

Tecnica delle Costruzioni

Dimensionamento strutture
secondo Norme Tecniche ed Eurocodici



Carlo Sigmund

Quaderno Tecnico - #1

Elementi Piastra e Tubi

Ingegneria

Civile & Ambientale
Strutture

[Link per acquisto online formato stampato @lulu.com](https://www.lulu.com)

Prima edizione

● Stampato ●

Copia (PARZIALE) di valutazione - Dicembre 2015

EUROCODES SPREADSHEETS STRUCTURAL DESIGN
© 2014 di Carlo Sigmund. Tutti i diritti riservati.
Via Primo Maggio 28/3 - 33017 Tarcento (UD)
info.soft.sigmund@tiscali.it
<http://eurocodespreadsheets.jimdo.com/eurocodes-spreadsheets/>

Editore e autore: Carlo Sigmund

Foto in copertina:
<http://www.fastcodesign.com/3050220/a-swirling-skyscraper-built-from-cargo-containers#3>

Prima edizione, Gennaio 2016
Formato cartaceo

Sigmund, Carlo
Dimensionamento strutture secondo Eurocodici e normativa italiana

Titolo del libro: *Tecnica delle Costruzioni - Quaderno Tecnico N.1 - Elementi Piastra e Tubi Strutture; Progettazione; Eurocodici Strutturali CEN TC/250.*

Nessuna parte del presente documento può essere riprodotta, memorizzata in un sistema che ne permetta l'elaborazione, né trasmessa in qualsivoglia forma e con qualsivoglia mezzo elettronico o meccanico, né può essere fotocopiata, riprodotta o registrata altrimenti, senza previo consenso scritto dell'editore, tranne nel caso di brevi citazioni contenute in articoli di critica o recensioni.

La presente pubblicazione contiene le opinioni dell'autore e ha lo scopo di fornire informazioni precise e accurate. L'elaborazione dei testi, anche se curata con scrupolosa attenzione, non può comportare specifiche responsabilità in capo all'autore e/o all'editore per eventuali, errori, refusi e/o inesattezze. L'autore detiene i diritti per tutti i testi, le tabelle e le illustrazioni contenute in questo documento.

Quaderno Tecnico n. 1
Elementi Piastra e Tubi

Sommario

| | | | |
|---|-----------|--|-----------|
| 1. Cenni sulla teoria delle piastre in regime elastico lineare | 7 | <i>Formule di calcolo per le massime sollecitazioni e deformazioni</i> | 34 |
| 1-1 Schematizzazione della struttura e relative ipotesi | 8 | <i>Tabelle di calcolo con schemi di vincolo</i> | 35 |
| <i>Ipotesi fondamentali</i> | 8 | 2-2 Calcolo delle sollecitazioni secondo il metodo di Grashov | 44 |
| 1-2 Equazione di Lagrange | 9 | <i>Ipotesi alla base del calcolo</i> | 44 |
| <i>Procedura per il calcolo dell'equazione delle piastre</i> | 9 | <i>Formule di calcolo e schemi di vincolo</i> | 45 |
| 1-3 Momenti principali: formalismo di Mohr | 15 | 2-3 Calcolo mediante l'uso delle tabelle di Bittner | 51 |
| <i>Equazioni di equilibrio: momenti principali e linee isostatiche</i> | 16 | <i>Piastra quadrata in semplice appoggio su tutti i bordi</i> | 52 |
| 1-4 Variazioni di temperatura nelle piastre | 19 | <i>Piastra rettangolare appoggiata lungo tutti i bordi</i> | 55 |
| <i>Variazione uniforme sull'intera piastra</i> | 19 | <i>Piastra rettangolare perfettamente incastrata su tutti i lati</i> | 62 |
| <i>Variazione uniforme sullo spessore ma variabile con x,y</i> | 21 | 2-4 Calcolo mediante l'utilizzo delle tabelle di Bares | 74 |
| <i>Gradiente termico attraverso lo spessore</i> | 21 | <i>Piastra appoggiata su tre lati e quarto lato libero</i> | 75 |
| 1-5 Piastre quadrangolari: condizioni al contorno | 24 | 3. Piastre circolari assialsimmetriche | 79 |
| <i>Bordo appoggiato</i> | 24 | 3-1 L'equazione delle piastre assialsimmetriche | 80 |
| <i>Bordo incastrato</i> | 26 | <i>Espressioni delle sollecitazioni flettenti</i> | 80 |
| <i>Bordo libero</i> | 27 | <i>Espressioni delle curvature</i> | 81 |
| 1-6 Cenni sui metodi di soluzione dell'equazione della piastra | 27 | <i>Espressioni dei momenti flettenti in funzione di w</i> | 82 |
| <i>Soluzione secondo il procedimento di Navier</i> | 27 | <i>Equazione di equilibrio alle rotazioni</i> | 82 |
| <i>Soluzione secondo il procedimento di Lévy</i> | 31 | <i>Equazione di equilibrio alla traslazione</i> | 83 |
| 2. Calcolo rapido delle sollecitazioni nelle piastre quadrangolari | 33 | <i>Equazione della componente di deformazione w</i> | 84 |
| 2-1 Piastre rettangolari con carico distribuito uniforme | 34 | 3-2 Condizioni al contorno | 84 |
| | | <i>Bordo esterno incastrato</i> | 85 |
| | | <i>Bordo esterno appoggiato</i> | 87 |

| | | | |
|---|------------|--|-----|
| 4. Tubi a parete sottile in regime flessionale assialsimmetrico | 93 | <i>Pressione di esercizio</i> | 140 |
| 4-1 Posizione del problema, ipotesi e schematizzazione | 94 | <i>Pressione nominale</i> | 141 |
| <i>Schematizzazione matematica del problema</i> | 94 | <i>Entità della pressione equivalente</i> | 142 |
| <i>Rigidità elastica degli anelli</i> | 95 | <i>Limitazione delle sovrappressioni da "colpo d'ariete"</i> | 142 |
| <i>Rigidità elastica delle strisce</i> | 96 | <i>Posa e pressione in fase di collaudo</i> | 142 |
| <i>Equazione differenziale elementi cilindrici "a parete sottile"</i> | 96 | 5-2 Assesti e azioni sulle tubazioni interrato | 143 |
| <i>Rapporto delle deformazioni in regime assialsimmetrico</i> | 97 | <i>Condizioni di posa</i> | 143 |
| 4-2 Soluzioni integrali (tubi lunghi, tubi corti) | 98 | <i>Posa in trincea stretta</i> | 144 |
| <i>Integrale generale della soluzione $w(z)$</i> | 99 | <i>Posa in trincea larga e posa con rinterro indefinito</i> | 148 |
| <i>Integrale particolare della soluzione $w(z)$</i> | 101 | <i>Posa in trincea stretta con rinterro indefinito</i> | 150 |
| 4-3 Condizioni al contorno e coefficienti elastici | 101 | 5-3 Proprietà elastiche dei materiali per le condotte interrato | 154 |
| <i>Convenzione sui segni e relative funzioni per M e V</i> | 102 | <i>Moduli elastici per le tubazioni</i> | 154 |
| <i>Determinazione dei coefficienti elastici (per elementi cilindrici lunghi)</i> | 103 | <i>Moduli di elasticità normale dei terreni</i> | 154 |
| <i>Particolari condizioni al contorno</i> | 106 | 5-4 Distribuzioni delle azioni verticali sulle tubazioni | 156 |
| <i>Equazioni di congruenza (approssimazione per tubi lunghi)</i> | 110 | <i>Distribuzione delle azioni dovute al rinterro</i> | 156 |
| 4-4 Sollecitazioni per gradienti di tipo termico | 126 | <i>Reazioni verticali delle aree di appoggio all'azione del rinterro</i> | 157 |
| <i>Variazioni di temperatura su corpo non iperstatico</i> | 126 | <i>Distribuzione delle azioni dovute ai variabili fissi e mobili in superficie</i> | 158 |
| <i>Variazioni di temperatura su tubo iperstatico</i> | 127 | 5-5 Formule per il calcolo e la verifica: teoria di De Saedeleer | 161 |
| <i>Equazioni delle deformazioni in regime pressorio e termico</i> | 128 | <i>Reazioni orizzontali del terreno per unità di lunghezza del tubo</i> | 162 |
| <i>Equazioni delle deformazioni in regime termico come dominante</i> | 129 | <i>Calcolo delle sollecitazioni flettenti nelle sezioni significative del tubo</i> | 169 |
| 5. Calcoli statici sulle tubazioni interrato: cenni teorici e formule pratiche | 139 | <i>Calcolo della massima tensione di trazione di progetto</i> | 171 |
| 5-1 Premessa: valori delle pressioni in tubazione | 140 | <i>Calcolo della massima pressione di esercizio</i> | 171 |
| | | 5-6 Verifica massime deformazioni e instabilità elastica | 176 |
| | | <i>Verifica all'ovalizzazione della tubazione</i> | 177 |
| | | <i>Verifica all'instabilità elastica per depressione interna</i> | 181 |

1

Cenni sulla teoria delle piastre in regime elastico lineare

| | | |
|------------|--|----|
| 1-1 | SCHEMATIZZAZIONE DELLA STRUTTURA E RELATIVE IPOTESI | 8 |
| | <i>Ipotesi fondamentali</i> | 8 |
| 1-2 | EQUAZIONE DI LAGRANGE | 9 |
| | <i>Procedura per il calcolo dell'equazione delle piastre</i> | 9 |
| 1-3 | MOMENTI PRINCIPALI: FORMALISMO DI MOHR | 15 |
| | <i>Equazioni di equilibrio: momenti principali e linee isostatiche</i> | 16 |
| 1-4 | VARIAZIONI DI TEMPERATURA NELLE PIASTRE | 19 |
| | <i>Variazione uniforme sull'intera piastra</i> | 19 |
| | <i>Variazione uniforme sullo spessore ma variabile con x, y</i> | 21 |
| | <i>Gradiente termico attraverso lo spessore</i> | 21 |
| 1-5 | PIASTRE QUADRANGOLARI: CONDIZIONI AL CONTORNO | 24 |
| | <i>Bordo appoggiato</i> | 24 |
| | <i>Bordo incastrato</i> | 26 |
| | <i>Bordo libero</i> | 27 |
| 1-6 | CENNI SUI METODI DI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA PIASTRA | 27 |
| | <i>Soluzione secondo il procedimento di Navier</i> | 27 |
| | <i>Soluzione secondo il procedimento di Lévy</i> | 31 |

Fra le strutture bidimensionali o di superficie, in cui una dimensione è alquanto minore delle altre due, si definiscono *piastre* quelle la cui superficie media è piana risultando caricate prevalentemente da forze agenti perpendicolarmente a tale superficie. Generalmente, nello studio di tali elementi strutturali, si riferisce la piastra ad una terna di assi cartesiani x, y giacenti nel suo *piano medio*.

Lo spessore della piastra può variare da punto a punto purché questo si mantenga sempre piccolo e la sua variazione avvenga con continuità e simmetricamente rispetto a un piano medio. In questo documento si tratteranno solo piastre a spessore costante. Lo spessore della piastra è considerato sufficientemente piccolo ma non tale da rendere trascurabile la rigidità flessionale della piastra stessa: si studieranno quindi degli elementi *piastra* e non quelli detti più specificatamente come *membrana*.

I carichi, come si è anticipato, devono essere perpendicolari al suo piano medio. Quando invece le forze esterne sono contenute nel piano medio, tali elementi strutturali vengono denominati *lastre*. In questo documento, non si tratterà degli elementi *lastra*. Nella teoria

delle *piastre*, si affronta il problema di determinare lo stato tensionale e le deformazioni dell'elemento *piastra* una volta che siano assegnati i carichi e le condizioni vincolari al contorno.

Viene introdotta l'ipotesi fondamentale di KIRCHOFF che consiste nel ritenere che un qualsiasi segmento perpendicolare al piano medio (e quindi di lunghezza pari allo spessore della piastra) si mantiene rettilineo e perpendicolare al piano medio anche dopo la deformazione.

Quest'assunzione trova fondamento nel fatto che quanto più piccolo è lo spessore della piastra tanto maggiori risultano in essa le deformazioni ϵ per tensioni normali σ (di *membrana*) rispetto alle distorsioni γ per tensioni tangenziali di taglio e torsione.

1-1 SCHEMATIZZAZIONE DELLA STRUTTURA E RELATIVE IPOTESI

L'ipotesi di KIRCHOFF di rettilinearità dei segmenti ortogonali al piano medio della piastra consente di descrivere le deformazioni e le tensioni mediante un'unica funzione delle coordinate del piano medio: l'abbassamento $w = w(x, y)$ lungo l'asse z perpendicolare al piano iniziale di giacitura supposto coincidente con il piano x, y . L'equazione della piastra viene quindi espressa mediante la funzione che rappresenta lo spostamento secondo l'asse z del generico punto P , appartenente al piano medio.

Questo spostamento deve essere piccolo, come tutti gli spostamenti elastici, in confronto alle dimensioni della piastra ed in particolare in confronto allo spessore. È lecito considerare che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, gli spostamenti del punto P secondo x e y siano praticamente nulli in analogia con la curva elastica della teoria della trave: il punto P del piano medio quindi si abbassa solo di $w(x, y)$.

Il segmento passante per P quindi può solo ruotare attorno ad esso dell'angolo di inflessione della piastra φ (che può considerarsi scomposto nelle due rotazioni componenti φ_x e φ_y).



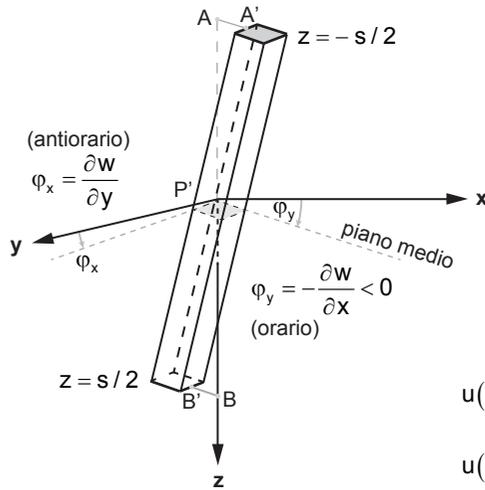
Ipotesi fondamentali

La schematizzazione della struttura piastra è basata sulle seguenti ipotesi:

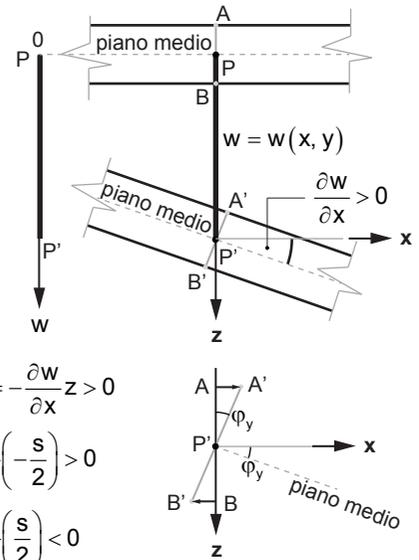
- il materiale è omogeneo, isotropo ed elastico lineare;
- lo spessore della piastra è contenuto, ma non troppo da rendere trascurabile la rigidezza flessionale della piastra stessa;
- le deformazioni sono relativamente piccole rispetto alle dimensioni della struttura e una trattazione del I ordine è sufficientemente approssimata: sollecitazioni riferite alla configurazione non deformata;
- le reazioni di vincolo lungo i bordi della piastra non ostacolano gli spostamenti nel piano medio: non forniscono componenti di reazione contenute nel piano stesso;
- come conseguenza delle due ipotesi ora specificate, deriva la conseguenza che le tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ sono nulle nel piano medio della piastra;
- validità dell'ipotesi di KIRCHOFF: immaginando di isolare un elementino infinitesimo di forma parallelepipedica orientato secondo gli assi di riferimento x, y, z , di base $dx dy$ ed altezza pari allo spessore s della piastra, gli spigoli di questo restano rettilinei nella configurazione deformata e perpendicolari alla superficie secondo cui si deforma il piano medio;
- le tensioni σ_z lungo la direzione perpendicolare al piano x, y di giacitura iniziale della piastra (quindi indeformata) sono praticamente trascurabili rispetto alle altre;

Figura 1-1

Deformazione del parallelepipedo elementare secondo l'ipotesi di KIRCHOFF. Sistema di riferimento x, y, z con piano x, y coincidente con il piano medio della piastra indeformata.



