Secondo la consueta definizione di accelerazione (media) di punto materiale, si ha:

$$a_x \cong \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Rightarrow a \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\text{out}} - v_{\text{in}}}{(L/\bar{v})} = \frac{(v_{\text{out}} + v_{\text{in}})(v_{\text{out}} - v_{\text{in}})}{2L} = \frac{v_{\text{out}}^2 - v_{\text{in}}^2}{2L}$$

dove l'intervallo di tempo Δt è stato misurato in termini di rapporto fra la lunghezza longitudinale L del diffusore e la velocità media $\bar{v}$ lungo il diffusore stesso (pari quindi alla media aritmetica delle velocità del liquido in uscita e in entrata al diffusore).^(iv)

Approccio euleriano. Secondo l'approccio euleriano è possibile misurare l'accelerazione di un punto materiale in movimento (quindi, in particolare, una particella fluida) mediante l'espressione (appunto euleriana) della derivata sostanziale del campo delle velocità che si è visto, in questo particolare caso, ridursi alla forma (A-27). Sostituendo, si ha:

$$a = \frac{Dv}{Dt} = v \frac{\partial v}{\partial s} \cong \bar{v} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{(v_{\text{out}} + v_{\text{in}})(v_{\text{out}} - v_{\text{in}})}{2L} = \frac{v_{\text{out}}^2 - v_{\text{in}}^2}{2L}$$



ottenendo, quindi come previsto, il medesimo risultato.

È appena il caso di osservare che, nel caso di moto permanente (o stazionario) lungo la traiettoria descritta dalla distanza “ s ” (da una sezione s_0 assunta di partenza), l'accelerazione (media) della particella è misurata anche dal valore (medio) del gradiente (convettivo) della sua energia cinetica fra le due sezioni di estremità scelte (appunto “in” e “out”):

$$a = v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cong \frac{\Delta(v^2/2)}{\Delta s} = \frac{(v_{\text{out}}^2/2) - (v_{\text{in}}^2/2)}{L} = \frac{v_{\text{out}}^2 - v_{\text{in}}^2}{2L}.$$

Sostituendo i valori numerici, tenendo conto delle definizioni di portata volumetrica:

$$v_{\text{out}} = \frac{Q_v}{A_{\text{out}}} = \frac{(0,05 \text{ ls}^{-1})(10^{-3} \text{ m}^3 \text{ l}^{-1})}{\pi(0,010 \text{ m})^2/4} = 0,64 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_{\text{out}} = \frac{Q_v}{A_{\text{out}}} = \frac{(0,05 \text{ ls}^{-1})(10^{-3} \text{ m}^3 \text{ l}^{-1})}{\pi(0,005 \text{ m})^2/4} = 2,55 \text{ ms}^{-1}$$

si calcola il valore in modulo dell'accelerazione (media) lungo il convergente:



$$a \cong \bar{v} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_{\text{out}}^2 - v_{\text{in}}^2}{2L} = \frac{(2,55 \text{ ms}^{-1})^2 - (0,64 \text{ ms}^{-1})^2}{2(0,10 \text{ m})} \cong 30,5 \text{ ms}^{-2}$$

pari a quasi il triplo dell'accelerazione di gravità ($g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$).

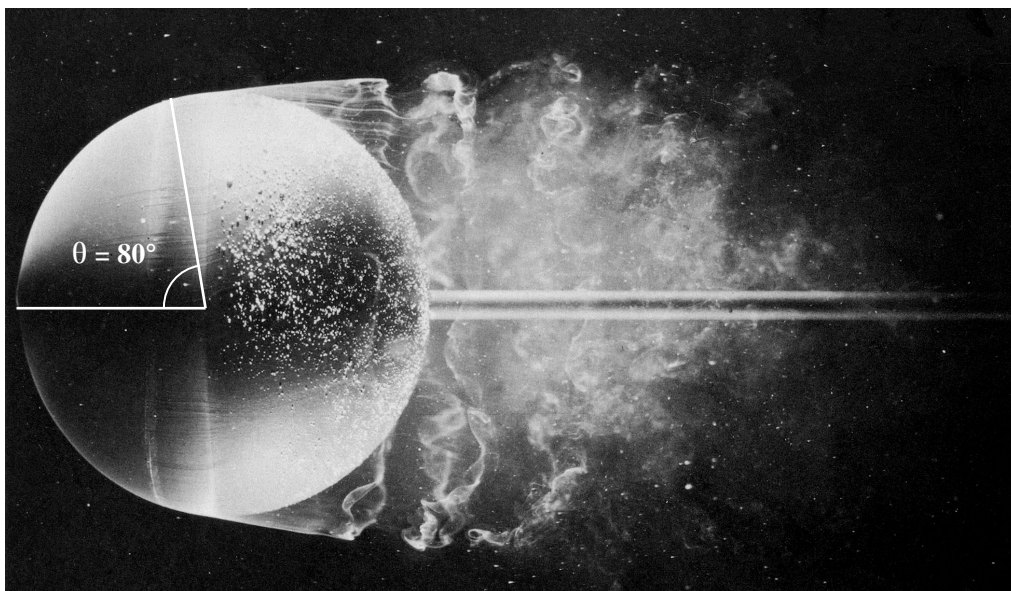
(iv) Il volume utile del diffusore è stato quindi assunto quale “volume di controllo”.

Figura A-1

Flusso liquido
attorno ad una sfera
in prossimità del
numero di REYNOLDS
15000.

FONTE:

Dal libro: "An Album
of Fluid Motion," di
MILTON VAN DYKE, The
Parabolic Press.



A-2 **VISUALIZZARE I CAMPI DI MOTO**

La visualizzazione del campo di moto, cioè l'esame visivo delle caratteristiche del moto è di grande utilità nella comprensione non solo dei fenomeni indagati sperimentalmente, ma anche di quelli studiati dal punto di vista numerico con i metodi della fluidodinamica computazionale. Infatti, una delle prime cose che si fa, dopo aver ottenuto una soluzione numerica di un campo di moto, è quella di visualizzare in qualche modo le caratteristiche del flusso tramite immagini, mappe di isovelocità o fotografie (istantanee).

Esistono molte tecniche di visualizzazione di campi di moto, sia sperimentali sia numeriche. Nelle istantanee di foto, ad esempio, si riesce a rappresentare una quantità discreta di informazioni visive che altrimenti sarebbe difficile cogliere diversamente alla vista.

Nella foto in alto è rappresentata una sfera liscia investita da una corrente liquida: flusso istantaneo per numero di REYNOLDS $Re = 15000$. Punto di distacco si ha per $\theta \cong 80^\circ$ (misurato dal punto di ristagno): confine laminare, fino all'equatore circa, che lo separa da quello turbolento. Diventa quindi instabile e rapidamente il moto si trasforma in turbolento completamente sviluppato (con evidenti scie di vortici a valle).

Linee di flusso

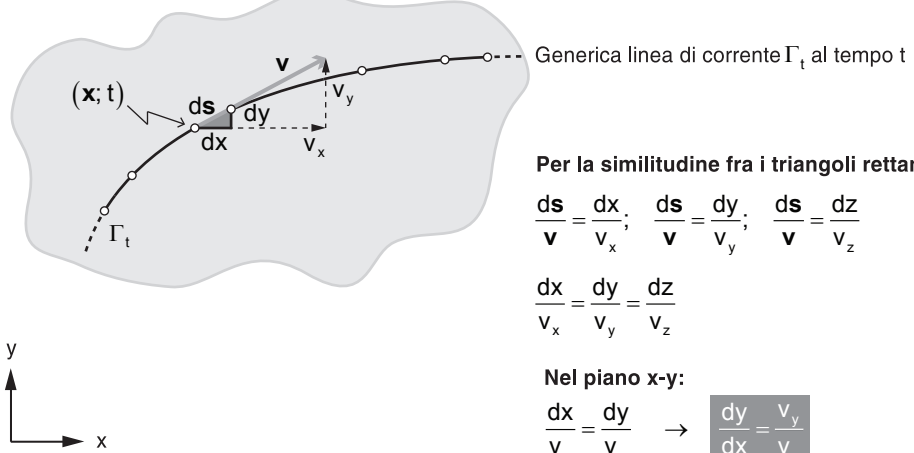
Le *linee di flusso* (o anche *linee di corrente*) rappresentano un'istantanea delle direzioni di flusso del moto, nei vari punti del campo. Fissato, ad esempio, un istante di tempo t (immaginando teoricamente di poter "congelare" il moto per qualche istante), e individuata così un'arbitraria linea di flusso Γ_t , si otterrebbe la rappresentazione istantanea di una linea nello spazio, dove la tangente in uno qualsiasi x dei suoi punti individua la direzione della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ della particella fluida che all'istante t si trova a transitare proprio per x . Quella stessa particella che, generalizzando per un moto vario, andrà nell'istante immediatamente successivo a far parte dell'insieme dei punti di una diversa linea di corrente. In generale, infatti, le linee di flusso sono linee che variano la loro forma, nello spazio del dominio, in funzione del tempo. Fissato, ad esempio, un tempo iniziale t_0 e una singola linea di flusso Γ_{t_0} – in altre parole "scattata" una fotografia al flusso – questa presenterà

Figura A-2

Tratto elementare di linea di flusso (o di corrente) in un dato istante t del moto.
Velocità locale in x al tempo t .

Vettore velocità tangente in x al tempo t : $\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y$

Tratto elementare di linea di corrente in x al tempo t : $d\mathbf{s} = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy$



una certa forma nello spazio. Trascorso un intervallo di tempo qualsiasi $t = t_0 + \Delta t$, la stessa linea di flusso (immaginando di fare un'ulteriore "scattata" dopo Δt) presenterà in generale una differente curva Γ_t nello spazio. Sperimentalmente, infatti, le linee di flusso non possono essere osservate direttamente, tranne che nel caso in cui il moto è permanente (o stazionario) per cui, al trascorrere del tempo, le curve delle linee di corrente nello spazio permangono immutate nella forma (rimanendo quindi coincidenti fra due istanti qualsiasi: $\Gamma_{t_0} \equiv \Gamma_t$).



Benché quindi l'insieme delle linee di corrente si modifichi al passare del tempo, tali linee tracciate con riferimento ad un dato momento t si presentano distinte fra di loro, giungendo ad intersecarsi solo in corrispondenza dei *punti di ristagno* (dove la velocità si annulla costantemente, o anche momentaneamente).^(v)

Pertanto, le particelle fluide che si trovano su una linea di corrente all'istante considerato sono animate da velocità dirette lungo la linea stessa e le loro traiettorie sono quindi ad essa tangenti. Inversamente, la linea di corrente deve quindi risultare come l'involuppo di tutte le traiettorie delle particelle fluide che in quel dato momento t le appartengono. Si consideri ora, lungo una linea di flusso Γ_t , un tratto di curva elementare $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} ds = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz = \mathbf{i}_k dx_k$; per definizione di linea di flusso, il versore locale $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t)$ deve essere parallelo al vettore della velocità locale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ nel medesimo punto $\mathbf{x}$ e istante t di moto.

Per la similitudine di triangoli rettangoli nel piano (si veda schema in Figura A-1), per un moto bidimensionale si ha l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}. \quad (\text{A-28})$$

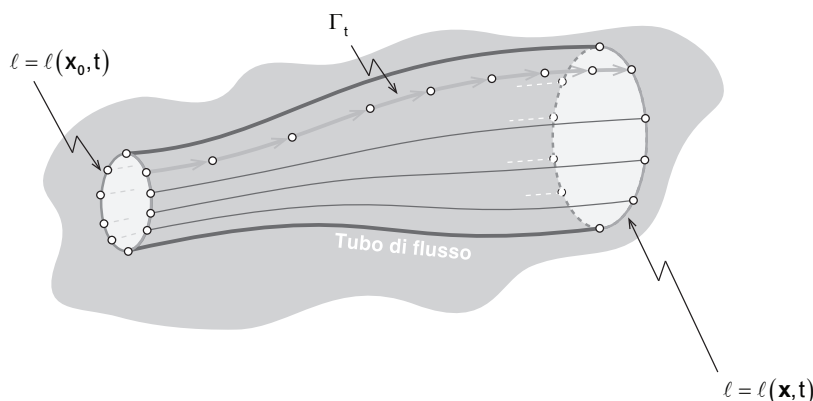
Questa equazione può essere risolta analiticamente solo in qualche semplice caso; in generale, viene risolta mediante metodi numerici. In entrambi i casi, compare una costante di

(v) Le linee di corrente, nel caso generale di moto vario, variano di forma al trascorrere del tempo e, pertanto, varieranno anche le posizioni di eventuali punti di arresto della corrente (detti, appunto, punti di ristagno).