Ipotesi di Kirchoff: $AA' = B'B$



$$u(A') = \varphi_y z = -\frac{\partial w}{\partial x} z > 0$$

$$u(A') = -\frac{\partial w}{\partial x} \left(-\frac{s}{2}\right) > 0$$

$$u(B') = -\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{s}{2}\right) < 0$$

- carichi localizzati su aree molto ristrette, di dimensioni inferiori allo spessore s della piastra, vengono trattati come casi limite.

1-2 EQUAZIONE DI LAGRANGE

Stante le ipotesi sopra elencate, il problema iperstatico di una porzione arbitraria di piastra comunque caricata e vincolata si affronta mediante il cosiddetto *metodo dell'equilibrio*. È inoltre sufficiente assumere come unica incognita l'abbassamento w lungo l'asse z del punto generico P del piano medio.

Si tratta di una funzione $w = w(x, y)$ di due variabili e si otterrà un'equazione differenziale alle derivate parziali che esprime l'equilibrio in direzione z delle forze agenti sul parallelepipedo elementare di volume $dV = s dA = s dx dy$, essendo s lo spessore finito della piastra.

Procedura per il calcolo dell'equazione delle piastre

Innanzitutto, si farà coincidere il piano medio della piastra indeformata con il piano x, y del sistema di riferimento cartesiano. Per esprimere l'equazione di LAGRANGE in funzione della sola funzione incognita $w(x, y)$ si seguirà il seguente percorso:

- utilizzando l'ipotesi di KIRCHOFF, si determinano gli spostamenti u, v del generico punto P' a quota z dal piano medio e in funzione di $w(x, y)$;
- si utilizzano le equazioni di congruenza (dalla Scienza delle Costruzioni) del mezzo continuo per delineare le espressioni delle deformazioni unitarie ε e γ in funzione di u, v e quindi di w ;
- si introducono le ipotesi di omogeneità, isotropia ed elasticità lineare – equazioni di LAMÈ o legge di HOOKE inversa a coefficienti costanti – per dedurre le tensioni σ e τ in funzione delle deformazioni unitarie ε e γ , quindi di w ;
- si definiscono le espressioni dei momenti flettenti M_x, M_y e dei momenti torcenti M_{xy} in funzione di w , imponendo le equazioni di equilibrio alla rotazione del parallelepipedo elementare;

- si impone l'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione dell'asse z del parallelepipedo elementare, tra le risultanti dei tagli Z_x e Z_y (paralleli all'asse z) e il carico $p(x, y)$ agente su una delle due superfici della piastra.

Di seguito, nell'ordine, il dettaglio dei passi sopra enunciati.

- ⇒ 1 **Funzioni spostamento.** Il segmento \overline{AB} , nel passaggio alla configurazione deformata ruota mantenendosi rettilineo (si veda Figura 1-1). In questo modo, i punti non appartenenti al piano medio presenteranno componenti di spostamento u e v secondo gli assi x e y rispettivamente.

Poiché per definizione, il segmento $\overline{A'B'}$ è perpendicolare al piano medio deformato, la sua rotazione può essere considerata scomposta da due rotazioni componenti φ_x e φ_y che corrispondono all'inclinazione della superficie del piano medio secondo i due assi x e y rispettivamente:

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (1-1)$$

dove gli angoli di rotazione φ sono positivi se concordi al verso dei rispettivi assi. In virtù dell'ipotesi di KIRCHOFF, un qualsiasi spigolo del parallelepipedo elementare durante la deformazione si mantiene rettilineo, quindi il punto generico P' a distanza z dal piano medio subisce i seguenti spostamenti:

$$\begin{cases} u = z\varphi_y = -z\frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z\varphi_x = -z\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1-2)$$

I segni "meno" dipendono dal fatto che le due componenti sono negative per punti della piastra a quote $z > 0$ e per valori positivi delle derivate parziali di w , come risulta dalla Figura 1-1. In altre parole, rotazioni positive φ_y per punti a quote $z > 0$ risultano componenti $u > 0$ di medesimo verso dell'asse x ; viceversa, rotazioni positive φ_x per punti a quote $z > 0$ risultano componenti $v < 0$ di verso opposto all'asse y .

- ⇒ 2 **Equazioni di congruenza.** Le equazioni di congruenza del mezzo continuo elastico, che legano gli spostamenti u , v alle deformazioni unitarie assiali ε e alle deformazioni unitarie di scorrimento γ , si riprendono dalla *Scienza delle Costruzioni*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \dots \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \dots \end{aligned}$$

sostituendovi le espressioni di u e v ora trovate, si ottiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (1-3)$$

- ⇒ 3 **Tensioni unitarie.** Dalle deformazioni così ottenute, si ricavano le espressioni delle tensioni unitarie applicando la forma inversa della legge di HOOKE (equazioni di LAMÈ). Tenendo appunto conto che nel caso delle piastre è $\sigma_z = 0$, si scriverà:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yx} = G\gamma_{yx}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}\end{aligned}\quad (1-4)$$

Moltiplicando la seconda equazione per ν e sommando membro a membro con la prima, si ottiene:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y).\quad (1-5)$$

Analogamente, moltiplicando la prima per ν e sommando membro a membro con la seconda, si ottiene:

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x).\quad (1-6)$$

Sostituendo le (1-3) nelle ultime delle (1-4) e nelle (1-5) e (1-6), si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1 - \nu^2}z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{E}{1 - \nu^2}z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E}{2(1 + \nu)}2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E}{1 + \nu}z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

- ⇒ 4 **Espressioni delle sollecitazioni flettenti e torcenti.** In base alle espressioni trovate, congiuntamente all'ipotesi di KIRCHOFF in elasticità lineare, le tensioni σ e τ si annullano nel piano medio della piastra (quindi per $z = 0$) perché nel piano medio non ci sono mai sforzi di membrana che sono quindi lineari con l'incognita z stessa.

Si possono quindi ricavare le espressioni dei momenti flettenti e torcenti. In particolare, indicati con $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ e $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$ i valori assoluti delle massime tensioni ai lembi della piastra, per la sollecitazione flettente elementare dM_x si ha (si vedano schemi in Figura 1-2) in campo lineare delle tensioni:

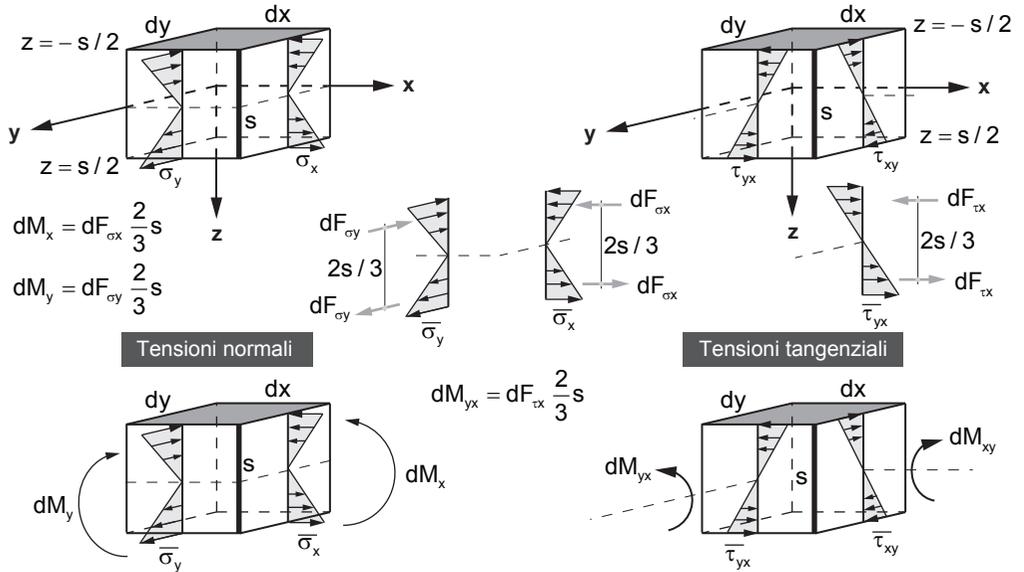
$$dM_x = dF_{\sigma_x} \frac{2s}{3} = \left(\frac{1}{2} \bar{\sigma}_x dy \frac{s}{2} \right) \frac{2s}{3} = \left(\frac{1}{6} s^2 \bar{\sigma}_x \right) dy\quad (1-7)$$

che, per unità di larghezza in direzione y , assume il valore finito:

$$M_x = \bar{\sigma}_x \frac{s^2}{6},\quad (1-8)$$

Figura 1-2

Sollecitazioni flettenti e torcenti, in equilibrio con le relative tensioni lineari, sul generico parallelepipedo elementare.



avendo indicato con il simbolo M_x il momento risultante flettente delle tensioni di membrana σ_x che agiscono sulla faccetta di normale x , poiché questo è il simbolismo utilizzato da quasi tutti gli autori per l'analisi delle piastre.

Questo momento M_x agisce attorno all'asse y e quindi il suo vettore rappresentativo è parallelo a quest'ultimo asse; il simbolismo adottato, pertanto, è diverso da quello usato in *Scienza delle Costruzioni*. Analogamente, alle tensioni di membrana σ_y è associato il momento flettente elementare dM_y che, per unità di larghezza lungo x assume il valore finito:

$$M_y = \bar{\sigma}_y \frac{s^2}{6}. \tag{1-9}$$

Per quanto riguarda i momenti torcenti $M_{xy} = M_{yx}$, stante la validità della relazione di *reciprocità del taglio* (equilibrio delle rotazioni per il generico elementino infinitesimo: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$), la trattazione è analoga a quella delle sollecitazioni flettenti, in virtù della linearità delle tensioni. Ad esempio, per il momento torcente M_{yx} si scriverà:

$$dM_{yx} = dF_{\tau_{yx}} \frac{2s}{3} = \left(\frac{1}{2} \bar{\tau}_{yx} dx \frac{s}{2} \right) \frac{2s}{3} = \left(\frac{1}{6} s^2 \bar{\tau}_{yx} \right) dx, \tag{1-10}$$

da cui, per unità di larghezza lungo x assume il valore finito:

$$M_{yx} = \bar{\tau}_{yx} \frac{s^2}{6} \Rightarrow M_{xy} = \bar{\tau}_{xy} \frac{s^2}{6}, \text{ con } M_{yx} = M_{xy} \text{ perché è: } \bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} \tag{1-11}$$

In base agli schemi in Figura 1-2, i momenti flettenti sono positivi se risultano tese le fibre inferiori (come nelle travi); i momenti torcenti, sulle faccette a distanze dx e dy dall'origine degli assi locali, hanno verso tale che le tensioni tangenziali massime nelle fibre più distanti a quota $z = s/2$ risultino equiversi agli assi locali x e y . I valori assoluti delle massime tensioni $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ e $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$ ai lembi della piastra si ottengono numericamente attribuendo alla variabile z il valore $z = s/2$ nelle espressioni delle tensioni in funzione di w :

$$\bar{\sigma}_x = - \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{s}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \bar{\sigma}_y = - \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{s}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \tag{1-12}$$

$$\overline{\tau_{xy}} = \overline{\tau_{yx}} = -\frac{E}{1+\nu} \frac{s}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1-13)$$

Le espressioni dei momenti in funzione di w si ottengono dalla sostituzione delle espressioni di σ e τ in funzione della stessa w , in quelle di M_x , M_y e $M_{xy} = M_{yx}$ in funzione di σ e τ :

$$\begin{aligned} M_x &= \overline{\sigma_x} \frac{s^2}{6} = -\frac{s^2}{6} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{s}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1-14)$$

$$M_y = \overline{\sigma_y} \frac{s^2}{6} = -\frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1-15)$$

$$M_{yx} = \overline{\tau_{yx}} \frac{s^2}{6} = -\frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1-16)$$

Indicando con D la rigidezza flessionale della piastra, in analogia alla rigidezza EJ delle travi, pari a:

$$D = \frac{E s^3}{12(1-\nu^2)},$$

ed esprimendo le derivate parziali del II ordine della funzione $w(x, y)$ in funzione delle curvature nelle direzioni x e y , le precedenti relazioni delle sollecitazioni flettenti e torcenti assumono l'aspetto:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) \quad (1-17)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \quad (1-18)$$

$$\begin{cases} M_{yx} \\ M_{xy} \end{cases} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -D(1-\nu) \frac{\partial (-\varphi_y)}{\partial y} \quad (1-19)$$

⇒ **IMPORTANTE**

Come si può notare, la generica sollecitazione flettente M_i è proporzionale alla rigidezza elastica D della piastra e alla somma della curvatura nel piano dell'asse i -esimo con la curvatura nel piano perpendicolare all'asse i -esimo moltiplicata per il coefficiente di POISSON ν . L'analogia con la teoria elastica della trave risulta evidente per il piano dell'asse i -esimo.

- ⇒ **5 Condizioni di equilibrio elementino parallelepipedo.** Si considerano ora le condizioni di equilibrio dei momenti agenti sul parallelepipedo elementare attorno agli assi x e y . Il generico parallelepipedo elementare è alto quanto lo spessore s della piastra e presenta una sezione trasversale infinitesima pari a $dA = dx dy$ che risulta costante lungo tutta l'altezza s in virtù dell'ipotesi di KIRCHHOFF. Dovendo considerare tutte le sollecitazioni che agiscono sulle quattro facce del parallelepipedo elementare, nelle equazioni di equilibrio si elidono le funzioni delle sollecitazioni agenti non incrementate sulle coppie di faccette parallele. In altri termini, nell'equazione di equilibrio intervengono di fatto solo gli incrementi differenziali delle sollecitazioni agenti. Tenendo conto che le grandezze flettenti e torcenti, precedentemente calcolate in valore finito, sono espresse in funzione di unità di

larghezza di superficie agente, sarà necessario moltiplicarle per le dimensioni dx e dy del parallelepipedo elementare se si vogliono esplicitare le equazioni di equilibrio elementari.

Mantenendo la convenzione di assumere come positivi i momenti concordi con i rispettivi assi x e y (si veda Figura 1-3), si scrivono le due equazioni dei momenti:

- attorno all'asse x :

$$\left(-\frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx + \left(-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy + (Z_y dx) dy = 0$$

- attorno all'asse y :

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - (Z_x dy) dx = 0.$$

avendo considerato rispettivamente con Z_y e Z_x le risultanti delle azioni taglianti parallele all'asse z e agenti lungo le facce trasversali del parallelepipedo elementare:

$$Z_y = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{yz} dz; \quad Z_x = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{xz} dz,$$

che contribuiscono agli equilibri alla rotazione a meno degli incrementi di ordine superiore (trascurati). Ad esempio, il contributo alle rotazioni della coppia di taglio Z_x che agisce sulle due facce (ciascuna larga dy del parallelepipedo elementare) distanti dx è dato da (si veda convenzione segni in Figura 1-3):

$$[-(Z_x + dZ_x) dy] dx \approx -(Z_x dy) dx$$

avendo trascurato l'infinitesimo del III ordine. Pertanto, considerando gli equilibri alla rotazione attorno agli assi paralleli a x e y , trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ottiene la relazione:

$$\begin{cases} Z_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Z_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{cases} \quad (1-20)$$

- ⇒ **6 Condizioni di equilibrio lungo l'asse z .** Rimane ora da stabilire l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z perpendicolare al piano medio della piastra. In questo caso, contribuiscono all'equilibrio i soli incrementi elementari delle risultanti di taglio dZ_x e dZ_y . Detta con $p = p(x, y)$ la funzione distribuzione del carico normale (pressione) sulle superfici esterne della piastra, l'equilibrio alla traslazione porge:

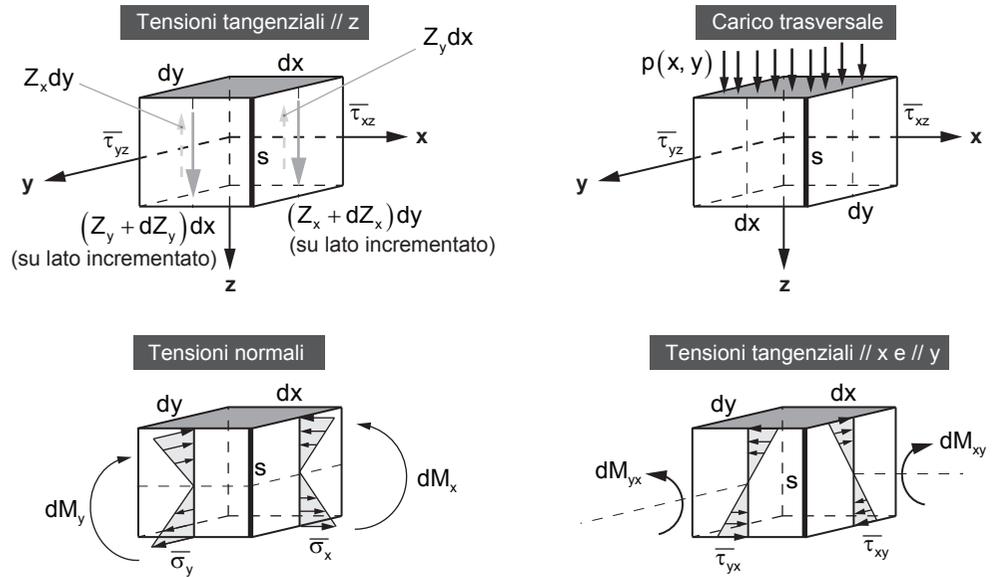
$$\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(\frac{\partial Z_y}{\partial y} dy\right) dx + p dx dy = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y}\right) = p \quad (1-21)$$

- ⇒ **7 Equazione di Lagrange.** Sostituendo nell'Eq. (1-21) le espressioni (1-20) e tenendo conto delle relazioni da (1-17) a (1-19), si ottiene l'equazione alle derivate parziali di IV grado nell'incognita $w(x, y)$:

$$p = -\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1-22)$$

Figura 1-3

Verso di azione delle sollecitazioni flettenti, torcenti e delle risultanti delle azioni di taglio.



che spesso viene indicata con la forma compatta:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (1-23)$$

L'equazione (1-23), una volta risolta tenendo conto delle opportune condizioni al contorno, fornisce la funzione $w = w(x, y)$. Da questa, per mezzo delle relazioni da (1-17) a (1-19) si ottengono le funzioni delle caratteristiche della sollecitazione M_x , M_y e $M_{xy} = M_{yx}$. Da queste, poi, tramite la (1-20) si ottengono i valori dei tagli Z_x e Z_y .

La soluzione dell'equazione di Lagrange per le piastre è, nella maggior parte dei casi, assai onerosa e generalmente, nelle applicazioni pratiche, conviene ricorrere ad opportuni abachi o tabelle che riportano i valori delle sollecitazioni e degli spostamenti per le più frequenti condizioni di carico e di vincolo.

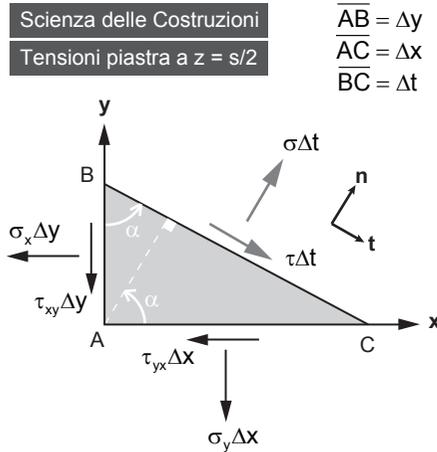
Quando le condizioni di carico o la forma della piastra sono tali da non consentire l'uso di tabelle è necessario ricorrere a metodi numerici (differenze finite o, meglio, elementi finiti).

1-3 MOMENTI PRINCIPALI: FORMALISMO DI MOHR

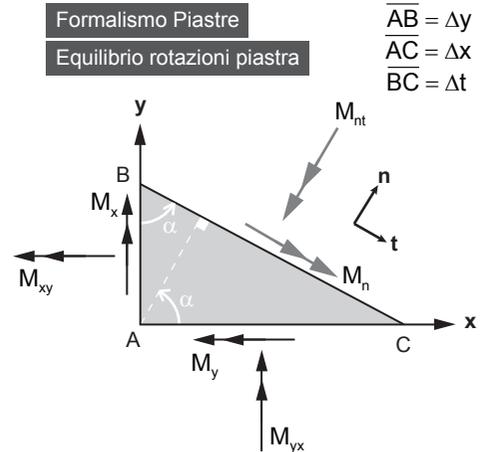
Consideriamo l'elemento prismatico di piastra rappresentato in Figura 1-4. Sulle facce laterali $s dx$ e $s dy$ della piastra, paralleli rispettivamente agli assi x e y del piano medio, agiscono i relativi momenti flettenti M_y , M_x e i momenti torcenti $M_{xy} = M_{yx}$ (questi ultimi uguali localmente per la validità del principio di *reciprocità del taglio*). Sezionando la piastra lungo un piano la cui traccia t appartenga al piano xy e con un'inclinazione α rispetto all'asse delle x , si può pensare di trovare il momento flettente M_n agente con tensioni di membrana lungo la direzione n perpendicolare alla sezione di piastra tagliata e il momento torcente M_{nt} le cui tensioni di taglio siano parallele alla direzione t della traccia della sezione nel piano medio della piastra (si vedano dettagli in Figura 1-4).

Figura 1-4

Elemento prismatico di piastra: stati di tensione piani in analogia al metodo del cerchio di Mohr. Formalismo di Scienza delle Costruzioni coincidente con assetto tensoriale per il lembo di piastra a quota $z = s/2$ dal piano medio.



$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$



$$\begin{cases} M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \\ M_{nt} = (M_x - M_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - M_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio: momenti principali e linee isostatiche

Considerando per una piastra generica una sezione inclinata di un angolo α rispetto all’asse delle y , si dispongano le azioni flettenti e torcenti come indicato nella Figura 1-4, in modo che le tensioni assiali e di taglio per i lembi della piastra a quota $z = s/2$ risultino concordi con il formalismo del cerchio di MOHR in *Scienza delle Costruzioni*.

Proiettando le due equazioni di equilibrio alle rotazioni della sezione di piastra ABC lungo le direzioni n (normale alla superficie di traccia \overline{BC}) e t (tangenziale alla traccia \overline{BC}), si ottengono le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \\ M_{nt} = (M_x - M_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - M_{xy} \cos 2\alpha \end{cases} \quad (1-24)$$

Queste due equazioni risultano formalmente analoghe a quelle relative alle tensioni piane studiate in *Scienza delle Costruzioni* a proposito del cerchio di MOHR. In particolare, si potranno determinare i valori di M_n e M_{nt} per mezzo del cerchio di MOHR relativamente alle tensioni della piastra sui lembi estremi a quota $z = s/2$ (essendo s lo spessore della piastra assunto costante).

Momenti principali. Viene inoltre evidenziata l’esistenza di *momenti principali* caratterizzati dal fatto che essi sono i *massimi* e i *minimi* al variare dell’angolo α (o, ciò che è lo stesso, al ruotare dell’orientamento dell’elementino rispetto agli assi originari x, y) e agiscono in piani fra loro ortogonali. Questi piani definiscono l’orientamento dell’elementino di piastra tale che il momento torcente sia nullo.

Il loro inviluppo dà luogo alle traiettorie dei momenti principali la cui conoscenza è molto utile, specialmente per disporre le armature nel modo più opportuno, nel caso di piastre in cemento armato. È opportuno ricordare qui le espressioni delle caratteristiche della sollecitazione agenti sulla generica piastra (per unità di larghezza di piastra):

$$M_x = \bar{\sigma}_x \frac{s^2}{6}, \quad M_y = \bar{\sigma}_y \frac{s^2}{6}, \quad M_{yx} = \bar{\tau}_{yx} \frac{s^2}{6} \Rightarrow M_{xy} = \bar{\tau}_{xy} \frac{s^2}{6}.$$

➤ IMPORTANTE

Linee isostatiche. È evidente che, utilizzando la teoria del cerchio di MOHR così come nota dalla *Scienza delle Costruzioni* e riferendoci ai lembi di piastra a quota $z = s/2$ dal piano medio, è possibile trattare lo stato di sollecitazione della piastra analogamente allo stato di sollecitazione piano delle tensioni, tipico della *Scienza delle Costruzioni*.

Il passaggio dalle tensioni piane alle *linee isostatiche* delle caratteristiche della sollecitazione per unità di larghezza di piastra (*momenti principali*) avviene semplicemente moltiplicando tutte le tensioni per il fattore $s^2/6$.

ESEMPIO 1-1

Calcolo direzioni delle traiettorie dei momenti principali per una piastra in cemento armato: armatura lenta secondo linee isostatiche

Si immagini di aver ottenuto per via numerica l'involuppo SLU⁽ⁱ⁾ dello stato tensionale piano su una delle facce⁽ⁱⁱ⁾ di una piastra di spessore costante ($s = 150$ mm) in cemento armato ordinario (illustrazione più avanti). Individuare la direzione delle *linee isostatiche* dei *momenti principali* lungo cui disporre le barre di armatura.

Il valore del copriferro nominale per le armature più esterne è $c_{nom} = 20$ mm. In cantiere sono disponibili barre ad aderenza migliorata B450C per la seguente gamma di diametri: $\phi 8$, $\phi 14$ e $\phi 16$.

Soluzione

Come noto dalla *Scienza delle Costruzioni*, la direzione dell'orientamento dell'elementino piastra cementato da sole sollecitazioni di flessione (quindi con momenti torcenti nulli) si ottiene trovando il minimo relativo delle tensioni assiali in condizioni di tensioni tangenziali nulle: elementino orientato lungo le due direzioni principali σ_1 e σ_2 .

La soluzione del minimo relativo per le tensioni σ in funzione di φ ammette due soluzioni che differiscono di $\pi/2$.

STEP 1 **Calcolo angolo orientamento tensioni principali (per sole flessioni)**

Angolo di orientamento elementino a sola flessione:

$$(EQN. 1) \quad \tan 2\alpha = \frac{2|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 4,0}{5,0 - 1,0} = 2,0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \alpha_1 = 32^\circ \\ \alpha_2 = 122^\circ \end{cases}$$

avendo tenuto conto che le due direzioni di σ_1 e σ_2 devono differire di un angolo retto.

STEP 2 **Calcolo tensioni principali (minima e massima)**

Calcolo delle tensioni principali secondo la teoria del cerchio di MOHR:

$$(EQN. 2) \quad \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{5,0 + 1,0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,0 - 1,0}{2}\right)^2 + (4,0)^2} = \begin{cases} \sigma_1 = 7,50 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -1,47 \text{ MPa} \end{cases} \end{aligned}$$

La massima tensione principale sulle fibre della piastra a quota $z = s/2$ è di trazione (σ_1 positiva), mentre la tensione principale minima è di compressione (σ_2 negativa).

(i) SLU sta per "stato limite ultimo".

(ii) Faccia a quota $z = s/2$ dal piano medio.

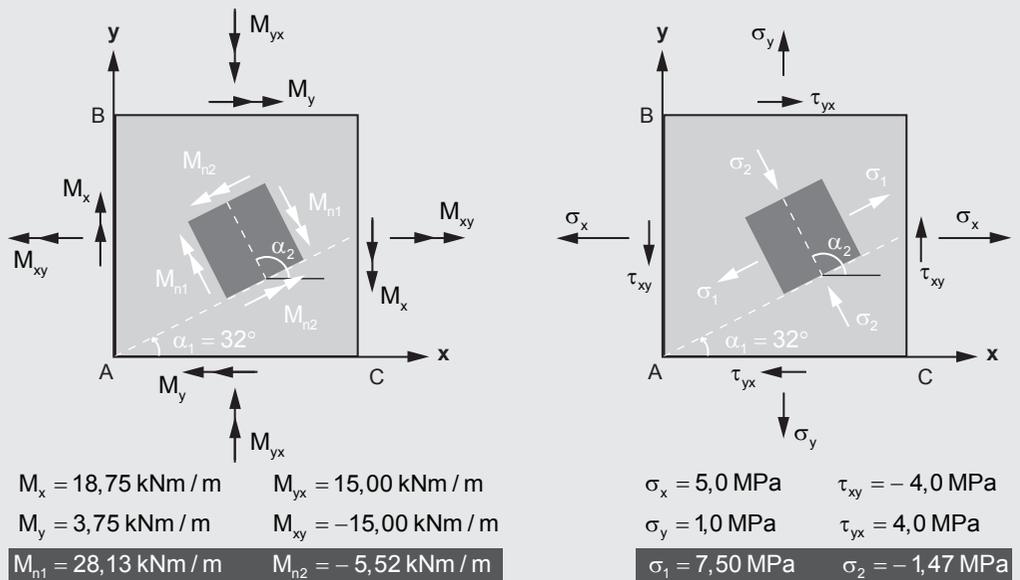
STEP 3 **Calcolo momenti principali**

I momenti principali sono i momenti flettenti che garantiscono l'equilibrio all'inflessione e taglio in assenza di sollecitazioni taglianti dovuti a torsione. In base a quanto trovato nella trattazione teorica, si ha (con $1,0 \text{ MPa} = 0,1 \text{ kN/cm}^2$):

$$(EQN. 3) \quad M_{n1} = \frac{s^2}{6} \sigma_1 = \frac{(15 \text{ cm})^2}{6} (0,75 \text{ kN/cm}^2) = 28,2 \text{ kNm/m}$$

$$M_{n2} = \frac{s^2}{6} \sigma_2 = -\frac{(15 \text{ cm})^2}{6} (0,147 \text{ kN/cm}^2) = -5,5 \text{ kNm/m}$$

Il valore di M_{n1} è positivo (tende le fibre inferiori della piastra), mentre il valore di M_{n2} è negativo (tende le fibre superiori della piastra).