Figura A-3

Linee di flusso e tubo di flusso al generico istante di tempo t .

NOTA: evidenziate alcune particelle fluide che si trovano sulla superficie del tubo di flusso nella forma assunta dalle relative linee di corrente all'istante di tempo t .



integrazione arbitraria, per cui le linee di flusso del campo di un moto piano sono rappresentate dalla famiglia (generale) di curve che soddisfa la (A-28).

Tubo di flusso. L'insieme di quelle linee di flusso passanti per i punti di una qualunque linea chiusa ℓ nello spazio, che non sia essa stessa una linea di flusso, formano una superficie tubolare che in ogni punto, per definizione di linea di flusso, è tangente al vettore velocità in quel punto. Tale superficie, quindi, prende il nome di *tubo di flusso* e le sue pareti risultano impermeabili al flusso del moto del fluido (schema in Figura A-3).

Conseguentemente, in un tubo di flusso il fluido rimane sempre all'interno di esso e non può attraversarne il contorno. Sia le linee di flusso sia i tubi di flusso stessi sono definiti in un certo istante di tempo in funzione del campo delle velocità in quell'istante. Nel moto vario, l'andamento delle linee di flusso (e quindi i tubi di flusso stessi) possono variare sensibilmente di forma nel tempo.

ESEMPIO A-2

Linee di flusso nel piano xy

Sia dato un campo di velocità permanente bidimensionale (nel piano $x-y$) espresso da:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \mathbf{i}_x(0,5 + 0,8x) + \mathbf{i}_y(1,5 - 0,8y) \quad (\text{A-29})$$

e, per la definizione di equazione della famiglia delle relative linee di flusso (si veda la (A-28)), si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0,5 + 0,8x}{1,5 - 0,8y} \Rightarrow \frac{dy}{1,5 - 0,8y} = \frac{dx}{0,5 + 0,8x}. \quad (\text{A-30})$$

Tracciare parte delle linee di flusso del campo.

Soluzione

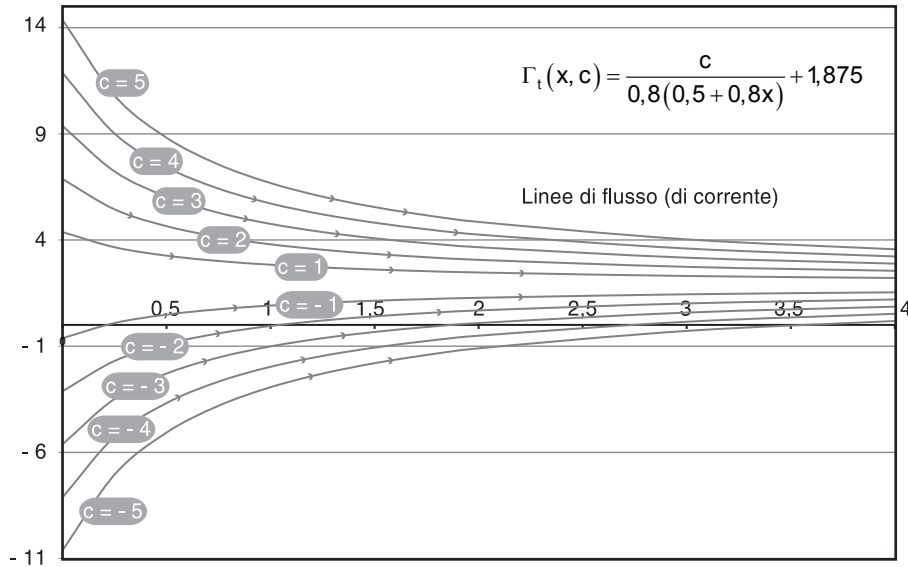
Integrando la (A-30), avendo già separato le variabili, si ottiene:

$$y = y(x, c) = \frac{c}{0,8(0,5 + 0,8x)} + 1,875 \quad \text{con } c \text{ costante d'integrazione.}$$

Questa funzione $y = y(x, c)$ rappresenta la famiglia delle infinite linee di flusso del campo di moto definito dalla (A-27), dove per mezzo della costante d'integrazione "c" andran-

Figura A-4

Linee di flusso del
campo delle velocità
(Esempio A-2).



no assegnati valori diversi per ciascuna linea di flusso. Si nota immediatamente che il fluido oltre ad essere permanente per ipotesi è anche incompressibile, risultando per quest'ultima condizione nulla la divergenza del campo delle velocità $\mathbf{v}$ del moto piano:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0,8 - 0,8 = 0.$$

Assegnando valori simmetrici della costante di integrazione c , e considerando ad esempio i valori positivi della variabile x , si ottengono le linee di flusso disegnate in figura, che comunque appartengono alla famiglia definita dalla (A-30).

Si nota dalla struttura stessa della (A-29) che dove le linee di corrente si restringono l'una vicina all'altra l'entità del modulo della velocità aumenta. Infatti, nel caso analizzato, fissando un valore di y compreso fra -1 e 4 e all'aumentare del valore di x , la componente della velocità v_y si attesta attorno ad un valore pressoché costante e sempre più trascurabile rispetto al valore dell'altra componente lungo v_x che tende evidentemente ad aumentare all'aumentare di x .

Ciò può anche essere spiegato col fatto che le linee di corrente relative ai due valori della costante c pari a -5 e $+5$ costituiscono un tubo di flusso che, restringendosi, deve aumentare al suo interno il valore delle velocità per mantenere costante la portata volumetrica del liquido in moto (in transito da sinistra verso destra). Le velocità del moto risulteranno infatti ovunque tangenti alle linee di flusso. Le linee di flusso, in generale, potranno intersecarsi solo nei punti di ristagno dove la velocità è nulla per definizione.



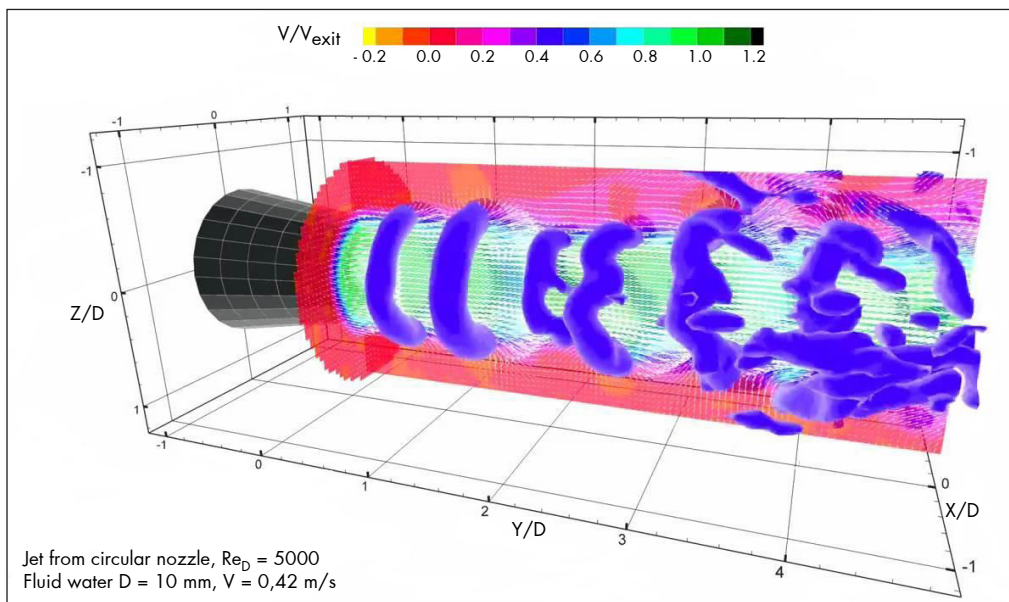
Traiettorie

Una *traiettoria* è il percorso realmente effettuato da una particella di fluido in un certo intervallo di tempo. Il concetto di traiettoria è un concetto lagrangiano, poiché la traiettoria coincide semplicemente con il percorso di una singola particella di fluido mentre si muove nel campo del moto. Di conseguenza, una traiettoria è individuata dall'insieme delle co-

Figura A-5

Tomografia PIV
(particle image
velocimetry) eseguita
per ugello di scarico
di jet nell'acqua
(Numero di REYNOLDS
 $Re = 5000$).

Fonte: <http://mavlab.tudelft.nl/>



ordinate $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ dei punti tracciati dalla particella fluida, uno di seguito all'altro, mentre si muove nel campo del moto. Per visualizzare una traiettoria, basta marcare una particella fluida in qualche modo – colore o luminosità – così da poterla facilmente distinguere dalle particelle che la circondano.

Fotografando il fluido in moto con una macchina fotografica il cui otturatore venga lasciato aperto per un certo periodo di tempo, si noterà impressa la traccia del percorso compiuto dalla particella, cioè la sua traiettoria appunto.

Sul rilievo di un breve tratto di traiettoria si basa ad esempio una moderna tecnica, chiamata PIV (*particle image velocimetry*), utilizzata per la misura del campo della velocità in un piano all'interno della corrente, o più recentemente, anche nelle tre dimensioni. Nella figura di seguito una simulazione tomografica della PIV con l'ausilio del computer.

Per un campo di velocità noto, le traiettorie possono anche essere calcolate mediante metodi numerici. In particolare, la posizione raggiunta all'istante generico t di una particella di tracciante che all'istante iniziale t_i occupa la posizione $\mathbf{x}_i$ è:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_i(t) + \int_{t_i}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt.$$

Questa equazione può infatti essere integrata analiticamente per alcuni campi di moto molto semplici. Per moti più complessi, bisogna procedere con un'integrazione numerica.

Se il campo di velocità è permanente (o stazionario), le singole particelle di fluido si muovono lungo le linee di flusso. Nel caso di moto permanente, quindi, traiettorie e linee di flusso (o di corrente) coincidono in ogni istante di tempo.

Linee di fumo

Una linea di fumo è il luogo delle particelle fluide che sono passate in sequenza in uno stesso punto del campo del moto. Le linee di fumo (o di emissione) sono le linee prodotte più spesso nelle indagini sperimentali. Inserendo in una corrente un tubicino dal quale fuo-

riesca un filetto continuo di tracciante (liquido colorato in acqua o fumo in aria), si osserva una linea che è una *linea di fumo*.

In generale, in condizioni di moto vario, la linea di fumo non è la traiettoria tracciata da una singola particella, seguita a partire da un certo punto iniziale. Questo semplicemente perché la traiettoria tracciata da una singola particella, per quanto articolata nello spazio, una volta tracciata, rimane immutata per definizione stessa di traiettoria (traccia luogo dei punti attraversati durante il moto da un punto iniziale a un altro nell'intervallo di tempo considerato).

Una linea di fumo, dopo un intervallo finale di tempo pari a $\Delta T + t_0$, può essere considerata come linea continua d'integrazione di tutte le posizioni occupate all'istante t da tutte le particelle transitate nel punto fisso iniziale x_0 nell'intervallo di tempo ΔT in esame. Indicata pertanto con $\mathbf{x}(t|t_0)$ la posizione al tempo t della generica particella marcata al tempo t_0 (cioè, passante per $\mathbf{x}_0$), allora per $t \in [t_0; t_0 + \Delta T]$ se si desidera calcolare le posizioni occupate nell'istante finale $t_0 + \Delta T$ da tutte (e solo quelle) particelle che sono transitate per $\mathbf{x}_0$ (punto di controllo e di emissione), si dovrà formalmente scrivere:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t|t_0) = \mathbf{v}[\mathbf{x}(t|t_0), t] & \text{per } t \in [t_0; t_0 + \Delta T], \\ \mathbf{x}(t_0|t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

risultando la linea di fumo all'istante finale $t_0 + \Delta T$:

$$\mathbf{x}(t_0 + \Delta T|t_0) = \mathbf{x}(t_0|t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} \mathbf{v}[\mathbf{x}(t|t_0), t] dt \quad (\text{A-32})$$

quale istantanea di una struttura del moto integrata nel tempo. In particolare, in un campo complesso di moto vario, l'integrazione temporale deve essere condotta numericamente poiché il campo di velocità varia nel tempo.