STEP 4 **Calcolo armature a flessione piastra**

La disposizione longitudinale delle armature portanti deve seguire la direzione individuata dall'angolo $\alpha = 32^\circ$ rispetto alla direzione x di sviluppo sinistra-destra della piastra nel piano. Le barre portanti andranno quindi disposte sull'intradosso della piastra (dal lato quindi delle fibre prossime a $z = s/2$) e disposte longitudinalmente parallelamente alla direzione individuata dalla tensione principale σ_1 (si veda figura precedente).

Le armature si calcolano in conformità a quanto stabilito dalle *Norme Tecniche* e di conseguenza dagli *Eurocodici CEN/TC 250* (versione europea).

1. Calcolo tensioni di progetto materiali (con $\gamma_c = 1,50$ e $\gamma_a = 1,15$):
 - calcestruzzo C25/30: $f_{cd} = 14,2 \text{ MPa} = 1,42 \text{ kN/cm}^2$;
 - acciai per armatura lenta B450C: $f_{yd} = 391 \text{ MPa} = 39,1 \text{ kN/cm}^2$.
2. Calcolo altezza utile h della sezione $H = 15 \text{ cm}$:

$$(EQN. 4) \quad h = H - (c_{nom} + \phi_{staffe} + 0,5\phi) = 15 - (2 + 0,8 + 1,6/2) \approx 11 \text{ cm}$$

3. Massima sollecitazione flettente di progetto (secondo la direzione principale σ_1):

$$(EQN. 5) \quad M_{Ed} = M_{n1} = 28,2 \text{ kNm/m} \text{ (per metro di larghezza della piastra).}$$

4. Verifica quantitativo di armatura necessario: armatura *semplice* o *doppia*:

$$(EQN. 6) \quad m_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{b h^2 f_{cd}} = \frac{(28,2 \text{ kNm})}{(1 \text{ m})(11 \text{ cm})^2 (1,42 \text{ kN/cm}^2)} = 0,164 \leq 0,180 \text{ (semplice).}$$

5. Calcolo area armatura portante // alla direzione di σ_1 :

$$(EQN. 7) \quad A_s = \frac{M_{Ed}}{0,9 h f_{yd}} = \frac{(28,2 \text{ kNm/m})}{0,9 \cdot (0,11 \text{ m}) \cdot (39,1 \text{ kN/cm}^2)} = 7,3 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

STEP 5 **Disposizione armature**

Sull'intradosso della piastra, in direzione principale σ_1 , si dispongono barre $\phi 14$ in ragione di $1\phi 14/20 = 7,7 \text{ cm}^2/\text{m}$. Ortogonalmente e all'intradosso, lungo la direzione σ_2 verrà comunque prima stesa, longitudinalmente, un'armatura in ragione di $\phi 8/20$ e con copriferro nominale $c_{nom} = 20 \text{ mm}$.

1-4 **VARIAZIONI DI TEMPERATURA NELLE PIASTRE**

Le strutture bidimensionali in genere – quali piastre, lastre, membrane e lastre curve – sono spesso anche parti di elementi costruttivi di caldaie, serbatoi, reattori chimici e tubi in cui avvengono fenomeni di tipo termico, tipici degli impianti industriali.

In generale, nelle *piastre*, si possono individuare tre regimi termici principali i cui effetti conviene studiare separatamente per poi combinarli, in virtù del *principio di sovrapposizione degli effetti*, nelle analisi lineari:

- variazione ovunque uniforme
- variazione uniforme solo nella generica sezione trasversale
- variazione attraverso lo spessore.

È quindi frequentissimo in questi casi che una delle sollecitazioni più importanti sia quella dovuta alla temperatura e ai suoi gradienti nelle strutture. Lo studio dei suoi effetti si conduce secondo la teoria della meccanica del continuo in *Scienza delle Costruzioni*.

Variazione uniforme sull'intera piastra

Se si pensa un qualsiasi elemento strutturale, libero di variare il suo volume, sottoposto ad una sorgente di calore, questi tenderà naturalmente a dilatarsi se la temperatura della sorgente di calore è maggiore. Gli spostamenti dell'elemento, come corpo libero, sono di immediata determinazione.

Coefficiente di dilatazione termica. Dall'elasticità sappiamo infatti che in un punto generico del continuo, supposto isotropo, l'effetto diretto di una variazione di temperatura $\Delta T > 0$ si traduce nella variazione delle deformazioni unitarie dell'elemento. In parti-

colare, supponendo almeno teoricamente l'assenza di tutte le forze esterne e la presenza di una sorgente di calore che vari la temperatura media dell'elemento di $\Delta T = T - T_0 \neq 0$, si ha:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \Delta T; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1-25)$$

con la presenza di una deformazione uniforme volumica in assenza⁽ⁱⁱⁱ⁾ di distorsioni per taglio. Con α si è indicato il coefficiente di dilatazione termica del materiale dell'elemento strutturale; per l'acciaio e il calcestruzzo esso vale circa:

$$\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Il modesto valore di α consente di ritenere anche per questo caso di variazioni termiche l'ipotesi di deformazioni infinitesime e, di conseguenza, il mantenimento della validità del *principio di sovrapposizione degli effetti*. È opportuno osservare che la circostanza che α sia circa lo stesso per i due materiali acciaio e calcestruzzo consente di affermare che il materiale composito “cemento armato” possa essere considerato dal punto di vista delle deformazioni termiche come un tutt'uno. Le sole variazioni termiche possono provocare o meno delle tensioni a seconda dei casi. Il coefficiente di dilatazione termica volumetrico viene in generale definito:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

dove:

- ρ è la densità del materiale;
- T è la temperatura in un punto P del materiale;
- V il volume del materiale.

Se i vincoli presenti consentono all'elemento di variare il proprio volume liberamente senza costrizioni, allora non si destano tensioni. Ciò accade quando il sistema è *isostatico*: variazioni uniformi di temperatura non provocano la nascita di tensioni interne all'elemento. Se invece l'elemento è vincolato *iperstaticamente*, salvo alcuni casi^(iv) particolari, al suo interno si destano delle tensioni tali da dare luogo a deformazioni unitarie elastiche che vengono immediatamente scaricate sui vincoli sovrabbondanti che le contrastano in condizioni di equilibrio: si desta cioè uno stato detto di *coazione*, ossia uno stato di tensione (e deformazioni) associato a forze attive nulle.

Anche variazioni non uniformi di temperatura possono accompagnarsi a stati di coazione nulli per lastre di pianta quadrangolare appoggiate solo su due lati paralleli. In generale, quindi, l'eventuale stato di *coazione* termica è dovuto soltanto a particolari vincoli esterni. Se l'elemento strutturale viene liberato da questi vincoli, la variazione dimensionale è uniforme e pertanto la determinazione degli spostamenti è quella del corpo libero che si dilata o contrae. Il problema statico è quindi ricondotto al metodo della congruenza, della determinazione di un sistema di reazioni vincolari che riesca ad annullare tali spostamenti

(iii) In generale, si ha $\gamma = 0$ quando le differenze di temperatura $\Delta T = T - T_0$ in funzione di x e y (cioè lungo la piastra) siano tanto piccole da comportare trascurabili effetti sulle tensioni τ_{xz} e τ_{yz} e sulle relative distorsioni unitarie γ .

(iv) Si pensi ad esempio il caso di una mensola il cui appoggio (carrello) sull'altra estremità abbia retta d'azione vincolare perpendicolare allo sviluppo longitudinale della mensola stessa: il vincolo “a carrello” non impedirebbe infatti all'asta incastrata in un'estremità di allungarsi longitudinalmente.

➤ IMPORTANTE

nei punti di contatto-vincolo con il sistema. Nel caso delle strutture a piastra, in particolare qui per le strutture piane, lo stato di coazione è rappresentato da forze giacenti in uno stesso piano: *coazione di membrana*. La soluzione, nei casi molto semplici di forma e vincolo è abbastanza immediata. Se ad esempio i vincoli sono perfettamente rigidi^(v) sulle zone di contatto-vincolo, le sollecitazioni devono annullare completamente la tendenza del volume dell'elemento piastra a dilatarsi o a contrarsi: le sollecitazioni devono annullare le variazioni termiche.

Legge di Hooke in campo termico. Come si è visto, nel caso di piastra le tensioni σ_z si possono trascurare rispetto alle altre tensioni; pertanto secondo la legge di HOOKE, tenendo conto delle variazioni di volume per temperatura, si ha:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha \Delta T + \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \alpha \Delta T + \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_x - \nu\sigma_y) = -E\alpha\Delta T \\ (\sigma_y - \nu\sigma_x) = -E\alpha\Delta T \end{cases} \quad (1-26)$$

(congruenza)

allorché in una piastra i vincoli possano considerarsi perfettamente rigidi sull'intero contorno e simmetrici rispetto alla geometria della piastra. In tal caso, infatti, le due precedenti relazioni, in virtù delle (1-25) su corpo libero, si traducono nell'uguaglianza delle tensioni di coazione: $\sigma_x = \sigma_y$.



In presenza di asimmetrie dei vincoli, però, possono nascere sollecitazioni di tipo flessionale. Un esempio può essere una piastra quadrangolare solidale a delle nervature di bordo perimetrali che non subiscano la stessa variazione termica. L'interazione tra la "cornice" di nervature con la piastra ad essa solidale induce una prevalente torsione nelle nervature accompagnata evidentemente da un'inflexione della piastra.

In ogni caso, casi più o meno complessi che si trovano frequentemente nella pratica tecnica devono essere affrontati per via numerica tramite metodo agli elementi finiti.

Variazione uniforme sullo spessore ma variabile con x,y

Questo tipo di sollecitazione termica considera la variazione uniforme della temperatura lungo tutto lo spessore della piastra ma ammette un gradiente termico diverso da punto a punto per ogni sezione trasversale della piastra. Situazioni di questo genere si presentano specialmente nei fenomeni transitori e, a maggior ragione, vanno studiati quasi sempre con l'ausilio del metodo degli elementi finiti tramite calcolatore.

Gradiente termico attraverso lo spessore

Questo tipo di situazione si presenta frequentemente sia a regime sia in condizioni transitorie. In generale, una differenza di temperatura tra le facce di una piastra comporta una distribuzione termica non lineare.

In generale, sempre nel caso di materiale isotropo, dalle relazioni (1-26) si possono esprimere gli sforzi unitari in condizioni di presenza di variazioni di temperatura:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha\Delta T] \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha\Delta T] \end{cases} \quad (1-27)$$

(v) I vincoli possano considerarsi praticamente indeformabili; altrimenti se ne dovrebbe tenere conto dal punto di vista della congruenza: l'elemento strutturale varia il suo volume e, contrastato dall'azione di contatto con i vincoli, resta in uno stato di coazione in equilibrio con i vincoli a loro volta deformati elasticamente.

⇒ IMPORTANTE

dove anche α , E , ν dipendono dalla temperatura ma, per variazioni limitate di temperatura, possono essere considerati costanti almeno in una *range* fissato di temperature in cui il fenomeno avviene. Quando la piastra è vincolata lungo il perimetro con vincolo di perfetto incastro e nel caso in cui la distribuzione di temperatura sia uniforme su ciascuno strato parallelo alla superficie media e vari solo lungo lo spessore ($\Delta T = f(z)$), la piastra rimane indeformata ed è sede in ogni punto di momenti flettenti costanti, qualunque sia la geometria dal suo contorno. Se ΔT è la differenza di temperatura tra intradosso ed estradosso della piastra di spessore costante s , detto con α la *coefficiente di dilatazione lineare* (supposto costante nell'intervallo di variazione della temperatura), si ha:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{s} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\alpha \Delta T}{s} \quad (1-28)$$

dove r è il raggio di curvatura conseguente alla variazione termica per una piastra *libera* che tende così a deformarsi secondo una superficie sferica.^(vi) Operando secondo il metodo della congruenza, se la piastra è vincolata su tutto il bordo in condizioni di incastro perfetto, il vincolo deve fornire una reazione capace di annullare la curvatura che è presente su tutti i punti della piastra, in virtù della deformata di tipo sferico. Pertanto, per quanto visto nelle pagine precedenti (equazioni (1-17), (1-18)), in qualsiasi punto della piastra vincolata a perfetto incastro lungo tutto il contorno, i due momenti flettenti in direzioni perpendicolari dovranno essere tra loro uguali e di espressione:

$$M_{//} = M_{\perp} = D(1 + \nu) \frac{1}{r} \Rightarrow M_{//} = M_{\perp} = D(1 + \nu) \frac{\alpha \Delta T}{s}. \quad (1-29)$$

Questi momenti si diffondono con valore costante sull'intera piastra che rimane perciò ovunque a curvatura complessivamente nulla, in virtù dell'azione dei vincoli perfetti.

ESEMPIO 1-2

Calcolo sollecitazioni di coazione su piastra irraggiata da un forno

Si consideri una parete di un forno eseguita con delle piastre in cemento armato (classe di resistenza C32/40) e piastre in acciaio che portino per irraggiamento l'intera parete ad un incremento di temperatura di circa 100°C rispetto alla temperatura di riferimento T_0 . Valutare le *tensioni di coazione* per le piastre in cemento armato e in acciaio, ipotizzando un vincolo di incastro perfetto lungo tutto il loro bordo.

Soluzione

STEP 1

Calcolo caratteristiche materiali

1. Moduli elastici dei materiali delle piastre:
 - cemento armato C32/40: $E_c = E_{cm} = 33300 \text{ MPa}$;
 - acciaio strutturale: $E_a = 210000 \text{ MPa}$.
2. Tensione di progetto materiali C32/40:
 - calcestruzzo: $f_{cd} = 18,1 \text{ MPa}$;
 - acciaio S275JR: $f_{yd} = 275/1,1 = 250 \text{ MPa}$;

(vi) In un qualsiasi punto della piastra la curvatura lungo due direzioni tra loro perpendicolari è la stessa: $(1/r_x = 1/r_y)$ la deformata è quindi una porzione di superficie sferica.

3. Coefficiente di dilatazione termica (assunto costante per calcestruzzo e acciaio):

$$\alpha = 0,000012 \text{ } 1/^{\circ}\text{C}.$$

STEP 2 **Calcolo espressione della tensione di coazione**

Tensione di membrana per *coazione* su piastra a spessore costante s in regime elastico in condizioni di vincolo di incastro perfetto lungo tutto il bordo:

$$(EQN. 1) \quad \sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{s^2} = D(1 + \nu) \frac{6\alpha\Delta T}{s^3} = \frac{Es^3(1 + \nu)}{12(1 - \nu^2)} \frac{6\alpha\Delta T}{s^3} = \frac{E}{2(1 - \nu)} \alpha\Delta T.$$

Come si può notare, fornendo i vincoli sul bordo della piastra una reazione capace di annullare la curvatura (presente con lo stesso valore $1/r$ sia lungo il bordo, sia perpendicolarmente ad esso), la tensione di *coazione* non risulta dipendere dallo spessore della piastra.