Osservazioni. Quando il moto è permanente (o stazionario), le *linee di flusso*, le *traiettorie* e le *linee di fumo* risultano fra loro identiche nella forma (linee sovrapposte dall'andamento coincidente).

Linee di tempo

Una *linea di tempo* è il luogo delle posizioni raggiunte in un certo istante dall'insieme di particelle di fluido che in un istante precedente t_0 si trovavano su una linea arbitrariamente scelta (di partenza). In altri termini, la linea di tempo si forma e si modifica lungo il dominio del fluido al trascorrere del tempo, marcando una linea di particelle fluide lungo una prefissata sezione (o zona) e seguendola mentre si muove e si deforma negli istanti successivi del moto.

In acqua, le linee di tempo possono essere facilmente generate usando un filo a bolle d'idrogeno. Quando il filo, che costituisce il catodo di un circuito, è percorso da una corrente elettrica, si generano piccole bolle di idrogeno attraverso un processo di elettrolisi dell'acqua. Poiché le bollicine sono molto piccole, la spinta di galleggiamento è trascurabile ed esse seguono molto bene il moto della corrente liquida.

Il profilo delle velocità in una sezione di flusso è quindi una particolare linea di tempo valutata proprio nell'unità di tempo (*profilo delle velocità*).

A-3 RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI UN CAMPO DI MOTO

Indipendentemente dal modo in cui i risultati sono ottenuti, è sempre necessario una loro rappresentazione grafica in modo che le varie grandezze caratteristiche di un campo di moto siano descritte nella maniera più possibile immediata alla vista. Si tratta quindi delle rappresentazioni grafiche più usate in Meccanica dei Fluidi: i *profili*, le *mappe vettoriali* e le *isolinee*.

Profili

Un *profilo* indica come varia una grandezza scalare (o, anche, vettoriale) lungo una prefissata direzione all'interno del campo del moto. Come già anticipato, una delle linee di tempo nelle vicinanze delle pareti, in prossimità di un flusso, può essere considerata un profilo delle velocità, in quanto in un dato istante il percorso lungo una prefissata direzione compiuto da una bollicina di idrogeno è proporzionale alla componente locale della velocità secondo la direzione indagata.



Tanto più ristretto è l'intervallo di tempo indagato per le linee di tempo e tanto più tale profilo si approssima a quello effettivo delle velocità.

Mappe vettoriali

Una *mappa vettoriale* è un insieme di frecce a cui è associato il modulo e la direzione di una grandezza vettoriale in un certo istante di tempo. Le linee di flusso indicano la direzione del campo delle velocità istantaneo ma non danno alcuna informazione circa il modulo (intensità) delle velocità.

Essendo infatti la tangente in un arbitrario punto della linea di flusso (o di corrente) la direzione locale della velocità, fissato un certo istante di tempo t , la mappa vettoriale della velocità visualizzerà dei segmenti, orientati con delle frecce, la cui lunghezza è disegnata in maniera relativamente proporzionale a quella massima (o minima) registrata nell'intero volume del dominio fluido indagato. Mappe vettoriali possono anche impiegarsi per rap-

Figura A-6

Mappa vettoriale delle velocità di un oggetto aerodinamico lanciato nell'aria.

Fonte:
<https://i.ytimg.com/vi/S93-LaHkVBo/maxresdefault.jpg>

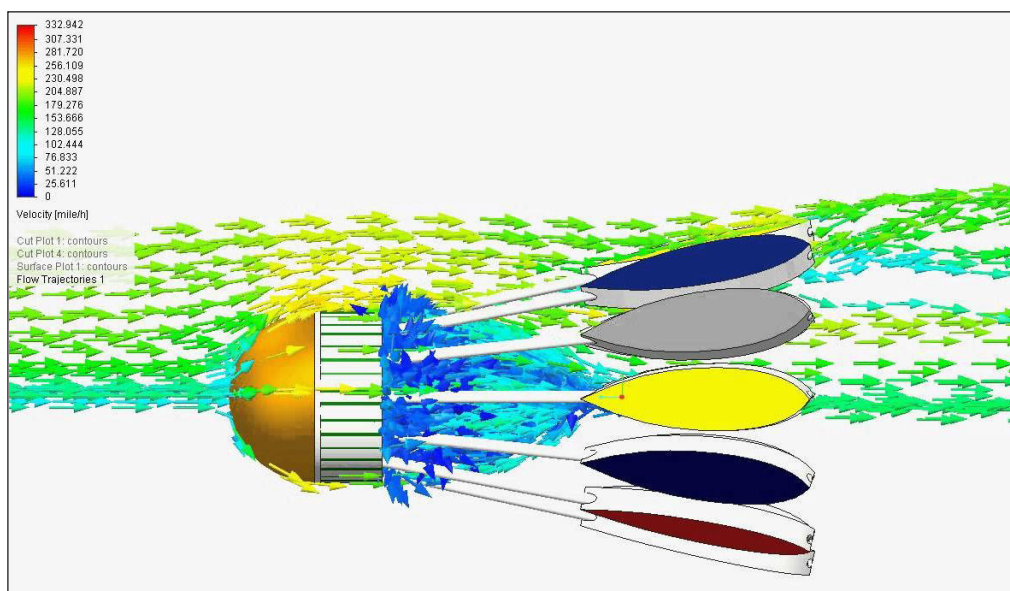
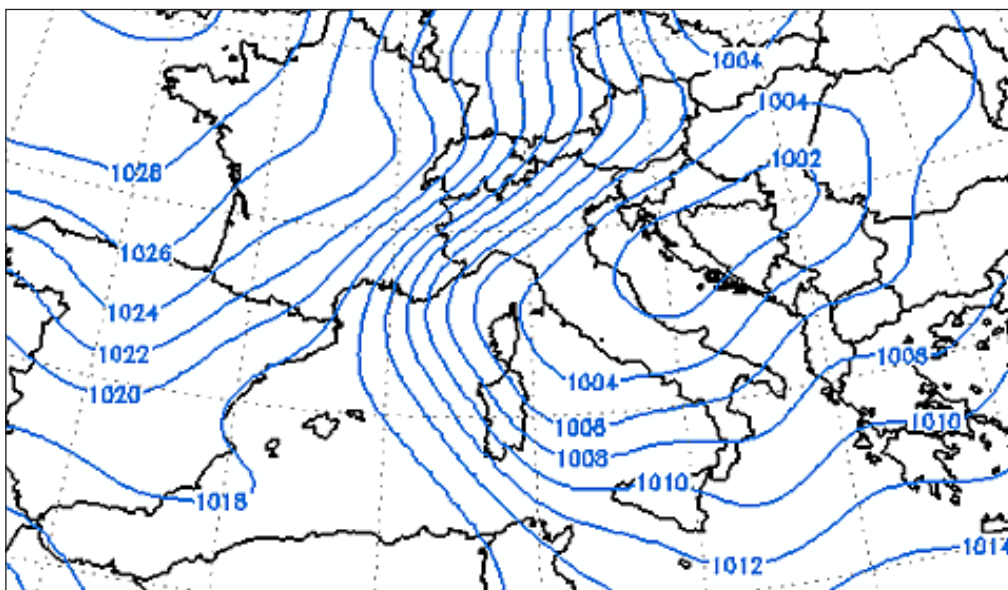


Figura A-7

Esempio di curve di livello della pressione.

Fonte:
http://img.meteogiornale.it/attachments/images/news/maxi/16311_1_1.gif



presentare grandezze solamente scalari, come la pressione e la temperatura, mediante mappe di colore (definendo una graduazione di colori e associando ad ogni estremo cromatica un valore o un intervallo di valori (quali grandezze scalari misurabili).

Isolinee (o curve di livello)

Una *mappa di isolinee* riporta curve lungo le quali si mantiene costante una proprietà scalare (o il modulo di una grandezza vettoriale) in un certo istante di tempo.

Sulle carte topografiche, per rappresentare l'andamento altimetrico del terreno, si usano le curve di livello, cioè linee che uniscono punti giacenti alla stessa quota. Un gruppo di curve di livello chiuse approssimativamente concentriche rappresenta un'altura o un avvallamento. In Meccanica dei Fluidi si applica lo stesso tipo di rappresentazione con riferimento a diverse proprietà scalari del moto: possono essere così costruite *mappe di isolinee* di pressione, temperatura, modulo della velocità, concentrazione di una specie chimica, etc.

In una mappa di isolinee, l'area compresa fra una curva e quella adiacente può essere campita utilizzando una scala di colori o di sfumature di grigio per distinguere immediatamente le zone in cui la grandezza rappresentata ha i valori più grandi da quelle in cui ha valori minori. Grazie alle campiture di colore risulta immediatamente evidente l'andamento e la distribuzione dell'intensità della varie grandezze per un istante di tempo fissato.

Nella figura in alto, ciascuna linea ingloba tutti i punti in cui la pressione (misurata in millibar)^(vi) è uguale (isobare). Se, procedendo verso il centro attraverso curve isobare fra loro concentriche, i valori di pressione aumentano (dall'esterno verso l'interno) allora si sta procedendo da zone di bassa pressione a zone di alta pressione e viceversa.



(vi) Si ha che 1 millibar corrisponde a 0,986923 atmosfere (praticamente 1 mbar = 1 atm).

Sezione B

Analisi della cinematica dei fluidi

In questa sezione verranno presentati i formalismi tensoriali dei cinematismi di deformazione di elementi fluidi nello spazio del moto. Si prescindereà, quindi, dalle singole variazioni locali del campo della velocità e ci si soffermerà invece sui soli gradienti spaziali delle velocità di deformazione. Verranno presentati i tensori delle velocità di deformazione in termini matriciali e in forma di notazione compatta indicizzata secondo la notazione di EINSTEIN sugli indici ripetuti.

B-1 TIPI DI MOTO E DI DEFORMAZIONE DEGLI ELEMENTI FLUIDI

In Meccanica dei Fluidi, come anche nella Meccanica dei Solidi, un generico elementino fluido può presentare due tipi fondamentali di movimento e due tipi di deformazione, rispettivamente:

- moto di traslazione pura;
- moto di rotazione rigida pura;
- deformazione lineare;
- deformazione angolare.

Lo studio della dinamica e della cinematica dei fluidi è reso complicato dal fatto che questi diversi tipi di moto e di deformazione avvengono di solito contemporaneamente. Poiché il movimento e la deformazione di un elemento fluido avvengono con continuità, nello studio della dinamica dei fluidi occorre porre attenzione non sul movimento (di traslazione o di rotazione) o sulla deformazione (lineare o angolare) dell'elemento, ma piuttosto sulle velocità con cui esso trasla, ruota o si deforma. Pertanto, si parla di *velocità di traslazione* (rigida), *velocità angolare* (di rotazione rigida), *velocità di deformazione lineare* e di *deformazione angolare*.

Le velocità di deformazione

Nel generico istante arbitrario t_0 , secondo la definizione del *differenziale totale* della generica componente $v_k = v_k(\mathbf{x}, t_0)$ della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)$, si è visto che si può scrivere (sommando solo sull'indice *i*—esimo):

$$v_k(\mathbf{x}, t_0) - v_k(\mathbf{x}_0, t_0) = \left. \frac{\partial v_k}{\partial t} \right|_{t_0; \mathbf{x}_0} dt + \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right|_{t_0; \mathbf{x}_0} dx_i \quad (\text{B-1})$$

la cui forma differenziale risulta definita, all'istante t_0 , in un qualsiasi intorno di un punto iniziale $\mathbf{x}_0$, tale per cui risulti appunto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}$ in virtù della definizione di intorno del punto iniziale.

Considerando le sole componenti convettive delle velocità di deformazione – in altri termini, ammettendo che non si “sovrappongano” gli effetti di variazioni puramente locali



delle grandezze di campo – risulta più immediato lo studio diretto e semplice delle velocità secondo le quali le deformazioni hanno luogo in generale nei moti dei fluidi. Pertanto, prescindendo per un momento dal primo termine a II membro della (B-1), ovvero dalle variazioni locali del campo della velocità) si scriverà:

$$v_k(\mathbf{x}, t_0) = v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right|_{t_0; \mathbf{x}_0} \quad (\text{B-2})$$

significando, appunto, che si sta prescindendo dall'eventuale componente di moto non stazionario (o vario); equivalentemente al voler mantenere focalizzata l'attenzione sulla sola componente di variazione dei differenziali spaziali delle velocità di deformazione (attenzione sui soli *gradienti spaziali* o *gradienti convettivi* delle variabili cinematiche del campo della velocità $\mathbf{v}$). Ritenendo quindi implicitamente di riferirci all'arbitrario istante t_0 , la precedente equazione, riferita alle tre componenti di velocità presenterà le forme:

$$v_x(\mathbf{x}) = v_x(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} dx + \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} dy + \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} dz \quad (\text{B-3})$$

$$v_y(\mathbf{x}) = v_y(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial v_y}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} dx + \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} dy + \left. \frac{\partial v_y}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} dz \quad (\text{B-4})$$

$$v_z(\mathbf{x}) = v_z(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial v_z}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} dx + \left. \frac{\partial v_z}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} dy + \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} dz. \quad (\text{B-5})$$

Ricordando la definizione di *tensore dei gradienti di velocità* (si veda sezione precedente):

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v})_k = v_i (\text{grad} \mathbf{v})_{ik} \equiv v_i \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0}, \quad (\text{B-6})$$

le precedenti espressioni, del polinomio di TAYLOR arrestato al I ordine, per le componenti v_k possono essere compattate nella relazione matriciale-tensoriale (riferita formalmente all'istante t_0) quale somma di una componente di velocità di traslazione rigida $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ con una componente (generale) di velocità di deformazione $dx \cdot \text{grad} \mathbf{v} \big|_{\mathbf{x}_0}$, data appunto dal prodotto righe per colonne di una matrice vettore trasposto dx (1×3) per un tensore del II ordine come matrice 3×3 :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + dx \cdot \text{grad} \mathbf{v} \big|_{\mathbf{x}_0}, \quad (\text{B-7})$$

dove il tensore $\text{grad} \mathbf{v}$, calcolato localmente nel punto iniziale $\mathbf{x}_0$, è tale per cui:

$$dx \cdot \text{grad} \mathbf{v} \big|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial v_y}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial v_y}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial v_z}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial v_z}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B-8})$$

In forma compatta indicizzata, sommando sull'indice i -esimo e sull'indice k -esimo (entrambi ripetuti) si ha vettorialmente per la componente convettiva:

$$dx \cdot \text{grad} \mathbf{v} \big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{i}_k \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} dx_i = \mathbf{i}_k (\text{grad} \mathbf{v} \big|_{\mathbf{x}_0})_{ik} dx_i \quad (\text{B-9})$$

In accordo a queste decomposizioni tensoriali, lo sviluppo polinomiale di TAYLOR del I ordine del campo della velocità $\mathbf{v}$ (data dalla (B-7) a pagina b-2) può essere specializzata nella seguente forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \text{grad} \mathbf{v} \big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0). \quad (\text{B-16})$$



La velocità del fluido nell'intorno $\mathbf{x}_0$ appare così suddivisa in tre componenti. La prima, $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$, è indipendente dal punto $\mathbf{x}$, ed è quindi dovuta a una traslazione rigida d'insieme: $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ svolge perciò il ruolo di vettore delle *velocità di traslazione rigida* (particella fluida che si sposta come un elemento volumetrico indeformabile in ogni suo punto $\mathbf{x}$).

Velocità di rotazione rigida (d'insieme). La seconda componente, $d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0)$, presenta la struttura vettoriale in termini di prodotto di righe per colonne:

$$d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} & 0 \end{bmatrix}$$

equivalente alla somma vettoriale (per definizione):

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{i}_x \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} dz \right] + \\ &+ \mathbf{i}_y \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} dz \right] + \\ &+ \mathbf{i}_z \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} dy \right] \end{aligned}$$

$$d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} & \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

I termini che figurano nella II riga di questo determinante sono le componenti del vettore:

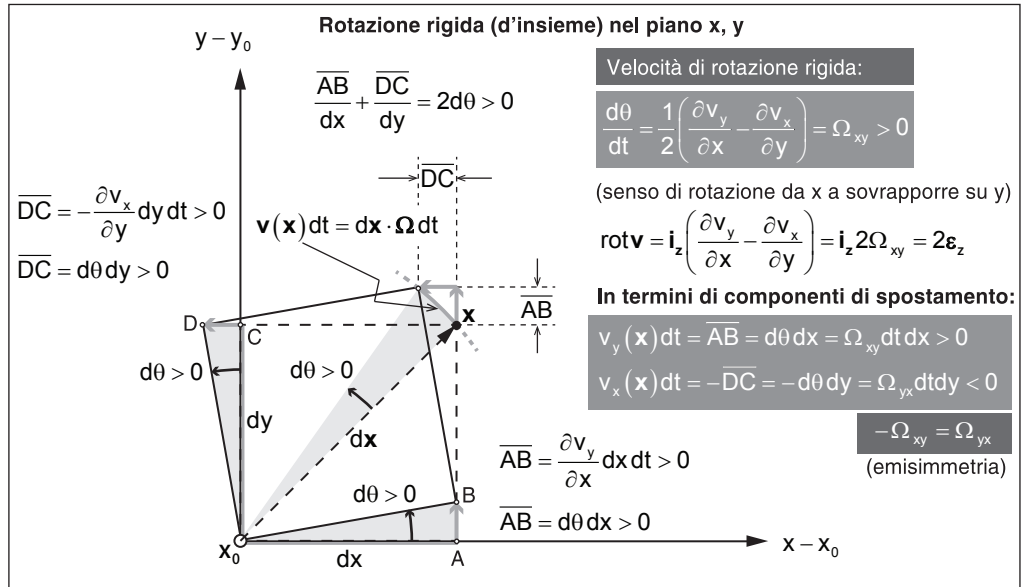
$$(\text{rot} \mathbf{v})_{\mathbf{x}_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x(\mathbf{x}_0) & v_y(\mathbf{x}_0) & v_z(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0}$$

e quindi risulta per confronto che vale l'importante relazione:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\text{rot} \mathbf{v})_{\mathbf{x}_0} \wedge d\mathbf{x}. \quad (\text{B-17})$$

Interpretazione grafica del tensore delle velocità di rotazione rigida (d'insieme) Ω_{ik} .

NOTA: asse
z positivo per
rotazioni $d\theta$
antiorarie: variazioni
angolari positive se
antiorarie.



Ne consegue che la componente vettoriale $d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ è connessa ad una rotazione rigida d'insieme con velocità angolare:

$$\omega = \frac{1}{2} rot \mathbf{v} \quad (\text{B-18})$$

per cui risulta (nell'intorno del punto iniziale $\mathbf{x}_0$):

$$d\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}(\text{rot}\mathbf{v})_{\mathbf{x}_0} \wedge d\mathbf{x} \Rightarrow d\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0) = \omega(\mathbf{x}_0) \wedge d\mathbf{x} \quad (\text{B-19})$$

e il relativo tensore $\mathbf{\Omega}$ viene detto quindi tensore delle *velocità di rotazione rigida*.



Interpretazione geometrica del tensore Ω . Nello schema in figura in alto, relativo ad un cinematismo piano di rotazione rigida (nel piano $x-y$), il rotore del campo della velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_x v_x(\mathbf{x}) + \mathbf{i}_y v_y(\mathbf{x})$ risulta perpendicolare al piano $x-y$ e pari a:

$$rot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = (rot \mathbf{v})_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bigg|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{i}_z (2\Omega_{xy}) = 2(\mathbf{i}_z \Omega_{xy}) = 2\omega_z \quad (\text{B-20})$$

avendo indicato il vettore velocità angolare $\omega_z = \mathbf{i}_z \Omega_{xy}$ (diretto perpendicolarmente al piano $x-y$ e con verso “uscente dal foglio”, nel verso antiorario che porta l'asse x a ruotare e a sovrapporsi all'asse y). Risulta infatti anche (si veda vettore $d\mathbf{x}$ in figura in alto):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})dt = \|d\mathbf{x}\|d\theta\mathbf{i}_z = \|d\mathbf{x}\|\Omega_{xy}dt\mathbf{i}_z = \|d\mathbf{x}\|dt\omega_z \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \|d\mathbf{x}\|\omega_z}, \quad (\text{B-21})$$

da cui la relazione conseguente alla definizione di prodotto vettoriale:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{i}_z \Omega_{xy}) \wedge d\mathbf{x} = \omega_z \wedge d\mathbf{x} \quad (\text{B-22})$$

In termini quindi di componenti di spostamento, durante una rotazione rigida nel piano $x-y$ si ha:

$$\begin{cases} v_x(\mathbf{x}) = -\Omega_{xy}(\mathbf{x}_0)dydt = \Omega_{yx}(\mathbf{x}_0)dydt \\ v_y(\mathbf{x}) = \Omega_{xy}(\mathbf{x}_0)dxdt. \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_x v_x(\mathbf{x}) + \mathbf{i}_y v_y(\mathbf{x}) \quad (\text{B-23})$$

sempre nell'ipotesi implicita che si debba considerare $D_{ik} = D_{ik}(\mathbf{x}_0)$. A questo punto, applicando l'operazione di gradiente alla componente vettoriale j -esima, si scriverà:

$$\left[\text{grad} \left(\frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \right) \right]_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} dx_i D_{ik} dx_k \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i D_{ik} dx_k) \quad (\text{B-27})$$

essendo vettorialmente, per definizione di gradiente dello scalare nella (B-26):

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \right) = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} dx_i D_{ik} dx_k \right).$$

Svolgendo la (B-27) con derivazione parziale per parti, si imposterà:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i D_{ik} dx_k) = \frac{1}{2} \left[dx_i \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ik} dx_k) + D_{ik} dx_k \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i) \right],$$

➤ **IMPORTANTE**

dove il primo termine a II membro avrà derivate parziali rispetto a x_j (generalmente) non nulle solo nei casi in cui $k = j$; mentre il secondo termine a II membro avrà altrettante derivate parziali rispetto a x_j (generalmente) non nulle solo per $i = j$. Si scriverà quindi:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i D_{ik} dx_k) = \frac{1}{2} \left[dx_i \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ij} dx_j) + D_{jk} dx_k \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i) \right].$$

Svolgendo le derivate parziali, per tutto il II membro si ottiene:

$$\frac{1}{2} \left[dx_i dx_j \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} + dx_i D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_j) + D_{jk} dx_k \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i) \right]. \quad (\text{B-28})$$



Ora, risulta necessaria una premessa: fissata la particolare funzione $x_j = \Delta x_j$, il cui *codominio* sia però definito in un insieme infinitesimo (gli infiniti segmenti elementari $d\mathbf{x}$ nello spazio interessati dalle deformazioni infinitesime nell'intorno $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}$ di punto iniziale $\mathbf{x}_0$), varrà per il II membro la seguente identità elementare $\Delta x_j = dx_j$. Come conseguenza, applicando l'operatore differenziale ad entrambi i membri di quest'ultima identità, si vedono esistere gli ulteriori legami:

$$d(dx_j) = d(\Delta x_j) = dx_j \Rightarrow \frac{d(dx_j)}{dx_j} = \frac{d(\Delta x_j)}{dx_j} = 1 \Rightarrow \frac{d(dx_j)}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_j) = 1,$$

avendo tenuto conto, nell'ultimo passaggio, della definizione di differenziale di una funzione (in questo particolare caso, di funzione a sua volta differenziale). Sfruttando quest'ultimo risultato per la (B-28), si ottiene (su deformazioni infinitesime):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (dx_i D_{ik} dx_k) = \frac{1}{2} \left(dx_i dx_j \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} + dx_i D_{ij} + D_{jk} dx_k \right) \cong \frac{1}{2} (dx_i D_{ij} + D_{jk} dx_k) \quad (\text{B-29})$$