STEP 3 **Calcolo tensioni di coazione nei materiali**

1. Calcolo tensione di coazione nel calcestruzzo armato (con $\nu = 0,2$):

$$(EQN. 2) \quad \sigma_c = \frac{E_c}{2(1 - \nu)} \alpha\Delta T = \frac{33300}{2(1 - 0,2)} 0,000012 \cdot (100^{\circ}\text{C}) = 25 \text{ MPa}.$$

2. Calcolo tensione di coazione nell'acciaio (con $\nu = 0,33$):

$$(EQN. 3) \quad \sigma_a = \frac{E_a}{2(1 - \nu)} \alpha\Delta T = \frac{210000}{2(1 - 0,33)} 0,000012 \cdot (100^{\circ}\text{C}) = 188 \text{ MPa}.$$

Ovviamente, in presenza di vincoli di continuità che realizzano “incastri parziali”, come travi di bordo, nervature particolari o appoggi elastici, le sollecitazioni possono essere alquanto inferiori. In ogni caso, in linea generale, per casi più complessi conviene utilizzare metodi automatici su calcolatore per l'integrazione di onerose equazioni differenziali per mezzo di sviluppi in serie.

➤ **IMPORTANTE**

Nel caso delle piastre in calcestruzzo armato, l'effetto locale massimo, da sovrapporre a quelli dovuti alle altre azioni (forze esterne, vincoli, iperstaticità) è di $\Delta\sigma_c = 25 \text{ MPa} > f_{cd} = 18,1 \text{ MPa}$. Pertanto, quando si tengono in dovuta considerazione l'entità degli stati di coazione di origine termica, si possono interpretare correttamente molti casi di fessurazione che si riscontrano in piastre e gusci di cemento armato.

Pavimentazioni stradali. Nel caso di piastra libera, perciò, la variazione termica lineare uniforme non produce tensioni ma una curvatura costante. In particolare, se la piastra è rettangolare appoggiata con un vincolo unilaterale sul contorno o sull'intera superficie (come le pavimentazioni stradali a piastra in cemento armato sottoposte a irraggiamento solare), essa tende a curvarsi tendendo ad un guscio sferico. Di conseguenza, l'azione del peso proprio e dei variabili stradali provocano forti sollecitazioni flessionali e di taglio nell'intorno degli spigoli della piastra.

1-5 PIASTRE QUADRANGOLARI: CONDIZIONI AL CONTORNO

L'equazione di LAGRANGE (eqq. (1-23) e (1-24) a pagina 16) è ovviamente valida per qualunque forma della piastra; l'integrale dell'equazione di IV grado dipende dalla forma e dalle condizioni di vincolo ai bordi, oltre che dal carico $p = p(x, y)$ agente sulle superfici della piastra. Per abbozzare almeno l'idea dei problemi di analisi che si incontrano nello studio delle piastre quadrate o rettangolari, è necessario esaminare il caso più semplice di piastra vincolata lungo i bordi rettilinei, paralleli agli assi coordinati x, y . Il caso di vincolo su bordo rettilineo inclinato rispetto al riferimento cartesiano può essere trattato con una trasformazione di coordinate: rotazione degli assi x, y .

I vincoli al contorno di una piastra possono essere di incastro, di appoggio e infine bordo completamente o parzialmente libero. Si esaminano di seguito alcuni singoli casi significativi facendo riferimento, ad esempio, ad un bordo rettilineo parallelo a uno degli assi coordinati del piano x, y nel piano medio della piastra indeformata. Si sceglie, in particolare, tutto un bordo perimetrale parallelo all'asse y (definito dall'equazione $x = a > 0$).

Bordo appoggiato

È opportuno subito precisare che il vincolo di semplice appoggio si sottintende applicato alla fibra del piano medio e risulta su questo piano scorrevole. Poiché inoltre, per ipotesi, la piastra non è caricata nel suo piano medio ed è piana e soggetta a spostamenti al limite infinitesimi, anche se l'appoggio fosse non scorrevole (quindi, fisso) gli effetti sarebbero di un infinitesimo di ordine superiore.

Scegliendo, come si è detto, un bordo della piastra posizionato a quota $x = a > 0$ sul sistema di assi cartesiani scelti, si devono avere (si veda schema delle "tensioni normali" in Figura 1-3 a pagina 15) le due condizioni al contorno (si veda Figura 1-5):

$$\begin{cases} (w = 0)_{x=a} \\ (M_x = 0)_{x=a} \Rightarrow -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (w = 0)_{x=a} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (1-30)$$

Figura 1-5

Condizioni cinematiche al bordo di piastre vincolate. Scelto il caso di bordo e vincolo parallelo all'asse y a quota $x = a > 0$.

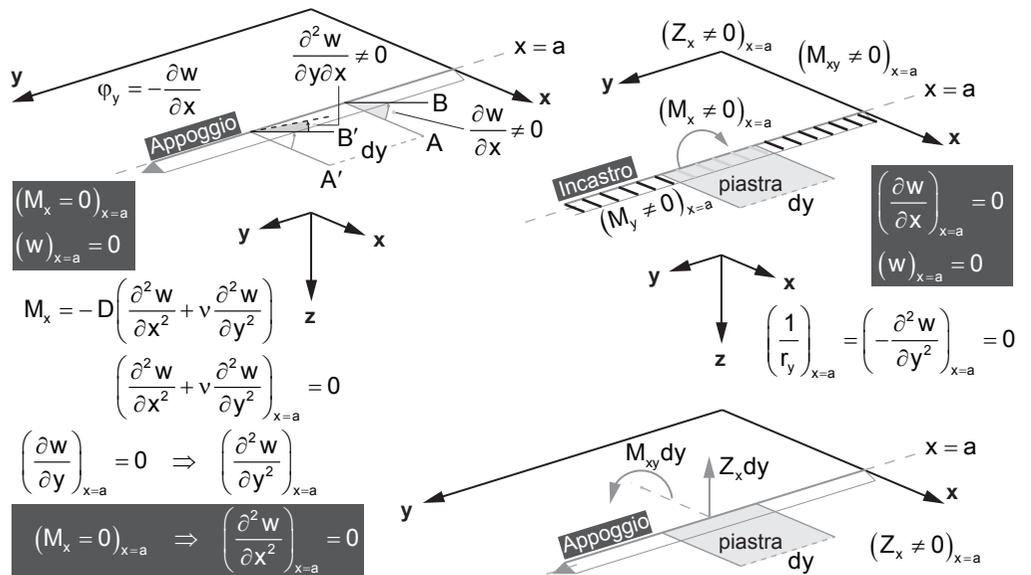
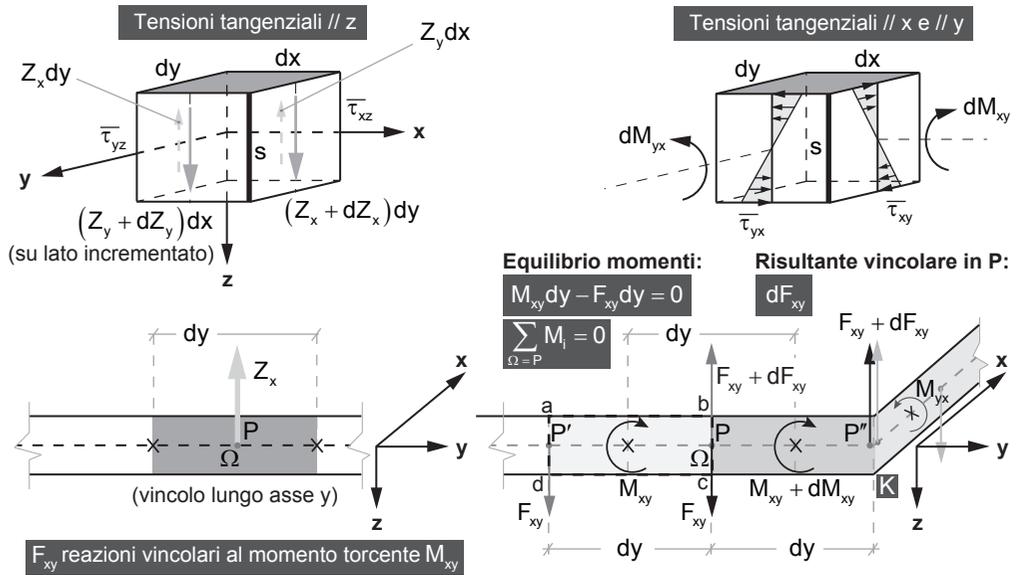


Figura 1-6

Schema delle sollecitazioni sulle facce di un elementino di piastra in equilibrio. In basso, meccanismo resistente di un vincolo di semplice appoggio ai tagli e alle azioni torcenti.



In altri termini, lungo tutti i punti dell'appoggio (tratto di bordo a quota $x = a > 0$) se non ci sono cedimenti vincolari, è nulla la componente di abbassamento lungo l'asse z ($w = 0$) e la reazione flettente M_x deve risultare nulla su tutti i punti del bordo in appoggio.

È opportuno osservare che le rotazioni φ_y attorno all'asse di vincolo $x = a > 0$ di semplice appoggio possono eventualmente variare di intensità lungo l'asse $x = a$ stesso. Di conseguenza si avrà in generale:

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \neq 0. \quad (1-31)$$

Quest'ultima relazione ha come conseguenza che il vincolo di appoggio sarà chiamato a bilanciare anche il momento torcente M_{xy} scaricato dalla piastra in virtù della possibile variazione dell'angolo φ_y lungo il bordo vincolato:

$$(M_{xy})_{x=a} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_{x=a} \neq 0. \quad (1-32)$$

In tal caso, oltre all'evidente reazione Z_x lungo l'asse z (si veda Figura 1-6), deve esserci un'ulteriore reazione vincolare che bilanci le coppie torcenti M_{xy} . A tal proposito, si veda lo schema in Figura 1-6: per ogni tratto elementare dy di piastra vincolata in appoggio lungo il piano medio (linea in tratteggio) il momento risultante $M_{xy} dy$ agente lungo il tratto dy deve essere controbilanciato da una coppia di forze di intensità F_{xy} e di braccio dy . Scegliendo come positivi i momenti torcenti M_{xy} di verso concorde con l'asse x , l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse x con polo dei momenti nel punto $\Omega = P$, si ha:

$$(F_{xy} + dF_{xy}) - F_{xy} = dF_{xy} \Rightarrow \boxed{F_{xy} = M_{xy}} \Rightarrow dF_{xy} = dM_{xy}. \quad (1-33)$$

Dall'esame degli equilibri in figura, considerando due conci elementari dy consecutivi a cavallo del punto P , si nota che la reazione risultante ai momenti torcenti nel punto P è data dalla differenza dello "scarico" del concio successivo ($F_{xy} + dF_{xy}$) con quello precedente F_{xy} . Ovvero, la risultante in P si riduce al solo incremento elementare di F_{xy} :

$$(F_{xy} + dF_{xy}) - F_{xy} = dF_{xy} \Rightarrow dF_{xy} = dM_{xy} \quad (1-34)$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è tenuto conto della relazione (1-33). A questo punto, volendo esprimere le reazioni vincolari in termini di forze per unità di larghezza di bordo vincolato, basta dividere la precedente equazione per la larghezza elementare dy sulla direzione fissata di $x = a > 0$:

$$Z_{xy} = \frac{dF_{xy}}{dy} = \frac{dM_{xy}}{dy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (1-35)$$



Complessivamente, dunque, tenendo conto sia del taglio Z_x che dell'ulteriore reazione R_{xy} per momenti torcenti sul vincolo, la reazione lungo l'appoggio vale:

$$R_x = Z_x + Z_{xy} \Rightarrow R_x = Z_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (1-36)$$

Analogo discorso, permutando gli indici e le variabili x e y , per un bordo vincolato in semplice appoggio parallelamente all'altro asse coordinato.

➔ **IMPORTANTE**

Come si può dedurre dagli schemi in Figura 1-6, le forze F_{xy} dovute ai momenti torcenti lungo il vincolo in appoggio si elidono mutuamente ad ogni passo “ dy ”. Questa condizione incontra la sua eccezione nel punto di vertice della piastra dove la reazione rimane al valore più intenso (si veda punto K in Figura 1-6), pari proprio a $F_{xy} = M_{xy}$, perché non ci sono ulteriori concetti “ dy ” a seguire che possano intervenire nell'attenuazione della reazione. Se poi anche lo spigolo perpendicolare convergesse nello stesso punto di vertice, allora su quello stesso punto si sommerebbero le due reazioni più intense delle estremità dei due spigoli, arrivando quindi al valore:

$$\sum_{i=1}^2 Z_{xy,i} = F_{xy} + F_{yx} = M_{xy} + M_{yx} = 2M_{xy}.$$

L'uguaglianza delle reazioni vincolari nel punto singolare K è dovuto all'uguaglianza delle sollecitazioni di taglio per torsione trasmessa dalla piastra sull'appoggio, in virtù della *reciprocità del taglio* sulle faccette convergenti su un medesimo spigolo di piastra.

Bordo incastrato

Lungo tutti i punti del vincolo a incastro, sempre considerando tali punti a quota $x = a > 0$ (si veda Figura 1-5), la reazione vincolare consisterà di forze taglienti Z_x , di momenti flettenti M_x e di momenti torcenti M_{xy} (quest'ultimo come per il vincolo a semplice appoggio). In questo caso, lungo tutti i punti del bordo vincolato (considerato parallelo all'asse y a quota $x = a > 0$) sono nulli sia la componente di abbassamento w secondo l'asse z e sia la rotazione φ_y attorno all'asse di vincolo $x = a$:

$$\begin{cases} (w = 0)_{x=a} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (1-37)$$

Inoltre, come conseguenza di piastra inizialmente piana, nel vincolo ad incastro deve mantenersi nulla la curvatura $1/r_y$ lungo tutti i punti sulla direzione $x = a$:

$$\left(\frac{1}{r_y}\right)_{x=a} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0. \quad (1-38)$$

Conseguentemente, inoltre, su tutti i punti del vincolo incastro (punti del bordo a quota $x = a > 0$) possono essere presenti anche dei momenti M_y , diversi da zero – non forniti direttamente dal vincolo – ma esistenti per solo effetto POISSON della piastra. Infatti, ricordando l'espressione generale per M_y assieme alla condizione al contorno (1-38), può risultare:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{r_y} \right)_{x=a} = 0 \\ M_y = D \nu \frac{1}{r_x} \neq 0 \end{cases} \quad (1-39)$$

⇒ IMPORTANTE

Pertanto, se in un qualsiasi punto del bordo vincolato a incastro esiste ed è finito il valore della curvatura $1/r_x$ allora sarà presente anche una sollecitazione flettente M_y non fornita dal vincolo ma esistente indirettamente per effetto POISSON (se il valore del coefficiente ν è diverso da zero).

Bordo libero

Ipotizzando, a puro titolo di esempio, il bordo libero su punti a quota $x = a > 0$, lì devono essere nulli il momento M_x e identicamente nulla la reazione complessiva $R_x = Z_x + Z_{xy}$; non essendoci per quest'ultima né reazioni di taglio puro Z_x né componenti di taglio Z_{xy} per effetti torcenti sul bordo della piastra. Ricordando quindi le formulazioni (1-17) e (1-19) a pagina 13 e la prima delle (1-20) a pagina 14, svolgendo i calcoli e riordinando si ottiene rispettivamente:

$$(M_x = 0)_{x=a} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (1-40)$$

$$(R_x = Z_x + Z_{xy} = 0)_{x=a} \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \quad (1-41)$$

Analogamente, per un bordo libero parallelo all'asse x (anziché y , come in questo caso di esempio) le espressioni sono formalmente uguali salvo permutare gli indici e le variabili x, y .

1-6 **CENNI SUI METODI DI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA PIASTRA**

L'analisi delle piastre in regime elastico per mezzo dell'equazione di LAGRANGE presenta notoriamente notevoli difficoltà matematiche, soprattutto per soddisfare le condizioni al contorno. È anche per questo motivo che, nella pratica corrente, i problemi relativi alle piastre si risolvono mediante l'utilizzo di tabelle, grafici o, nei casi di maggiore complessità e importanza, per mezzo di metodi numerici agli elementi finiti.

Nel caso di piastre quadrangolari la scrittura delle condizioni ai limiti non è così onerosa quale può essere invece per piastre generiche a bordi rettilinei comunque inclinati, rispetto agli assi di riferimento, oppure a bordi curvilinei.

Soluzione secondo il procedimento di Navier

Secondo il procedimento di Navier, la soluzione si ottiene sviluppando la funzione del carico $p = p(x, y)$ in una serie trigonometrica doppia:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1-42)$$

dove a e b sono i lati della piastra secondo l'asse x e y rispettivamente. Il calcolo si esegue secondo il procedimento di soluzione degli sviluppi in serie di FOURIER, moltiplicando ambo i membri per funzioni dimensionali dello stesso tipo di quello dello sviluppo (funzioni armoniche seno e coseno); per integrazione sul dominio^(vii) si ottengono direttamente i coefficienti a_{mn} , tenendo conto che nelle sommatorie doppie si annullano tutti i coefficienti $m \neq n$. In questo modo, la sommatoria doppia diventa semplice e una seconda operazione dello stesso tipo porta alla determinazione del coefficiente a_{mn} nella forma:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy. \quad (1-43)$$

Successivamente, esprimendo anche la funzione $w = w(x, y)$ come uno sviluppo in serie di FOURIER e introducendo tutti gli sviluppi nell'equazione di LAGRANGE si ottiene un'equazione differenziale facilmente integrabile le cui condizioni al contorno non pongono particolari complicazioni.

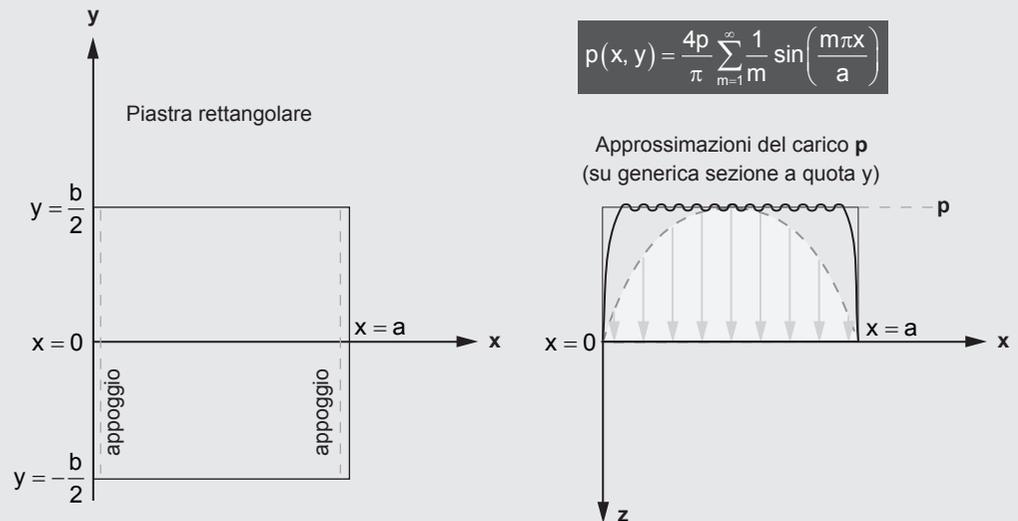
ESEMPIO 1-3

Calcolo delle sviluppo in serie di Fourier per un carico uniformemente distribuito su una piastra rettangolare

Si consideri una piastra rettangolare di lati a (parallelo all'asse x) e b (parallelo all'asse y). Si chiede di definire la sviluppo in serie di FOURIER della funzione del carico:

$$p(x, y) = p(x) = p = \text{costante}.$$

Si approssimi la distribuzione uniforme del carico $p = \text{cost}$ come una somma infinita di armoniche decrescenti, basate su una distribuzione iniziale sinusoidale.



(vii) In questo caso di piastre piane quadrangolari, gli estremi di integrazioni sono lo zero e le dimensioni planimetriche a, b dalla piastra.

Soluzione

Dall'esame della figura precedente, la distribuzione armonica del carico distribuito p uniforme deve presentare nell'intervallo $-b/2 \leq y \leq b/2$ lo stesso valore su ciascun punto scelto a quota $0 \leq x \leq a$. Questo porta come conseguenza la costanza dell'integrale:

$$(EQN. 1) \quad \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = \text{cost.}$$

1. Calcolo dell'intensità dell'integrale costante (con $0 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \leq 1$):

$$(EQN. 2) \quad \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = \overline{\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)} \int_0^b dy = \frac{1}{2}b$$

avendo considerato il valore medio della funzione *seno* nell'intervallo compreso tra i due punti di valore nullo (quindi nei punti di bordo della piastra: $x = 0$ e $x = a$).

2. Adattamento dell'integrale di FOURIER della (1-42) per $\sin(n\pi y/b) = 1 = \text{cost}$:

$$(EQN. 3) \quad p(x, y) = p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

Moltiplicando ambo i membri della (eqn. 3) per $\sin(m\pi x/a)$ e poi integrando da $x = 0$ a $x = a$, si ottiene (con $p = \text{cost}$):

$$(EQN. 4) \quad p \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = a_{mn} \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx.$$

Considerando ora i soli valori $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ e moltiplicando ambo i membri dell'equazione precedente per a/π e poi cambiando l'integrale a secondo membro con la variabile $t = \pi x/a$, si ottiene (per il primo caso di $m = 1$):

$$(EQN. 5) \quad \frac{\pi}{a} p \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = a_{1n} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a_{1n} = \frac{2p}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx}$$

avendo tenuto conto che il valore dell'integrale di $\sin^2 t dt$ nell'intervallo $0-a$ risulta pari a $\pi/2$. Poiché si osserva anche che per $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ risulta $\sin(\pi x/a) = \sin(m\pi x/a)$, generalizzando l'equazione precedente, si ottiene:

$$(EQN. 6) \quad \boxed{a_{mn} = \frac{2p}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx} \text{ con i seguenti valori: } a_{mn} = \begin{cases} \frac{4p}{m\pi} & \rightarrow m = 1, 3, 5, 7, \dots \\ 0 & \rightarrow m = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

che risulta evidentemente identica alla (1-43) quando in essa si ponga l'integrale della (eqn. 2) pari a $b/2$ e $p(x, y) = p(x) = p = \text{cost}$.

3. Sviluppo in serie di FOURIER del carico costante (quindi per $m = 1, 3, 5, 7, \dots$):

$$(EQN. 7) \quad p(x, y) = p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

4. Funzione $w = w(x, y)$ quando i bordi $x = 0$ e $x = a$ risultino non bordi liberi:

$$(EQN. 8) \quad w = w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right),$$

e dove le funzioni $w_m(y)$ risulteranno incognite e dovranno soddisfare anch'esse le condizioni al contorno e l'equazione differenziale di LAGRANGE del IV ordine.

ESEMPIO 1–4

Costruzione dell'equazione di Lagrange in funzione delle serie di Fourier per piastra rettangolare in semplice appoggio

Considerando la geometria della piastra introdotta nell'esempio precedente, si costruisca l'equazione differenziale del IV ordine definendo le rimanenti grandezze in termini di sommatorie di funzioni sinusoidali della stessa lunghezza d'onda di quelle del carico distribuito costante $p(x, y)$.

Soluzione

Si utilizza l'espressione dello sviluppo in serie di FOURIER della funzione $p(x, y) = p(x) = p = \text{costante}$:

$$(EQN. 1) \quad p(x, y) = p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

1. Espressione dello sviluppo in serie di FOURIER per la componente $w = w(x, y)$:

$$(EQN. 2) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

la formulazione è congruente perché rispetta le condizioni al contorno di piastra non libera sui vincoli lungo $x = 0$ e $x = a$ (supposti in questo caso bordi appoggiati).

2. Condizioni vincolari sulle linee di appoggio per la piastra sia su $x = 0$ e sia su $x = a$:

- $w_m(y) = 0$ spostamenti lungo z impediti per $y = -b/2$ e $y = b/2$;
- momento M_x nullo: $\frac{\partial^2 w_m(y)}{\partial x^2} = 0$ per $y = -b/2$ e $y = b/2$.

3. Sostituzione delle espressioni in serie di FOURIER nell'equazione di LAGRANGE:

$$(EQN. 3) \quad \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} (w_m)'' \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (w_m)'''' \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

dove con gli apici si sono indicate le derivazioni rispetto a y . Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima equazione per $\sin(n\pi x/a)$, poi integrando tra $x = 0$ e $x = a$, e con:

$$(EQN. 4) \quad \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} 0 & \rightarrow n \neq m \\ a/2 & \rightarrow n = m \end{cases}$$

si annullano tutte le sommatorie per $n \neq m$. L'equazione di LAGRANGE si riduce quindi a:

$$(EQN. 5) \quad (w_m)'''' - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 (w_m)'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 w_m = \frac{a_{mn}}{D}, \text{ con } a_{mn} = \begin{cases} \frac{4p}{m\pi} & \rightarrow m = 1, 3, 5, 7, \dots \\ 0 & \rightarrow m = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

equazione differenziale ordinaria del IV ordine nell'incognita $w_m = w_m(y)$ funzione anche di $m = 1, 3, 5, 7, \dots$

Generalmente, bastano pochi termini w_m per conseguire un'ottima approssimazione, dato che il contatore m – risultando elevato alla quinta potenza – si trova al denominatore e a fattor comune dei vari addendi che compongono l'espressione risultante per w_n .

Soluzione secondo il procedimento di Lévy

Il procedimento dovuto a LÉVY utilizza, per lo sviluppo del carico p , una serie semplice del tipo:

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (1-44)$$

dove $a_m = a_m(y)$ è una funzione della sola y . Con questo metodo si ottiene un calcolo numerico più rapido (si vedano esempi precedenti), ma le difficoltà rimangono elevate in parecchi casi di forme, condizioni di carico e di vincolo che pure si riscontrano con frequenza nella pratica tecnica, come piastre trapezoidali, parte dei lati incastrati, parte appoggiati e parte liberi, carichi triangolari come nel caso di paratie per contenimento di liquidi o di terra, carichi uniformi parziali come nel caso di pavimentazioni di ponti sottoposti a passaggio di autocarri, forze concentrate, etc.


RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

GIANGRECO E., *Teoria e Tecnica delle Costruzioni*, vol. III, Liguori, Napoli, 1970.

ROSSI F., SALVI F., *Manuale di Ingegneria Civile, vol. II, Scienza delle costruzioni, Tecnica delle Costruzioni, Ponti*, 2nd Edizione, Zanichelli/Esac, 1991-92

SAMUELLI FERRETTI A., *Corso tecnico delle costruzioni. Cenni sulla teoria delle piastre e tubi in regime elastico lineare*, Masson editoriale ESA, Roma Gennaio 1988.

ZINGALI A. E., *Appunti dalle lezioni di tecnica delle costruzioni. Elementi di analisi delle strutture. La sicurezza, le azioni sulle costruzioni*, Masson editoriale ESA, Roma, 1988.

Cover Art: <http://openbuildings.com/buildings/gordons-bay-house-profile-43933/media/318320/show>

3. Sostituendo i valori numerici, si ottiene (valori caratteristici):

$$(EQN. 12) \quad \begin{cases} E w(0) = 4287,108 V(0) + 29,044 M(0) + 37431 = 0 \\ E \varphi(0) = 29,044 V(0) + 0,393 M(0) + 3,12 = 0 \end{cases}$$

4. Risolvendo ad esempio con il metodo di KRAMER si ottiene (sezione $z = 0$):

- valore della sollecitazione tagliante: $V(0) = -17,4 \text{ N/mm}$ (direzione centripeta);
- sollecitazione flettente: $M(0) = 1273 \text{ Nmm/mm} > 0$ (trazione lembo interno).

STEP 4 Calcolo sollecitazioni di progetto SLU

1. Coefficienti parziali di sicurezza sui carichi/sollecitazioni secondo EN1990:

- Sollecitazione di progetto al taglio:

$$V_{Ed} = \gamma_Q V(0) = 1,50 V(0) = 1,50 \cdot (-17,4) = 26,1 \text{ N/mm}$$

- Sollecitazione di progetto a flessione:

$$M_{Ed} = \gamma_Q M(0) = 1,50 M(0) = 1,50 \cdot (1273) = 1909,5 \text{ Nmm/mm}.$$

STEP 5 Calcolo delle tensioni di progetto nella zona di connessione saldata

1. Tensione di taglio sul mantello ($s = 16 \text{ mm}$), nella sezione $z = 0$ (sulla saldatura con la piastra di base):

$$(EQN. 13) \quad \tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{s} = \frac{26,1 \text{ N/mm}}{16 \text{ mm}} = 1,63 \text{ N/mm}^2$$

2. Tensione flettente sulla zona di saldatura tra piastra nervata e mantello:

$$(EQN. 14) \quad \sigma_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{W_{pl}} = \frac{\gamma_Q M(0)}{W_{pl}} = \frac{\gamma_Q M(0)}{s^2/4} = \frac{1,50(1909,5 \text{ Nmm/mm})}{(16 \text{ mm}^3/\text{mm})} = 179,02 \text{ N/mm}^2$$

STEP 6 Calcolo tensione ideale secondo il criterio della Tau ottaedrica

1. In termini di tensione ideale sull'anello di saldatura (valore di progetto SLU):

$$(EQN. 15) \quad \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{Ed}^2 + 3\tau_{Ed}^2} = \sqrt{(179,02)^2 + 3(1,63)^2} = 179 \text{ N/mm}^2.$$

STEP 7 Tensione per la verifica delle resistenze/instabilità lamiera acciaio INOX

1. Si adotta nei calcoli di verifica il minimo carico unitario dallo scostamento dalla proporzionalità dello 0,2%: $f_y = 210 \text{ MPa}$ (anche per lavorazione a freddo, da CP350 secondo EN 10088-2).