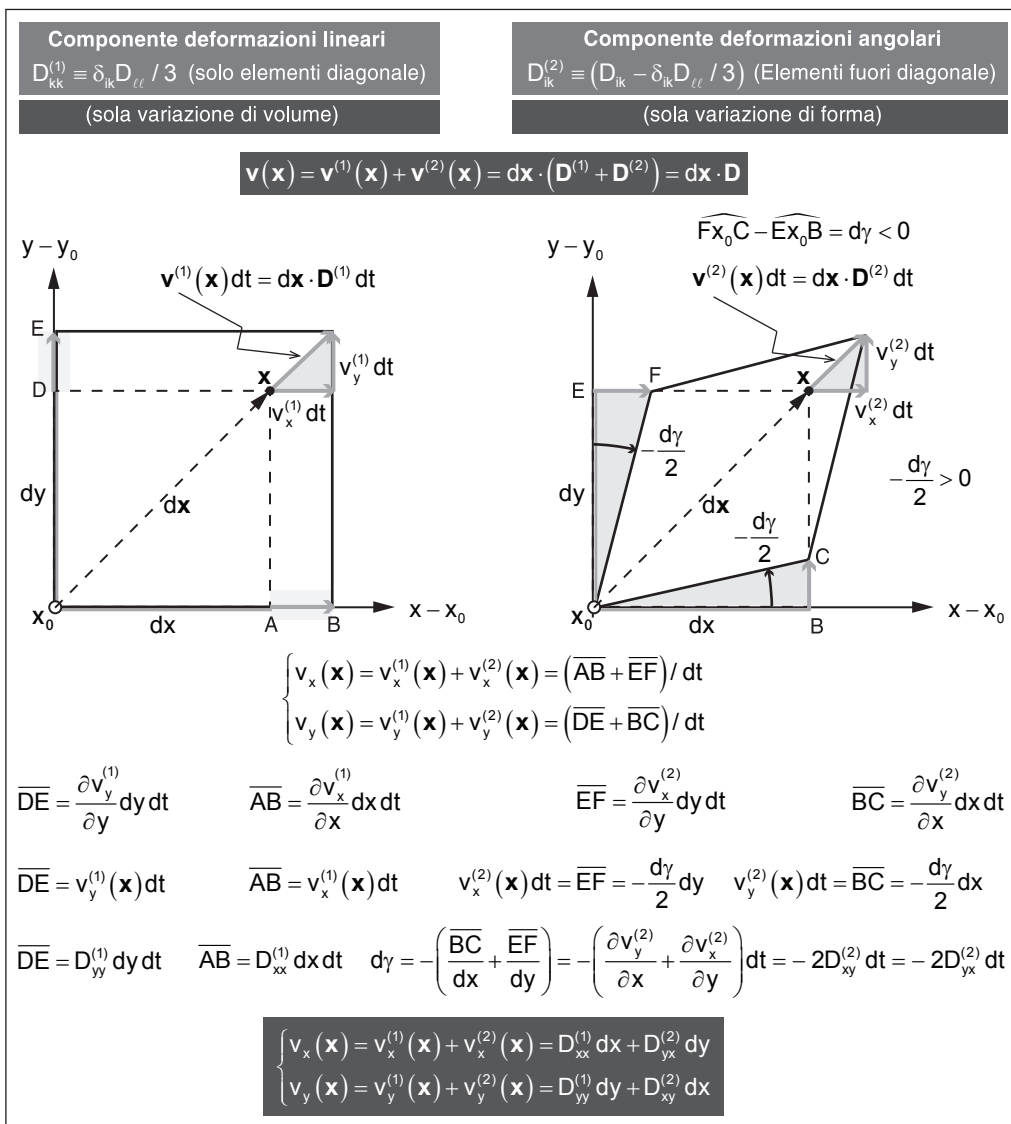
avendo trascurato il primo termine a II membro, evidentemente infinitesimo di ordine superiore. Si potrà quindi scrivere equivalentemente (tenendo conto anche dell'importante simmetria del tensore delle deformazioni pure $D_{jk} = D_{kj}$):

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0))_j &= dx_i D_{ij} = \frac{1}{2} (dx_i D_{ij} + D_{jk} dx_k) = \frac{1}{2} (dx_i D_{ij} + D_{kj} dx_k) = \\ &= \frac{1}{2} \left(dx_i D_{ij} + \underbrace{D_{kj} dx_k}_{k=i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (dx_i D_{ij} + D_{ij} dx_i) = \left[\text{grad} \left(\frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \right) \right]_j \quad (\text{B-30}) \end{aligned}$$

Figura B-2

Interpretazione geometrica delle componenti di velocità di deformazione pura lineari e angolari.

NOTA: è implicito che il tensore delle deformazioni D_{ik} (e le sue relative componenti) va sempre calcolato nel punto iniziale x_0 .



avendo considerato che, nell'espressione al secondo passaggio, gli indici i e k appaiono muti nell'espressione del prodotto $D_{kj} dx_k$ e pertanto portano allo stesso risultato dovendo sommare su entrambi gli indici: $D_{kj} dx_k = D_{ij} dx_i$.

Ipotizzando per sola semplicità e chiarezza che siano assenti completamente le velocità di rotazione rigida e stante quindi l'uguaglianza vettoriale (B-25), si può formalmente scrivere:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}_0) = \text{grad}\left(\frac{1}{2} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}\right).$$

Pertanto, per la definizione di gradiente di uno scalare, in ciascuno punto $\mathbf{x}$ si osserva una componente di velocità (di deformazione pura) sempre normale alla particolare superficie (passante per il punto $\mathbf{x}$) appartenente alla famiglia di superfici (quadriche):

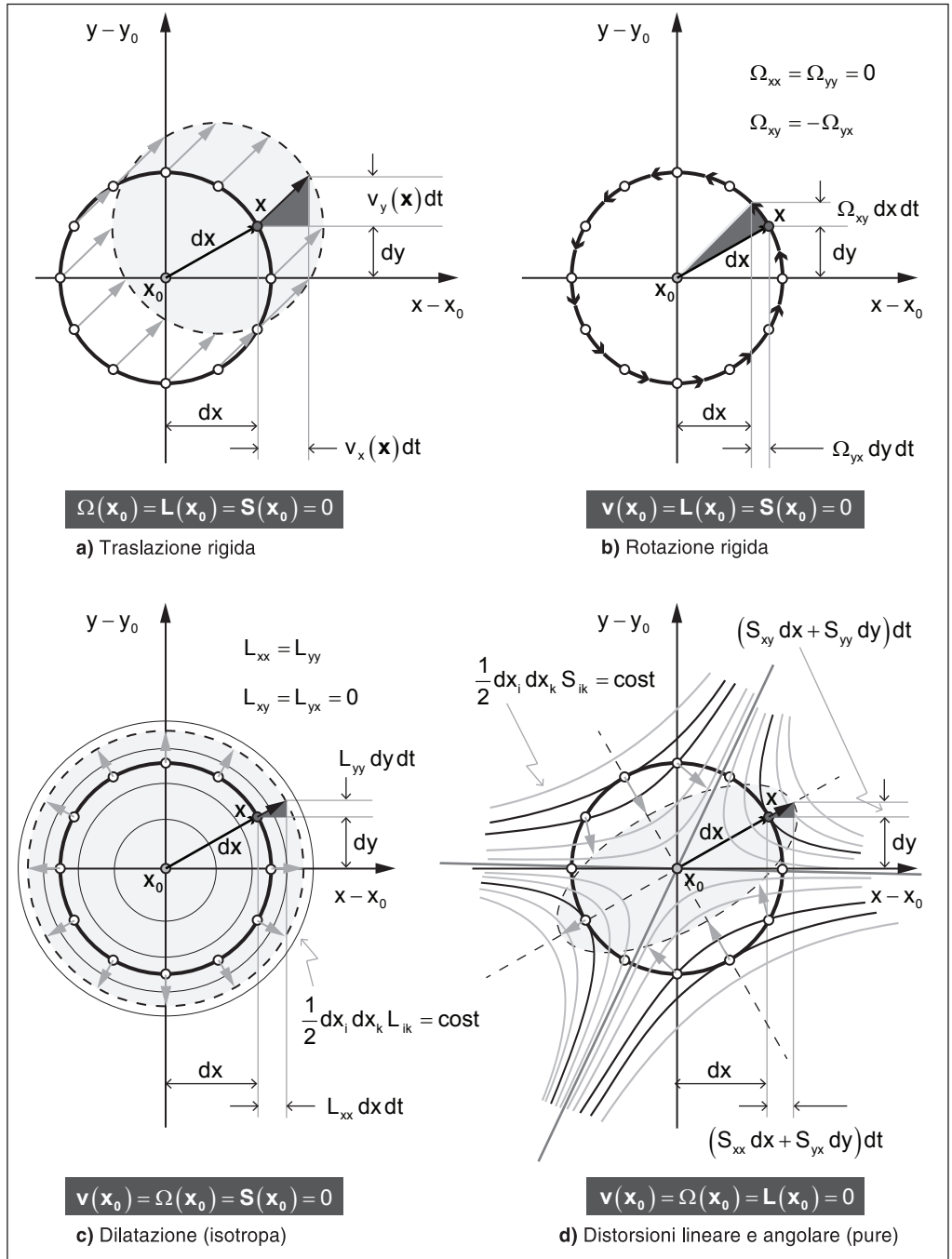
Figura B-3

Contributo dei singoli termini cinematici:

- a) traslazione
- b) rotazione
- c) dilatazione
- d) distorsione pura.

NOTA:

- a), b) corpo rigido
- c) forma costante, volume variabile
- d) forma variabile, volume costante.



Anche in questo sistema di riferimento, i tre termini $S_{\bar{x}\bar{x}}(\mathbf{x}_0)$, $S_{\bar{y}\bar{y}}(\mathbf{x}_0)$ e $S_{\bar{z}\bar{z}}(\mathbf{x}_0)$, valutati sempre nell'arbitrario punto origine $\mathbf{x}_0$, non potranno mai avere stesso segno algebrico dovendo la loro somma (algebrica) dare valore nullo.

Pertanto, la (B-43) non potrà riferirsi all'equazione canonica di una sfera o di un ellissoide. Se ora si applica l'operatore divergenza alla componente di velocità (puramente distorsiva) $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$, si ha ulteriore conferma che:

essendo il prodotto misto righe per colonne del vettore $\mathbf{w}$ per il tensore del II ordine identità $\mathbf{I}$ nient'altro che il vettore $\mathbf{w}$ stesso. Sostituendo la (B-67) nella (B-66), si ottiene:

$$\mathbf{w} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{S} = \left(\frac{\text{div} \mathbf{v}}{3} \right) \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}. \quad (\text{B-68})$$



quest'ultima sostituita nella (B-64) porge infine (*equazione di bilancio della vorticità*):

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \text{rota} - \frac{2}{3}(\text{div} \mathbf{v}) \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}. \quad (\text{B-69})$$

Questa equazione afferma che il tasso di variazione intrinseca nel tempo della vorticità risulta dovuto separatamente alla presenza di un campo di accelerazioni rotazionali, alla velocità di variazione dell'unità di volume fluido e alla sua distorsione pura a volume costante (componente delle distorsioni *isocora*).