STEP 8 Verifica saldatura secondo EN 1993-1-8

1. Si esegue la verifica della saldatura utilizzando la teoria del dominio sferico con raggio $0,58f_{u,w}$ secondo la EN 1993-1-8 par. 4.5.3.2.
2. Acciaio INOX tipo 1.4301 secondo EN 10088-2. Materiale di apporto E/G/T 19 9 L (secondo le proprietà meccaniche dei consumabili per acciaio inossidabile in accordo con EN 1600, EN 12072 e EN 12073) con $\beta_w = 1,00$ e resistenza a rottura $f_u = 510 \text{ MPa}$. Tensione resistente di progetto saldatura (EN 1993-1-8 par. 4.5.3.3 eq. (4.4)):

$$(EQN. 16) \quad f_{vw,d} = \frac{f_u/\sqrt{3}}{\beta_w \gamma_{M2}} = \frac{510/\sqrt{3}}{1 \cdot 1,25} = 235 \text{ N/mm}^2$$

3. Esito verifica resistenza lamiere sulla zona di connessione saldata:

$$\sigma_{id} = 179 \text{ N/mm}^2 < f_{vw,d} = 235 \text{ N/mm}^2 \text{ (verificato).}$$

ESEMPIO 4-4

Serbatoio di accumulo idrico da 200 mc in cemento armato ordinario

Valutare le sollecitazioni agenti sulla piastra di fondo e le pareti di un serbatoio in cemento armato ordinario () delle stesse dimensioni utili dell'esempio precedente. Lo spessore delle pareti del cilindro è costante e pari a $s_p = 18 \text{ cm}$; mentre lo spessore della piastra di fondo è fissata pari a $s_f = 35 \text{ cm}$. Stimare il quantitativo di armature necessarie per le pareti del serbatoio e per la piastra di fondo. Si ipotizzi, ai soli fini della resistenza una classe di resistenza del calcestruzzo C25/30 (coefficiente di POISSON $\nu = 0,15$) e armature in acciaio B450C.

Soluzione

La procedura di soluzione è analoga a quanto visto per il serbatoio di accumulo in acciaio. In questo caso, però, dovendo considerare deformabile la piastra di fondo del serbatoio, si deve tenere conto delle equazioni di deformazione della piastra di fondo ((4-47) a pagina 109) affinché sia correttamente definita l'equazione di congruenza della cisterna con la piastra di fondo schematizzata appunto come non infinitamente rigida alla flessione ((4-51) a pagina 111). Il serbatoio contiene acqua non in pressione: il massimo carico pressorio sulla fondo (a quota iniziale $z = 0$ di riferimento) è quindi pari al carico idrostatico: $\Delta h \gamma_{fluido} = |\Delta h \gamma_{fluido}| = H \gamma_{fluido}$.

STEP 1

Dati di progetto

1. Dati geometrici delle grandezze che intervengono nel calcolo:

- spessore piastra di fondo: $s_p = 35 \text{ cm}$;
- spessore pareti mantello serbatoio: $s = s_m = 18 \text{ cm}$;
- raggio esterno cisterna: $R_{\max} = 0,5 \phi_{est} = 0,5 \cdot 4,50 = 2,25 \text{ m}$
- raggio (utile) interno: $R = 0,5 \phi_{est} - s_m = 0,5 \cdot 4,50 - 0,18 = 2,07 \text{ m}$;
- pressione idrostatica sul fondo della piastra (valore caratteristico):

$$p_c(0) = \Delta h \gamma_{fluido} = H \gamma_{fluido} = (12,00 \text{ m})(10 \text{ kN/m}^3) = 120 \text{ kN/m}^2;$$

- pressione equivalente peso proprio piastra di fondo $\gamma_p = \gamma_c$ (valore caratteristico):

$$p_G(0) = \gamma_p s_p = \gamma_c s_p = (25 \text{ kN/m}^3)(0,18 \text{ m}) = 4,50 \text{ kN/m}^2.$$

2. Dati sui materiali:

- rigidità flessionale delle pareti della cisterna (in funzione della costante E):

$$D_m = D = \frac{E s_m^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{E(0,18 \text{ m})^3}{12(1 - 0,15^2)} = 0,000497E \text{ kNm}$$

- rigidità flessionale della piastra (in funzione della costante E):

$$D_p = \frac{E s_p^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{E(0,35 \text{ m})^3}{12(1 - 0,15^2)} = 0,003655E \text{ kNm}$$

- tensione di progetto calcestruzzo C25/30: $f_{cd} = 14,17 \text{ N/mm}^2$;

- tensione di progetto acciai B450C: $f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2 = 39,1 \text{ kN/cm}^2$;
- copriferro nominale armature più esterne $c_{nom} = 35 \text{ mm}$.

STEP 2 Calcolo grandezze costanti di progetto

1. Si riportano di seguito le grandezze costanti del calcolo:

$$(EQN. 17) \quad a_{\varphi M} = \frac{R}{D_p(1 + \nu)} = \frac{(2,07 \text{ m})}{(0,003655E \text{ kNm})(1 + 0,15)} = \frac{492,476}{E} \text{ kN}^{-1}$$

$$(EQN. 18) \quad p_c(0) \frac{r^2}{Es} = H\gamma_{fluido} \frac{R^2}{Es} = (120 \text{ kN/m}^2) \frac{(2,07 \text{ m})^3}{E \cdot (0,18 \text{ m})} = \frac{5913,162}{E} \text{ m}$$

$$(EQN. 19) \quad \alpha = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{\sqrt{Rs}} = \frac{\sqrt[4]{3(1 - 0,15^2)}}{\sqrt{(2,07 \text{ m})(0,18 \text{ m})}} \approx 2,1438 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 2,90 \text{ m}$$

$$(EQN. 20) \quad \frac{1}{2D\alpha^3} = \frac{1}{2E \cdot 0,000497 \cdot 2,1438^3} = \frac{102,067}{E} \text{ m}^2/\text{kN}$$

$$(EQN. 21) \quad \frac{1}{2D\alpha^2} = \frac{1}{2E \cdot 0,000497 \cdot 2,1438^2} = \frac{218,814}{E} \text{ m}/\text{kN}$$

$$(EQN. 22) \quad \frac{1}{D\alpha} = \frac{1}{E \cdot 0,000497 \cdot 2,1438} = \frac{938,194}{E} \text{ kN}^{-1}.$$

2. Calcolo delle costanti angolari dovute al carico idraulico sulla piastra di fondo:

$$(EQN. 23) \quad \frac{w_p(0)}{\Delta h} \delta_i = \frac{5913,162}{E12,00} \cdot 1 = \frac{492,764}{E} \text{ rad}$$

$$(EQN. 24) \quad \frac{\Delta h \gamma_{fluido} R^3}{8D_p(1 + \nu)} = \frac{(120 \text{ kN/m}^2)(2,07 \text{ m})^3}{8 \cdot (0,003655E \text{ kNm})(1 + 0,15)} = \frac{31653,160}{E} \text{ rad}$$

$$(EQN. 25) \quad \frac{\gamma_c s_p (R + s_m)^3}{8D_p(1 + \nu)} = \frac{(4,50 \text{ kN/m}^2)(2,25 \text{ m})^3}{8 \cdot (0,003655E \text{ kNm})(1 + 0,15)} = \frac{1524,351}{E} \text{ rad}.$$

STEP 3 Relazioni di deformabilità della piastra di base

1. In riferimento alla (4-47) a pagina 109:

$$(EQN. 26) \quad \begin{cases} w_p(0) \approx 0 \\ \varphi_p(0) = -\frac{R}{D_p(1 + \nu)} M(0) + \left(\frac{\Delta h \gamma_{fluido} R^3}{8D_p(1 + \nu)} + \frac{\gamma_c s_p (R + s_m)^3}{8D_p(1 + \nu)} \right) \end{cases}$$

sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$(EQN. 27) \quad \begin{cases} w_p(0) \approx 0 \\ \varphi_p(0) = -\frac{492,476}{E} M(0) + \left(\frac{31653,160}{E} + \frac{1524,351}{E} \right) \end{cases}$$

STEP 4 **Relazioni di deformabilità per il mantello del serbatoio**

1. In riferimento alla (4–39) a pagina 106, con $\delta_i = 1$ e $r = R$:

$$(EQN. 28) \quad \begin{cases} w(0) = \frac{1}{2D\alpha^3} V(0) + \frac{1}{2D\alpha^2} M(0) + p_c(0) \frac{r^2}{Es} \\ \varphi(0) = \frac{1}{2D\alpha^2} V(0) + \frac{1}{D\alpha} M(0) + \frac{w_p(0)}{\Delta h} \delta_i \end{cases}$$

e sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$(EQN. 29) \quad \begin{cases} Ew(0) = 102,067 V(0) + 218,814 M(0) + 5913,162 \\ E\varphi(0) = 218,814 V(0) + 938,194 M(0) + 492,764 \end{cases}$$

STEP 5 **Equazione di congruenza deformazioni mantello e piastra di fondo**

1. Si utilizza il sistema di equazioni dato dalla (4–51) a pagina 111:

$$(EQN. 30) \quad \begin{cases} w(0) = w_p(0) \approx 0 \\ \varphi(0) = \varphi_p(0) \neq 0 \end{cases}$$

e sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$(EQN. 31) \quad \begin{cases} Ew(0) = 102,067 V(0) + 218,814 M(0) + 5913,162 \approx 0 \\ E\varphi(0) = 218,814 V(0) + 938,194 M(0) + 492,764 = -492,476 M(0) + 31807,511 \end{cases}$$

$$(EQN. 32) \quad \begin{cases} Ew(0) = 102,067 V(0) + 218,814 M(0) \approx -5913,162 \\ E\varphi(0) = 218,814 V(0) + 1430,670 M(0) = +31314,747 \end{cases}$$

2. Risolvendo ad esempio con il metodo di KRAMER si ottiene (sezione $z = 0$):

- valore della sollecitazione tagliante: $V(0) = -259 \text{ kN/m}$ (direzione centripeta);
- sollecitazione flettente: $M(0) = 93,8 \text{ km/m} > 0$ (trazione lembo interno).

STEP 6 **Calcolo delle sollecitazioni di progetto SLU sul mantello del serbatoio**

1. Si passa direttamente alle sollecitazioni di progetto moltiplicando i valori delle sollecitazioni caratteristiche per il valore $\gamma_Q = 1,50$:
2. Taglio di progetto (per unità di larghezza di sezione resistente) sulla base del mantello:

$$V_{Ed,m} = \gamma_Q V(0) = 1,50 \cdot |-259 \text{ kN/m}| = 388,5 \text{ kN/m}$$

3. Sollecitazione flettente di progetto (per larghezza unitaria di sezione resistente) sulla base del mantello (pedice “m”), con verso uguale a quello in Figura 4–7 a pagina 119:

$$M_{Ed,m} = \gamma_Q M(0) = 1,50 \cdot (93,8 \text{ kNm/m}) = 140,5 \text{ kNm/m}$$

STEP 7 **Calcolo delle sollecitazioni di progetto SLU sulla piastra di base**

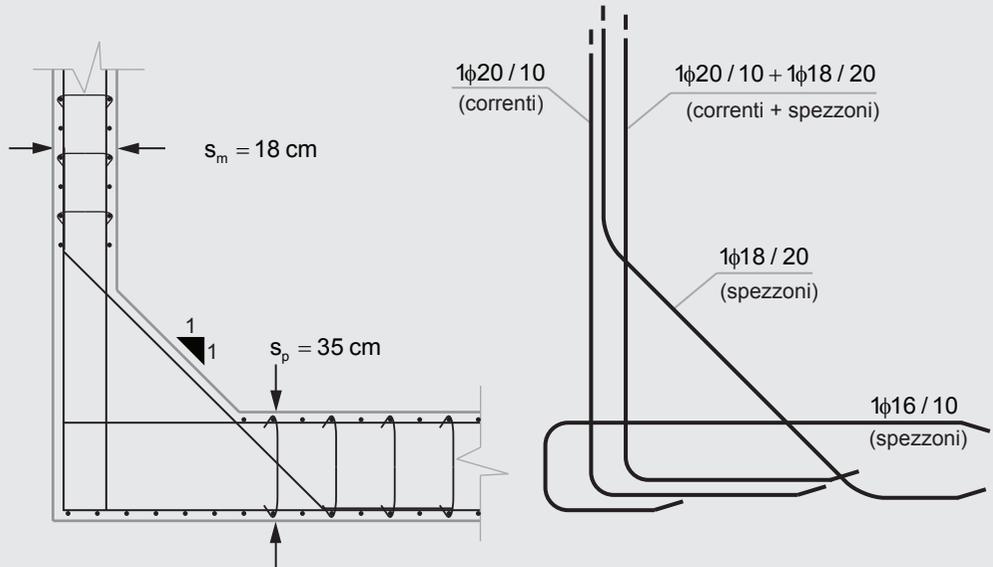
1. Si passa direttamente alle sollecitazioni di progetto moltiplicando i valori delle sollecitazioni caratteristiche per il valore $\gamma_Q = 1,50$:
2. Sollecitazione flettente di progetto (per larghezza unitaria di sezione resistente) sul bordo della piastra (pedice “p”) in condizioni di continuità con il mantello:

$$M_{Ed,p} = -\gamma_Q M(0) = |1,50 \cdot (-93,8 \text{ kNm/m})| = 140,5 \text{ kNm/m}$$

di verso opposto ma uguale in intensità a quello agente sul mantello.

Figura 4-8

Schema qualitativo predimensionamento armature tese a flessione nella sola zona di raccordo tra mantello e piastra di fondazione del serbatoio.



Le fibre tese della piastra, lungo il bordo solidale con la base del mantello, sono quelle superiori: il segno algebrico del valore momento lungo il bordo della piastra è infatti negativo.

3. Sollecitazione flettente di progetto (per larghezza unitaria di sezione resistente) sul centro della piastra:

$$M_{Ed,p,0} = \gamma_Q M_0(r=0) = -\gamma_Q M(0) + \gamma_Q \left[\frac{\gamma_c s_p (R + s_m)^2}{16} + \frac{\Delta h \gamma_{fluido} R^2}{16} \right] (3 + \nu)$$

sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$M_{Ed,p,0} = 1,50 \{ -93,8 + [1,42 + 32,14] 3,15 \} = 17,9 \text{ kNm/m} > 0.$$

Il valore della somma algebrica è positivo: le fibre tese della piastra nella sua zona centrale, quindi, sono quelle inferiori.

STEP 8

Precalcolo armature a trazione (bozza in Figura 4-8)

1. Grandezze di calcolo delle sezioni:

- copriferro nominale armature più esterne $c_{nom} = 35 \text{ mm}$;
- massimo ingombro armature trasversali di ripartizione: $\Delta = \phi 12$ (stima);
- massimo diametro armature portanti: $\phi_{max} = 16 \text{ mm}$ (stima);
- altezza utile sezioni resistenti mantello:

$$h_m = s_m - (c_{nom} + \Delta + 0,5\phi) = 18,0 - (3,5 + 1,4 + 0,8) \approx 12 \text{ cm}$$

- altezza utile sezioni resistenti piastra di fondo:

$$h_p = s_p - (c_{nom} + \Delta + 0,5\phi) = 35,0 - (3,5 + 1,4 + 0,8) \approx 29 \text{ cm}.$$

2. Armature tese sull'estradosso della piastra di fondo lungo il suo bordo:

$$(EQN. 33) \quad A_{s,p,sup} = \frac{M_{Ed,p}}{0,87 h_p \eta f_{yd}} = \frac{140,5 \text{ kNm/m}}{0,87 (0,29 \text{ m}) 0,8 (39,1 \text{ kN/cm}^2)} = 17,8 \text{ cm}^2/\text{m}$$

realizzabile con $\phi 16/10$;

3. armature tese sull'intradosso della piastra di fondo nella parte centrale:

$$(EQN. 34) \quad A_{s,p,0} = \frac{M_{Ed,p,0}}{0,87h_p\eta f_{yd}} = \frac{17,9 \text{ kNm/m}}{0,87(0,29 \text{ m})0,8(39,1 \text{ kN/cm}^2)} = 3 \text{ cm}^2/\text{m}$$

realizzabile con una rete $\phi 10/20 \times 20$;

4. armature tese sulla parete del mantello nell'intorno della piastra di fondo:

$$(EQN. 35) \quad A_{s,p,sup} = \frac{M_{Ed,p}}{0,87h_m\eta f_{yd}} = \frac{140,5 \text{ kNm/m}}{0,87(0,12 \text{ m})0,8(39,1 \text{ kN/cm}^2)} = 43,0 \text{ cm}^2/\text{m}$$

realizzabile con $1\phi 20/10$ (correnti) + $1\phi 18/20$ (spezzoni) prevedendo preferibilmente un raccordo graduale tra lo spessore della parete e la piastra di base in modo da aumentare la sezione resistente della parete nell'intersezione con l'estradosso del fondo (si veda appunto bozza in Figura 4–8).