È importante poi osservare che questi due ultimi effetti si manifestano solo quando esiste già una vorticità iniziale (valori di innesco). Ricordando poi (si vedano la (B-18) e la (B-19) a pagina b-5) che la vorticità (locale) è connessa alla velocità angolare della rotazione rigida (locale) dalla:

$$\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

si può individuare subito l'implicazione dinamica di questo risultato:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{1}{2} \text{rota} - \frac{2}{3}(\text{div} \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}. \quad (\text{B-70})$$

Variazioni di velocità angolare, quindi, si possono registrare quando:

- il moto rotazionale implica gradienti di velocità fra un filetto fluido e quello immediatamente adiacente, inducendo rotazioni per variazione delle quantità di moto periferiche alla generica particella fluida che perciò è mantenuta in rotazione;
- in presenza di vorticità iniziale ($\mathbf{w} \neq 0$), a una dilatazione isotropa del volume di fluido ($\text{div} \mathbf{v} > 0$) deve corrispondere un aumento del *momento d'inerzia* I_c della singola particella fluida rispetto al suo asse istantaneo di rotazione che, per particella elementare, schematizzata come sferica di raggio $\|\mathbf{dx}\|$ e centro in $\mathbf{x}_0$, può scriversi proporzionale a:

$$dI_c \propto \|\mathbf{dx}\|^2 \rho dV > 0.$$

Da ciò una modifica della geometria del fluido – in virtù (evidentemente) di sole *forze interne* (in generale, pressorie e di attrito, in seno all'intera massa fluida) – tale che:

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} \propto \frac{1}{V \|\mathbf{dx}\|^2 \rho} \left(\frac{dI_c}{dt} \right) > 0.$$

In un tale assetto di sforzi interni, il *momento angolare* $\mathbf{P}_c = I_c \boldsymbol{\omega}$ della particella fluida deve conservarsi: se il momento d'inerzia aumenta, deve vedersi diminuire la velocità di rotazione angolare $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{P}_c = I_c \boldsymbol{\omega} = \text{cost} \Rightarrow \begin{cases} dI_c/dt > 0 \\ d\boldsymbol{\omega}/dt < 0 \end{cases}$$

- la presenza di viscosità μ (e quindi il legame lineare degli sforzi deviatorici $\boldsymbol{\sigma}'$ alle deformazioni distorsive $\mathbf{S}$) implica la presenza di sforzi di taglio che, in presenza

Se il dominio V interessato dal moto piano è molteplicemente connesso, il potenziale vettore $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ e quindi la *funzione di corrente* $\psi_z = \psi_z(\mathbf{x}, t)$ possono risultare non univoche. In uno stesso istante t e in un medesimo punto $\mathbf{x}$ del dominio, la differenza a I membro della:

$$\psi_z(\mathbf{x}, t) - \psi_z(\mathbf{x}_0, t) \equiv \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL_k$$

può assumere tanti valori – quanti le combinazioni lineari dei valori dell'integrale di linea a II membro – relativi a curve L_k non riconducibili, per deformazione continua in V , né le une sulle altre né ad un semplice punto.



Pertanto, analogamente a quanto osservato per il potenziale scalare delle velocità, se nel costruire la funzione $\psi_z = \psi_z(\mathbf{x}, t)$ si valutasse una linea di integrazione L_k che conduca da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$ non più secondo il più breve e semplice arco di curva ma secondo un percorso a spirale (che spazi con il relativo raggio vettore di un angolo maggiore dell'angolo giro: $\alpha_k > 2\pi$), si otterrebbe una funzione di corrente che viene a dipendere dalla lunghezza della linea stessa e quindi dal percorso stesso (in particolare, viene a dipendere dal numero di giri 2π effettuati nel congiungere $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}$).

In tal caso, la funzione potenziale risulterebbe pari al prodotto del numero m_k di angoli giro eseguiti – spaziando lungo una spirale da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$ nel dominio V – per il relativo valore del potenziale dell'integrale di linea riferito a un solo angolo giro $m_k = 1$:

$$\psi_z(\mathbf{x}, t) - \psi_z(\mathbf{x}_0, t) = m_k \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL_k.$$

Osservazioni. Considerazioni sostanzialmente analoghe si possono riscontrare anche nei moti a *simmetria assiale*. Per questo tipo di moti, si fa riferimento a sistemi di coordinate sferici (r, ϑ, Φ) rispetto ai quali la componente della velocità lungo le Φ (paralleli) è identicamente nulla, mentre le altre due componenti (radiale e meridiana) sono indipendenti dalla stessa coordinata angolare Φ .

ESEMPIO B-1

**Calcolo della funzione di corrente di un campo di velocità noto**

Si consideri un campo di moto permanente e bidimensionale di un fluido incomprimibile (numero di MACH $< 0,3$), definito dalle seguenti componenti:

$$v_x(x) = ax + b; \quad v_y(x, y) = -ay + cx$$

con: $a = 0,50 \text{ s}^{-1}$, $b = 1,5 \text{ m s}^{-1}$, $c = 0,35 \text{ s}^{-1}$. Derivare un'espressione per la funzione di corrente.

Soluzione

Il moto è per ipotesi permanente e si svolge nel piano x, y ($v_z = 0$ e v_x, v_y non dipendono dalla coordinata z) e il fluido è incomprimibile:

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = a - a = 0.$$

Secondo le (B-89) a pagina b-25, si ha:

no due o più campi di moto (ad esempio, una corrente uniforme parallela all'asse x e una parallela all'asse y , nel caso di un semplice moto piano), la funzione potenziale del campo delle velocità risultante si ottiene sommando semplicemente fra loro le relative espressioni delle funzioni potenziali dei campi di moto sovrapposti.

Conseguentemente, alla validità del principio di sovrapposizione degli effetti, dalla (B-75) a pagina b-20 segue:

$$v_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} \quad \text{per } k = 1, 2, 3.$$

IMPORTANTE

Si può dimostrare che l'armonicità del potenziale φ implica che φ stesso risulti derivabile quante volte si voglia, producendo altre funzioni armoniche attraverso le successive derivazioni. Come conseguenza particolare, anche le componenti della velocità risulteranno armoniche.^(viii) Data l'armonicità del potenziale scalare φ e delle componenti del campo della velocità ($\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z$), le funzioni φ , v_x , v_y , v_z non possono presentare punti di massimo o di minimo relativi nell'interno del dominio V .

Questa peculiarità può tentarsi di spiegare in maniera intuitiva pensando al caso di un moto irrotazionale ma in presenza di una sorgente in $\mathbf{x}_0$ che immetta portata fluida Q_v nel dominio (*divergenza* sicuramente non nulla del campo della velocità, $\text{div} \mathbf{v} \neq 0$): si potrebbe infatti pensare, ad esempio, ad un'immissione attraverso un foro di un recipiente a capienza teoricamente infinita e pensare quindi a una superficie equipotenziale in asse al foro stesso, dotata appunto di massimo stazionario in $\mathbf{x}_0$. Pertanto, in un moto irrotazionale con $\text{div} \mathbf{v} = 0$, la funzione φ e le sue derivate parziali (quindi, in particolare, le componenti v_x , v_y e v_z) assumeranno i loro valori massimi e minimi solo sulla frontiera A di V . In maniera evidente, si può intanto osservare che il modulo $v = \|\mathbf{v}\|$ della velocità $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \hat{\mathbf{v}} = v \hat{\mathbf{v}}$ può presentare sicuramente punti interni di minimo relativo, potendosi anche eventualmente annullarsi internamente a V nei punti di ristagno. Viceversa, nei moti armonici, si dimostra che il modulo della velocità non può presentare punti di massimo relativo all'interno di V .

Infatti se ad esempio si assumesse – in un punto arbitrario $\mathbf{x}_0$ dove la funzione v^2 assume un valore di massimo – l'asse delle x diretto come il vettore delle velocità in $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) = \|\mathbf{v}\| \hat{\mathbf{v}} = v_x(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{i}_x,$$

di fatto, si imporrebbe evidentemente (per costruzione nel punto $\mathbf{x}_0$ e all'istante t) la seguente relazione:

$$[v_x^2]_{\mathbf{x}_0} = [v^2]_{\mathbf{x}_0}.$$

Se è ipotizzata (almeno) l'esistenza in $\mathbf{x}_0$ (all'istante t) di un massimo per la funzione v^2 , allora nell'intorno di $\mathbf{x}_0$ deve esistere un altro punto $\mathbf{x}$ in cui la funzione $v_x = v_x(\mathbf{x}, t)$ (che, come funzione armonica, non può mai presentare alcun punto di massimo relativo nell'intero dominio V , e in particolare in $\mathbf{x}_0$) deve necessariamente presentare valore maggiore:

$$[v_x^2]_{\mathbf{x}} > [v_x^2]_{\mathbf{x}_0},$$

da cui, a maggiore ragione, segue che (al generico istante t):

$$[v^2]_{\mathbf{x}} = [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]_{\mathbf{x}} > [v_x^2]_{\mathbf{x}_0} = [v^2]_{\mathbf{x}_0} \Rightarrow [v^2]_{\mathbf{x}} > [v^2]_{\mathbf{x}_0},$$

(viii) Ad esempio, in un moto piano, la funzione potenziale scalare $\varphi(x, y) = e^{kx} \sin(ky)$ è una funzione armonica.

da cui il verso dell'ultima disuguaglianza, palesemente in contrasto con la supposta esistenza in $\mathbf{x}_0$ di un massimo relativo per il modulo della velocità $\mathbf{v}$.

Altra importante conseguenza dell'armonicità del potenziale φ delle velocità $\mathbf{v}$ riguarda la dipendenza della distribuzione di φ , nei punti interni del dominio V , dalle condizioni imposte sulla frontiera A (superficie di contorno esterna del dominio) per φ e per le sue derivate spaziali. Dalla relazione vettoriale della divergenza del prodotto di una costante per un gradiente vettore, si può scrivere (essendo in questo caso $\nabla^2 \varphi = 0$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) &= \varphi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi = \varphi \nabla^2 \varphi + \|\operatorname{grad} \varphi\|^2 \\ &= \|\operatorname{grad} \varphi\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B-94})$$

Applicando il teorema della divergenza sul dominio V semplicemente connesso e limitato con contorno di superficie chiusa e regolare A :

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) dV = - \oint_A (\varphi \operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{B-95})$$

➡ IMPORTANTE

con vettore normale interno $\mathbf{n}$ diretto verso l'interno del volume V . Sostituendo a I membro della (B-95) il risultato nell'espressione (B-94), si ottiene (per solo dominio semplicemente connesso e limitato):

$$\int_V \|\operatorname{grad} \varphi\|^2 dV = - \oint_A \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA. \quad (\text{B-96})$$

Pertanto, quando le condizioni imposte lungo il contorno A del dominio sono tali da rendere nullo l'integrale di superficie nella (B-96), $\|\operatorname{grad} \varphi\|^2$ che risulta intrinsecamente non negativo deve risultare nullo in ogni punto del dominio V , riducendosi in tal modo la funzione scalare φ a una semplice costante.

La validità della relazione integrale (B-96) garantisce l'esistenza di un *criterio di unicità* per il potenziale del campo delle velocità $\mathbf{v}$: una volta che siano infatti fissati sui punti $\mathbf{x}_0$ della frontiera A del dominio V valori per φ e per il suo gradiente normale, potrà esistere nei punti interni $\mathbf{x}$ del dominio una sola funzione potenziale $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, definita a meno di un'inessenziale costante additiva. Pertanto, ammettendo per assurdo che esistano due soluzioni per $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ ad esempio di due diverse ipotetiche distribuzioni:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_1(\mathbf{x}, t) - \varphi_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{quindi con:} \quad \nabla^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \nabla^2 \varphi = 0,$$

la funzione differenza risulterà ancora armonica e, dovendo rispettare condizioni di frontiera date dalla differenza di quelle imposte alle singole φ_i , deve ridursi in ogni caso a una costante che, essendo nulla sul contorno A (per differenza degli stessi valori delle condizioni al contorno per le supposte due ipotetiche soluzioni) per la (B-96), deve essere nulla su tutto il dominio V : deve quindi risultare $\varphi_1 = \varphi_2$. In altri termini, comunque si scelgano φ_1 e φ_2 si risconterà sempre $\varphi_1 = \varphi_2$ (dimostrazione dell'unicità della soluzione).

Incompatibilità della condizione di aderenza. Il criterio di unicità ora esposto richiede che lungo la superficie A di contorno del campo V interessato dal moto la derivata normale del potenziale venga assegnata solo in maniera disgiunta dalla distribuzione del potenziale stesso, ossia solo disgiuntamente dai valori del suo gradiente in direzione tangente alle parti di superficie di A . In generale, infatti, non si può richiedere che il fluido a contatto con una parete si muova solidalmente con essa in un moto, quando il moto sia irrotazionale e isocoro (quindi con $\nabla^2 \varphi = 0$). In particolare, nel caso di fluido che aderisca ad

➡ IMPORTANTE

Risultando il prodotto delle due tangenti (nel punto $\mathbf{x}$ e all'istante di tempo t considerato):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\varphi \left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = -1 \quad (\text{B-115})$$

si ha la condizione di ortogonalità fra le due famiglie di curve in un qualsiasi punto $\mathbf{x}$ del moto e in un arbitrario istante di tempo t .

Moti con divergenza e rotore non nulli

I campi di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , che presentano contemporaneamente divergenza e rotore diversi da zero non rientrano fra i due precedenti casi considerati. Se si verificano queste circostanze, non è più possibile rappresentare il campo delle velocità con uno solo dei potenziali di STOKES, ma si deve porre:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t) + \text{rot}\Psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{B-116})$$

Si ha intanto la relazione scalare:

$$\text{div}\mathbf{v} = \text{div}(\text{grad}\varphi) + \underset{=0}{\text{div}(\text{rot}\Psi)} = \text{div}(\text{grad}\varphi) \equiv \nabla^2\varphi, \quad (\text{B-117})$$

e quindi, la componente della velocità che presenta divergenza nulla si ottiene risolvendo l'equazione di POISSON $\nabla^2\varphi = \text{div}\mathbf{v} \neq 0$, la cui soluzione ha forma:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V(\mathbf{x}', t)} \frac{\text{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} dV(\mathbf{x}', t), \quad (\text{B-118})$$

integrata sulla funzione $\mathbf{x}'$, per cui la distanza $d(\mathbf{x}) \equiv \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ è la distanza del punto variabile $\mathbf{x}'$ nel dominio V interessato dal moto, dal punto $\mathbf{x}$, nel quale si vuole calcolare il potenziale.

Relativamente alla componente del potenziale vettore, si verifica che vale la seguente relazione vettoriale:

$$\text{rot}\mathbf{v} = \underset{=0}{\text{rot}(\text{grad}\varphi)} + \text{rot}(\text{rot}\Psi) = \text{rot}(\text{rot}\Psi) = -\nabla^2\Psi + \text{grad}(\text{div}\Psi). \quad (\text{B-119})$$

In virtù dell'arbitrarietà della funzione $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$, è conveniente a questo punto scegliere la relativa costante (vettoriale) arbitraria in modo che la funzione stessa risulti anche solenoidale. A tale scopo, è sufficiente costruire un potenziale scalare $\psi_\varphi = \psi_\varphi(\mathbf{x}, t)$ che rappresenti una componente di campo vettoriale con divergenza uguale a quella della funzione vettoriale $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$, mediante integrazione dell'equazione di POISSON, ponendo:

$$\text{div}(\text{grad}\psi_\varphi) = \nabla^2\psi_\varphi = \text{div}\Psi. \quad (\text{B-120})$$

A questo punto, secondo la definizione vista per moto piano della (B-83) a pagina b-24:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_z[\psi_z(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{i}_z[\psi_z(\mathbf{x}_0, t)] = \mathbf{i}_z\left(\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL\right) + \mathbf{i}_z\psi_{z0}$$

se si sceglie il valore della costante ψ_{z0} proprio pari al valore del gradiente di $\psi_\varphi = \psi_\varphi(\mathbf{x}, t)$ in $\mathbf{x}_0$ al tempo t , e si assume il nuovo potenziale vettore così definito:

$$\Psi^*(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{i}_z\left(\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL\right) = \Psi(\mathbf{x}, t) - \text{grad}\psi_\varphi(\mathbf{x}_0, t), \quad \text{con: } \text{div}\Psi^*(\mathbf{x}, t) = 0.$$

non si è fatto altro che rendere completamente solenoidale il potenziale vettore $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$ di partenza, mediante l'utilizzo di una nuova forma del potenziale vettore risultando così verificata la condizione (B-119):

$$\text{rot } \mathbf{v} = -\nabla^2 \Psi^* + \underbrace{\text{grad}(\text{div} \Psi^*)}_{=0} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla^2 \Psi^* \quad (\text{B-121})$$

in ogni punto del campo del moto. Quest'ultima è di nuovo un'equazione di POISSON la cui soluzione ha forma:

$$\Psi^*(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V(\mathbf{x}', t)} \frac{\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}', t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} dV(\mathbf{x}', t) \quad (\text{B-122})$$

e assurge a componente vettoriale $\Psi^* = \Psi^*(\mathbf{x}, t)$ ridotta a parte del campo delle velocità avente rotore non nullo.

I potenziali $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ e $\Psi^* = \Psi^*(\mathbf{x}, t)$ così dedotti non descrivono la parte del campo delle $\mathbf{v}$ che è irrotazionale e isocora. Per quest'ultima si ricorre ad una componente armonica del potenziale scalare, come osservato nelle pagina precedenti.

Il potenziale delle accelerazioni

L'irrotazionalità del campo delle velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, di classe C^1 , implica l'esistenza di un potenziale scalare per le accelerazioni: $\mathbf{v} = \text{grad} \varphi$. Ricordando infatti l'espressione puramente vettoriale del campo delle accelerazioni (espressione di LAGRANGE):

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) \quad (\text{B-123})$$

e ponendo $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ con $\mathbf{v} = \text{grad} \varphi$, si ottiene:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}\right) \quad (\text{B-124})$$

In base alle ipotesi fatte sul campo della velocità, il potenziale di $\mathbf{a}$ è di classe C^1 e la funzione accelerazione $\mathbf{a}$ è di classe C^0 . Di conseguenza, non è assicurato a priori che il campo delle accelerazioni risulti irrotazionale (ovvero non è detto che risulti $\text{rot } \mathbf{a} = 0$). Inversamente, l'esistenza di un potenziale delle accelerazioni (si pensi, ad esempio, al moto di rotazione rigida con velocità angolare costante ω nel tempo, dove il campo delle velocità presenta un rotore di modulo 2ω) non assicura che il moto sia irrotazionale.

Di norma, invece, il campo delle accelerazioni non può essere rappresentato tramite il solo potenziale vettore (tramite quindi il rotore di un campo vettoriale). Infatti, ammesso che il campo delle velocità $\mathbf{v}$ sia di classe C^2 esisterà perciò, in generale diversa da zero, la divergenza del campo delle accelerazioni ($\text{div } \mathbf{a} \neq 0$). In particolare, per un moto irrotazionale ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$ per $\mathbf{v} = \text{grad} \varphi$) e isocoro ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) – dovendo essere $\text{div } \mathbf{v} = \text{div}(\text{grad} \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0$ – anche le componenti della velocità risulteranno funzioni armoniche (quindi con i laplaciani delle componenti delle velocità identicamente nulli ($\nabla^2 v_k = 0$)).^(xi) In tal caso, applicando l'operatore divergenza al campo delle accelerazioni:

$$\text{div } \mathbf{a} = \text{div}\left[\text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\nabla^2 \varphi}_{=0}\right) + \text{div}\left[\text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] = \nabla^2\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (\text{B-125})$$

(xi) L'armonicità del potenziale φ implica che φ stesso è analitico e risulta come tale derivabile quante volte si voglia, producendo altre funzioni armoniche attraverso le successive derivazioni: in particolare, quindi, anche le componenti delle velocità risulteranno funzioni armoniche.

Utilizzando la notazione di EINSTEIN (sugli indici ripetuti) – considerando quindi il modulo al quadrato del vettore velocità come $\|\mathbf{v}\|^2 = v^2 = v_k^2$ – sviluppando la (B-125) si ottiene:

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{v^2}{2}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(v_k^2) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2 + v_i \nabla^2 v_i \\ &= \|\text{grad} v_i\|^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{B-126}$$

Dovendo essere $\nabla^2 v_i = 0$ per l'armonicità di φ , si ottiene infine:

$$\text{div} \mathbf{a} = \nabla^2\left(\frac{v^2}{2}\right) = \sum \|\text{grad} v_i\|^2 = \|\text{grad} v_x\|^2 + \|\text{grad} v_y\|^2 + \|\text{grad} v_z\|^2 \tag{B-127}$$

con divergenza del campo delle accelerazioni necessariamente positivo, tranne nel caso di traslazione rigida (dove necessariamente deve risultare $\text{grad} v_i \equiv 0$, per $i = x, y, z$).

Sezione C

La vorticità

In questa sezione si riportano brevemente alcune osservazioni e i più importanti teoremi sulla vorticità nei moti di fluidi. In particolare, verranno presentati gli importanti teoremi di HELMHOLTZ e alcune osservazioni tipiche discusse in campo aerodinamico.

C-1 **TEOREMI SULLA VORTICITÀ**

Vengono presentati i principali teoremi a base della teoria sulla vorticità dei fluidi. In particolare, si farà cenno al teorema di LAGRANGE, sul legame fra circolazione del campo delle velocità e variazione intrinseca della circolazione del campo delle accelerazioni, e dei due teoremi di HELMHOLTZ sul bilancio della vorticità nei tubi di vortice.

Relativamente alla teoria dei vortici, sovente si utilizzano le seguenti definizioni:

- *vorticità* $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$: rotore del campo della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$;
- *zona vorticoso*: una regione del campo fluidodinamico in cui la vorticità $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ è diversa da zero;
- *linea vorticoso*: linea che risulta tangente in ogni suo punto al vettore vorticità $\mathbf{w}$;
- *tubo vorticoso* o di *vortice*: lo spazio delimitato dalle linee vorticoso passanti per una superficie regolare chiusa;
- *filletto vorticoso*: un tubo vorticoso di sezione trasversale infinitesima.

Alcune premesse

Come noto dall'Analisi matematica, per la definizione di differenziale di una funzione $\Gamma_k = \Gamma_k(x_k)$, dipendente formalmente dalla variabile indipendente x_k , è:

$$d\Gamma_k(x_k) = \frac{\partial \Gamma_k(x_k)}{\partial x_k} dx_k \quad \text{più in generale con: } k = 1, 2, 3 \ (x, y, z). \quad (\text{C-1})$$

Qualora la funzione $\Gamma_k = \Gamma_k(x_k)$ sia una funzione integrale (circolazione), il cui dominio di integrazione sia riconducibile a una funzione delle stesse x_k (ad esempio una linea L chiusa regolare esprimibile come funzione $L = L(x_k)$), la (C-1) potrà esprimersi come:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_L v_k(x_k) dx_k \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\oint_L v_k(x_k) dx_k \right) \frac{dx_k}{dt} = v_k(x_k) \frac{dx_k}{dt}. \quad (\text{C-2})$$

Analogamente, si ha evidentemente per definizione di integrale di un differenziale:

$$\oint_L d \left[v_k(x_k) \frac{dx_k}{dt} \right] = v_k(x_k) \frac{dx_k}{dt}. \quad (\text{C-3})$$

Dal confronto fra queste due ultime relazioni, si deduce il legame differenziale:

$$\frac{D}{Dt} \left(\oint_L v_k(x_k) dx_k \right) = \oint_L \frac{D}{Dt} [v_k(x_k) dx_k], \quad \text{con la funzione: } L = L(x_k), \quad (\text{C-4})$$



Sommando infine sull'indice k -esimo ($k = 1, 2, 3$ oppure x, y, z) e passando ai prodotti scalari di vettori:

$$\frac{D(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x})}{Dt} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}. \quad (\text{C-11})$$

Dovendo considerare, per le ipotesi di costruzione assunte, la relazione $dx_i = v_i dt$ e quindi la corrispettiva forma vettoriale $d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$, si ha:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2}d(v_k^2) = \frac{1}{2}d(v^2) = \frac{1}{2}dv^2. \quad (\text{C-12})$$

Partendo dalla (C-5) e tenendo conto della (C-11), si arriva a scrivere:

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_L \frac{D(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x})}{Dt} \Rightarrow \frac{D}{Dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \oint_L dv^2. \quad (\text{C-13})$$

Si osserva immediatamente che, essendo la circuitazione eseguita su una linea L chiusa e regolare, l'ultimo integrale a II membro è identicamente nullo perché un differenziale esatto (dipende quindi solo dal punto iniziale al punto iniziale che, una qualsiasi linea regolare chiusa, porta loro a coincidere). Pertanto, intendendo il dominio di integrazione quale linea regolare chiusa, costituita sempre e solo dai medesimi elementi fluidi in moto nel dominio, si ottiene la relazione fondamentale:

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \oint_L \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{C-14})$$

Su quest'ultima formulazione integrale si basa l'enunciato del teorema di LAGRANGE sull'esistenza del potenziale e i relativi teoremi di HELMHOLTZ.

Teorema di LAGRANGE: esistenza del potenziale del campo delle velocità

Se l'accelerazione $\mathbf{a}$ ammette potenziale $\varphi_a = \varphi_a(\mathbf{x}, t)$, allora scelta una qualsiasi linea L chiusa e regolare (fra infinite analoghe linee reciprocamente sovrapponibili per deformazione continua, e riconducibili ad un punto, senza uscire dal dominio nel quale è definito il moto) risulta sempre nullo il valore della circolazione:

$$\oint_L \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \oint_L \text{grad} \varphi_a(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \oint_L d\varphi_a(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (\text{C-15})$$

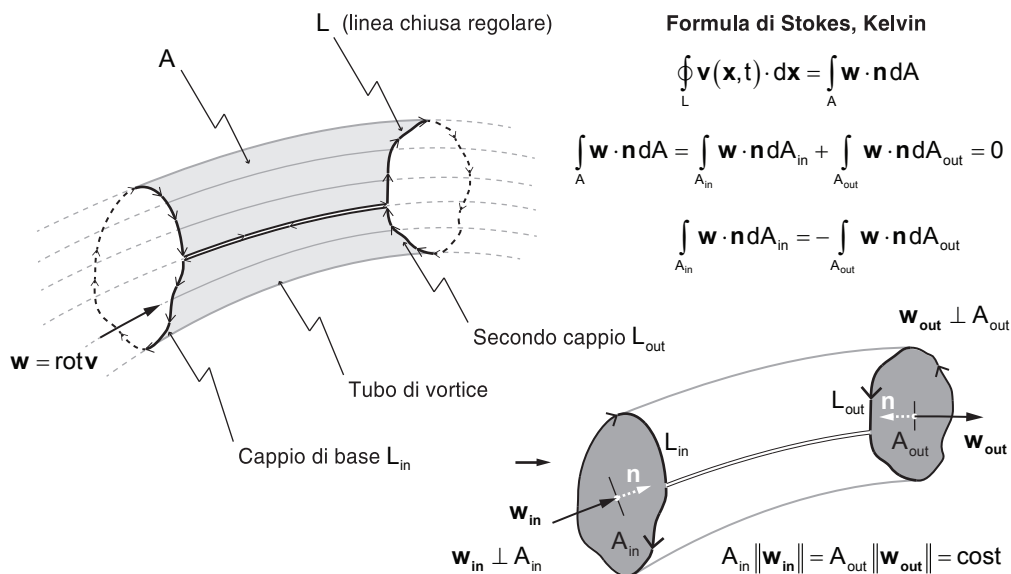
Stante la relazione integrale (C-14), allora risultando:

$$\frac{D}{Dt} \oint_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \oint_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \text{cost}, \quad (\text{C-16})$$

si ha che la circolazione del campo delle velocità lungo ciascuna delle suddette linee L muta nel tempo allo stesso modo per tutte le curve L . Pertanto, l'esistenza del potenziale delle accelerazioni durante un intervallo di tempo finito che comprenda un particolare istante t_0 assicura che anche il campo delle velocità ammetta potenziale nello stesso periodo di tempo sempre che lo ammetta all'istante t_0 . Avendo in particolare supposto che $\mathbf{v}$ sia di classe C^1 , si può esprimere lo stesso fatto dicendo che il moto si mantiene irrotazionale (quindi con $\text{rot} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad} \varphi$) per tutto un periodo limitato di tempo, se è tale in un istante e se presenta accelerazione costantemente dotata di potenziale: in tal caso, infatti, la costante nella (C-16) è pari proprio a zero.

Figura C-1

Porzione di tubo di vortice.

**Teorema di Kelvin**

Si può anche osservare che, indipendentemente dall'irrotazionalità del moto (potendo quindi essere anche $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ e quindi senza l'esistenza di un potenziale scalare per il campo della velocità), la circolazione della velocità lungo ciascuna linea chiusa in moto con il fluido si mantiene inalterata nel tempo, purché il potenziale delle accelerazioni risulti univoco durante lo stesso intervallo finito di tempo (in tal caso, la costante nella (C-16) presenterà valore finito diverso da zero).

Primo teorema di HELMHOLTZ

In virtù della formula integrale di STOKES-KELVIN:

$$\oint_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} = \int_A \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{C-17})$$

eseguita la circolazione $\Gamma_{v,L}$ del campo della velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ lungo una linea L chiusa e regolare (riducibile ad un punto, rimanendo sempre all'interno del dominio di esistenza del fluido), si ha che tale valore è pari al flusso del rotore del campo della velocità stessa attraverso una qualsiasi superficie regolare (aperta) A che abbia proprio la curva L come contorno di estremità (o di base). In particolare, la forma della (C-17) fa riferimento implicitamente a un versore $\mathbf{n}$ diretto perpendicolarmente su ogni punto della superficie A e con verso tale da veder percorrere – immaginando di stare sulla freccia del versore $\mathbf{n}$ – la linea di base L in senso antiorario. In maniera formalmente sintetica, la relazione (C-17) viene posta in questi termini:

$$\Gamma_{v,L} = \Phi_{w,A}, \quad (\text{C-18})$$

intendendo che la circolazione del campo delle velocità $\mathbf{v}$ attorno alla linea L chiusa e regolare misura (in ogni istante) il flusso del vettore $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$ attraverso la superficie A (aperta), concatenata con la linea chiusa regolare L . Si osserva intanto che, per ciascuna curva regolare e chiusa L_∂ che sia concatenata a una porzione di parete (fissa di superficie

Per il teorema di D'ALEMBERT, trattandosi di fluido ideale, non si può registrare variazione della quantità di moto in direzione parallela alla velocità asintotica. Rimane quindi necessariamente non nulla – per poter avere una portanza in direzione z non nulla – la variazione della quantità di moto lungo l'asse delle z appunto. La portata netta di quantità di moto, in direzione z , uscente attraverso la superficie esterna del cilindroide $dA = b dL$ (che ha quindi L come direttrice) vale:

$$[\hat{Q}_u - \hat{Q}_i]_z = \left(- \oint_L \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) b dL \right)_z = - b \oint_L \rho v_z \mathbf{i}_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dL \quad (C-63)$$

in termini appunto di relativa componente vettoriale secondo l'asse z , essendo il campo generale della velocità nel piano del disegno dato da $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} = \mathbf{i}_\ell v_\ell + \mathbf{i}_z v_z$.

Per costruzione, sulla linea (cappio) di circuitazione L (che per quanto visto nella (C-60) può essere scelta arbitrariamente attorno al profilo alare), il campo delle velocità si confonde già con la velocità asintotica $\mathbf{v}_\ell \equiv \overline{\mathbf{v}}_\ell$. Pertanto, la relazione (C-63) si può specializzare nella forma:

$$[\hat{Q}_u - \hat{Q}_i]_z = - b \oint_L \rho v_z \mathbf{i}_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dL = - \mathbf{i}_z b v_\ell \oint_L \rho v_z \cos \vartheta dL, \quad (C-64)$$

avendo indicato con ϑ l'angolo descritto dal vettore $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, sul punto $\mathbf{x}$ della linea L , per portarlo sovrapposto ed equiverso al versore $\mathbf{n}$ per il medesimo punto $\mathbf{x}$ e perpendicolarmente alla linea L stessa, per cui sulla linea di circuitazione è:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_L = v_z \cos \vartheta.$$

Analizzando la Figura C-5 a pagina c-18, si riconosce che su un qualsiasi punto $\mathbf{x}$ sulla linea di circuitazione L è anche:

$$(v_z \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{x} = v_z \cos \vartheta \Rightarrow \oint_L v_z \cos \vartheta dL = \oint_L (v_z \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{x}. \quad (C-65)$$

Si osserva inoltre che la circuitazione del vettore asintotico costante $\mathbf{v}_\ell \equiv \overline{\mathbf{v}}_\ell$ su L è evidentemente nulla, per cui ritorna un integrale chiuso di un differenziale esatto:

$$\oint_L \mathbf{v}_\ell \cdot d\mathbf{x} = \oint_L (v_\ell \mathbf{i}_\ell) \cdot d\mathbf{x} = \overline{v}_\ell \oint_L \mathbf{i}_\ell \cdot d\mathbf{x} = \overline{v}_\ell \oint_L dL \equiv 0. \quad (C-66)$$

D'altronde, per definizione generale di circuitazione $\Gamma_{v,L,i}$ del campo delle velocità $\mathbf{v}$ sul circuito chiuso e regolare L , si può scrivere:

$$\Gamma_{v,L,i} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_L (v_\ell \mathbf{i}_\ell) \cdot d\mathbf{x} + \oint_L (v_z \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{x} \Rightarrow \Gamma_{v,L,i} = \oint_L v_z \cos \vartheta dL. \quad (C-67)$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella (C-64), si ottiene:

$$[\hat{Q}_u - \hat{Q}_i]_z = - \mathbf{i}_z b v_\ell \oint_L \rho v_z \cos \vartheta dL = - \mathbf{i}_z b \rho v_\ell \Gamma_{v,L,i} \quad (C-68)$$

quale componente vettoriale di variazione netta della portata di quantità di moto, relativa al volume cilindroide di fluido che avvolge il profilo alare, diretta lungo la direzione negativa dell'asse z . A questa quantità vettoriale corrisponde quindi, notoriamente, una componente vettoriale di risultante di forze agenti su tutto lo sviluppo b del volume fluido cilindroide cavo. Poiché la risultante delle forze di pressione, esercitate dal profilo alare sul volume



fluido con cui è in contatto (perché in esso immerso), è uguale ed opposta alla risultante delle forze di pressione che il fluido cilindroide cavo esercita sul profilo alare che avvolge, si ha che la quest'ultima risultante delle forze di pressione determina la portanza agente sul profilo alare che deve quindi essere diretta in verso opposto (rispetto alla (C-68)): lungo il verso delle z positive.

➡ IMPORTANTE

In conclusione, per il profilo alare, risultando investito da una corrente asintotica di velocità $\mathbf{v}_\ell = \mathbf{i}_\ell v_\ell \equiv \mathbf{i}_\ell \bar{v}_\ell$, in condizioni di fluido ideale a densità costante con fluido in moto permanente e irrotazionale, si presenta un'azione portante (diretta nel verso delle z crescenti), per unità di profondità del profilo alare stesso, pari a:

$$\frac{\mathbf{R}_z}{b} = \mathbf{i}_z \rho \bar{v}_\ell \Gamma_{v,L,i} \Rightarrow \frac{R_z}{b} = \rho \bar{v}_\ell \Gamma_{v,L,i} \quad (\text{C-69})$$

confermando i risultati ottenuti per altra via, nei paragrafi precedenti.



RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

CAPUTO C., *Le Turbomacchine*, vol. II, Masson Editoriale ESA, Milano, 1994.

CENEDESE A., *Meccanica dei Fluidi*, McGraw-Hill, Milano, 2003.

CITRINI D., NOSEDA G., *Idraulica*, CEA-Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1987.

ÇENGEL YUNUS A., CİMBALA JOHN M., *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, McGraw-Hill, New York, 2006.

MARCHI E., RUBATTA A., *Meccanica dei Fluidi, Principi e applicazioni*, UTET, Torino, 1997.