4–4 SOLLECITAZIONI PER GRADIENTI DI TIPO TERMICO

Rimanendo nell'approssimazione pratica di “tubi lunghi” – quando cioè la lunghezza d'onda λ delle perturbazioni causate dalle sollecitazioni al contorno è trascurabile rispetto alle dimensioni longitudinali $z = \ell \gg \lambda$ dell'elemento idraulico (tubo o cisterna) – è possibile ritenere che il campo di temperatura $T = T(x; y; z)$ vari in maniera trascurabile lungo la coordinata z all'interno del tratto $z = \lambda$ entro cui si smorzano le sollecitazioni trasmesse dal contorno. In questo caso, è possibile valutare immediatamente i coefficienti elastici relativi alla presenza di gradienti termici solo trasversalmente alle pareti del tubo quando, ad esempio, il fluido convogliato all'interno si trovi a una temperatura diversa da quella ambiente T_{amb} al di fuori del tubo o della cisterna.

Utilizzando il *principio di sovrapposizione degli effetti*, valido per piccole deformazioni in campo elastico lineare, è possibile definire anche in caso di regime termico le relative equazioni di deformazione e congruenza.

Variazioni di temperatura su corpo non iperstatico

Un corpo vincolato isostaticamente, come noto, può deformarsi a causa della presenza di gradienti termici restando privo di tensioni di coazione. Ad esempio, una variazione uniforme di temperatura imposta su tutto il volume di un tronco di tubazione non provoca alcuna tensione, essendo il tubo completamente libero di variare il suo volume.

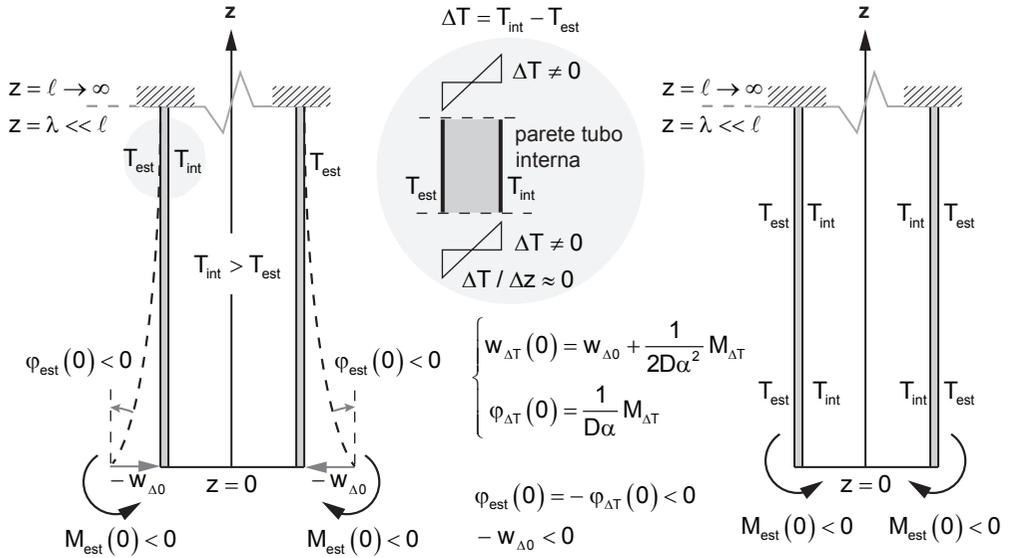
In tal caso, il volume dell'elemento idraulico (tubo o cisterna) si contrae o si decontrae uniformemente, senza variare gli angoli della sua geometria, semplicemente scalando la sua forma secondo un fattore costante su ogni sua parte.

In particolare, se indichiamo con $\bar{\alpha}$ il fattore costante del *coefficiente di espansione termica lineare* del materiale alla temperatura media T_m di riferimento che interessa le pareti della tubazione e con ΔT_0 la variazione di temperatura tra T_m e la temperatura esterna T_{amb} , in una qualsiasi sezione $0 \leq z \leq \lambda$, la variazione uniforme radiale del tubo (considerato quindi libero di espandersi o di contrarsi uniformemente con il suo volume) è:

$$w_{\Delta 0} = \bar{\alpha} \Delta T_0 r = \bar{\alpha} r (T_m - T_{amb}) \quad (4-52)$$

Figura 4-9

Tratto di tubazione vincolato solo nella sezione a distanza della lunghezza d'onda λ e con sollecitazione flettente M_{est} (applicata nella sezione iniziale $z = 0$) che tende ad annullare in $z = 0$ tutte le deformazioni causate dal gradiente termico (lineare) imposto sulle pareti del tubo in tutto il tratto $z = \lambda$: incremento radiale del raggio $w_{\Delta 0}$ e rotazione $\varphi_{\Delta T}$ lembo del bordo.



con r raggio indeformato del tubo (o della cisterna), appunto. Per quanto osservato, essendo il tubo considerato libero a qualsiasi movimento, non presenterà in particolare alcuna variazione angolare. Pertanto, le rotazioni in ogni suo punto saranno nulle: $\varphi_{\Delta T} = 0$.

Variazioni di temperatura su tubo iperstatico

Viceversa, se alcune parti del tubo sono vincolate in modo tale da contrastare in qualche modo quelle deformazioni che altrimenti avverrebbero in piena libertà, nasceranno delle reazioni di sollecitazione elastica (in particolare $V_{\Delta T}$ e $M_{\Delta T}$) che si possono determinare imponendo delle semplici relazioni di congruenza sulle deformazioni. È il caso particolare riportato nello schema in Figura 4-9: per riportare anche nella sezione iniziale di riferimento ($z = 0$) le medesime condizioni di vincolo presenti in $z = \lambda$ è necessario applicare in $z = 0$ un momento $M_{est}(0)$ con un verso che ruoti i lembi del bordo in $z = 0$ di un angolo $\varphi_{\Delta T} < 0$ (orario per la parete di destra e antiorario per la parete di sinistra) e anche che riporti in $z = 0$ il raggio, al valore indeformato r , con una contrazione radiale $-w_{D0} < 0$. È il caso di osservare, come anche indicato nella Figura 4-9, che la sollecitazione flettente $M_{est}(0)$ applicata nella sezione $z = 0$ si estingue in intensità praticamente per distanze $z > \lambda$: l'intero tronco di tubo, infatti, è approssimabile come "tubo lungo".

Si è già osservato che, quando sulle pareti del tubo (di spessore s) è presente un gradiente termico ΔT , per annullarne gli effetti delle deformazioni che così si formano lungo l'intero tubo è necessario applicare in $z = 0$ una sollecitazione flettente $M_{est}(0)$ di verso tale che li annulli la curvatura $\chi_{\Delta T}(0)$ e le distorsioni radiali $w_{\Delta T}(0)$ causate dal campo di temperatura ($M_{est}(0)$ deve agire con deformazioni opposte in verso e uguali in intensità):

$$M_{est}(0) = -M_{\Delta T}(0) = -D(1 + \nu)\chi_{\Delta T}(0) = -D(1 + \nu)\frac{\bar{\alpha}\Delta T}{s} < 0 \text{ se } \Delta T > 0.$$

Pertanto, sfruttando i coefficienti elastici sulle deformazioni (traslazioni e rotazioni), è possibile generalizzare le relazioni di deformabilità per sola presenza di un gradiente termico $\Delta T \neq 0$ (definito qui come differenza tra le temperature tra interno ed esterno della parete del tubo $\Delta T = T_{int} - T_{est}$) ponendo le equazioni termiche in questa forma:

$$\begin{cases} \varphi_{\Delta T}(0) = 0 & + \frac{1}{D\alpha} M_{\Delta T}(0) \\ w_{\Delta T}(0) = w_{\Delta 0} + \frac{1}{2D\alpha^2} M_{\Delta T}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\Delta T}(0) = \frac{1}{D\alpha} M_{\Delta T}(0) \\ w_{\Delta T}(0) = \bar{\alpha} r (T_m - T_{amb}) + \frac{1}{2D\alpha^2} M_{\Delta T}(0) \end{cases}$$

e semplificando:

$$\begin{cases} \varphi_{\Delta T}(0) = \frac{(1 + \nu)}{\alpha} \frac{\bar{\alpha} \Delta T}{s} \\ w_{\Delta T}(0) = \bar{\alpha} r (T_m - T_{amb}) + \frac{(1 + \nu)}{2\alpha^2} \frac{\bar{\alpha} \Delta T}{s} \end{cases} \quad (4-53)$$

Ritornando infatti al caso particolare in Figura 4–9, in presenza di campo termico lineare lungo lo spessore delle pareti del tubo, per allineare i lembi nella sezione $z = 0$ come quelli presenti a partire dalla sezione $z = \lambda$, si deve applicare sul bordo iniziale una sollecitazione flettente di verso tale che porti la rotazione sul bordo uguale e contraria a quella esistente in $z = 0$ (e quindi non di valore nullo) e la contrazione assiale al valore nullo (per riportare quindi il valore del raggio al suo valore iniziale r di tubo indeformato). Ovvero, partendo dall’assetto deformato, per riportare le pareti del tubo (nella sezione $z = 0$) uguali a quelle nelle sezioni $z > \lambda$, si devono imporre in $z = 0$ le seguenti deformazioni compressive:

$$\begin{cases} \varphi_{est}(0) = -\varphi_{\Delta T}(0) < 0 \\ w_{est}(0) = 0 \end{cases} \quad (4-54)$$

In termini matematici, si deve avere (proprio per lo schema particolare in Figura 4–9), applicando ai primi membri della (4–54) i coefficienti elastici della flessione:

$$\begin{cases} \varphi_{est}(0) = \frac{1}{D\alpha} M_{est}(0) < 0 \\ w_{est}(0) = w_{\Delta 0} + \frac{1}{2D\alpha^2} M_{est}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{est}(0) = -\frac{1}{\alpha} w_{\Delta 0} 2\alpha < 0 \\ M_{est}(0) = -w_{\Delta 0} 2D\alpha^2 < 0 \end{cases}$$

avendo calcolato l’espressione di $M_{est}(0)$ dalla seconda equazione e avendola poi sostituita nella prima equazione per dedurne il corrispondente valore di $\varphi_{est}(0)$.

Come si vede, in accordo con lo schema in figura, per annullare completamente dall’esterno le sollecitazioni causate dalla temperatura sulla sezione inizialmente libera $z = 0$, è necessario che la sollecitazione flettente esterna $M_{est}(0)$ sia negativa – tendente quindi le fibre esterne del mantello della tubazione – concordemente alle rotazioni $\varphi_{est}(0) < 0$ che risultano quindi di verso opposto alla convenzione stabilita come positiva nei paragrafi precedenti.

Equazioni delle deformazioni in regime pressorio e termico

A questo punto, potendo generalizzare, sfruttando il sistema di equazioni alla (4–39) a pagina 106 e il principio di sovrapposizione degli effetti, aggiungendo anche i contributi alla deformazioni per gradiente termico trasversalmente alle pareti dei tubi (o della cisterna), si arriva al sistema generale:

$$\begin{cases} w(0) = \frac{1}{2D\alpha^3} V(0) + \frac{1}{2D\alpha^2} M(0) + p_c(0) \frac{r^2}{Es} + \left(w_{\Delta 0} + \frac{1}{2D\alpha^2} M_{\Delta T}(0) \right) \\ \varphi(0) = \frac{1}{2D\alpha^2} V(0) + \frac{1}{D\alpha} M(0) + \frac{w_b(0)}{\Delta h} \delta_i + \left(\frac{1}{D\alpha} M_{\Delta T}(0) \right) \end{cases} \quad (4-55)$$

avendo racchiuso tra parentesi tonde a secondo membro i due contributi relativi agli effetti della temperatura sulle deformazioni. Avendo generalizzato, si ricorda qui il significato dell'operatore δ_i relativamente ai carichi pressori:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{nel caso di cisterna in verticale (o forte perdita di carico in tubazione)} \\ 0 & \text{nel caso di tubazione flangiata (o di perdite di carico trascurabili in tubazione)} \end{cases}$$

Inglobando le formulazioni generali (4–53) nel sistema (4–55), si ottengono le due formulazioni operative per la congruenza alle deformazioni del singolo tronco di tubazione:

$$\begin{cases} w(0) = \frac{1}{2D\alpha^3} V(0) + \frac{1}{2D\alpha^2} M(0) + p_c(0) \frac{r^2}{Es} + \bar{\alpha} r (T_m - T_{amb}) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T}{2\alpha^2 s} \\ \varphi(0) = \frac{1}{2D\alpha^2} V(0) + \frac{1}{D\alpha} M(0) + \frac{w_p(0)}{\Delta h} \delta_i + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T}{\alpha s} \end{cases}$$

Equazioni delle deformazioni in regime termico come dominante

Qualora gli effetti di tipo pressorio possano considerarsi trascurabili rispetto agli effetti delle temperature, si potranno trascurare i termini dipendenti dal carico pressorio rispetto ai termini dipendenti dagli effetti del gradiente termico. Le equazioni di congruenza delle deformazioni si riduce alla forma:

$$\begin{cases} w(0) = \frac{1}{2D\alpha^3} V(0) + \frac{1}{2D\alpha^2} M(0) + \bar{\alpha} r (T_m(0) - T_{amb}) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T(0)}{2\alpha^2 s} \\ \varphi(0) = \frac{1}{2D\alpha^2} V(0) + \frac{1}{D\alpha} M(0) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T(0)}{\alpha s} \end{cases} \quad (4-56)$$

➤ IMPORTANTE

avendo per maggiore esattezza specificato, anche per i coefficienti elastici dipendenti dai gradienti di temperatura, che si tratta di grandezze tutte misurate sulla sezione iniziale di riferimento $z = 0$.

Equazioni di congruenza tra due tubazioni su medesima sezione. Si riporta di seguito l'espressione formale dell'equazione di congruenza delle deformazioni riferite a una medesima sezione in comune tra due tronchi di tubazioni di diverse caratteristiche termiche. Si definiranno a tal proposito un tronco di tubazione a sinistra (pedice "s") e un tronco di tubazione a destra (pedice "d") sul piano del foglio.

Come indicato nello schema in Figura 4–10, per poter mantenere sempre le due incognite iperstatiche $M(0)$ e $V(0)$ è necessario tenere conto delle relazioni reciproche tra segni e versi congruentemente con la convenzione usualmente adottata. Anche dal punto di vista delle rotazioni, scegliendo ad esempio l'asse delle z orientato lungo lo sviluppo longitudinale della tubazione di sinistra, le rotazioni dei lembi del contorno a quota $z = 0$ del tronco di tubazione di destra avrà segno opposto rispetto a quello di destra (variando la derivata della funzione w rispetto al raggio delle tubazioni).

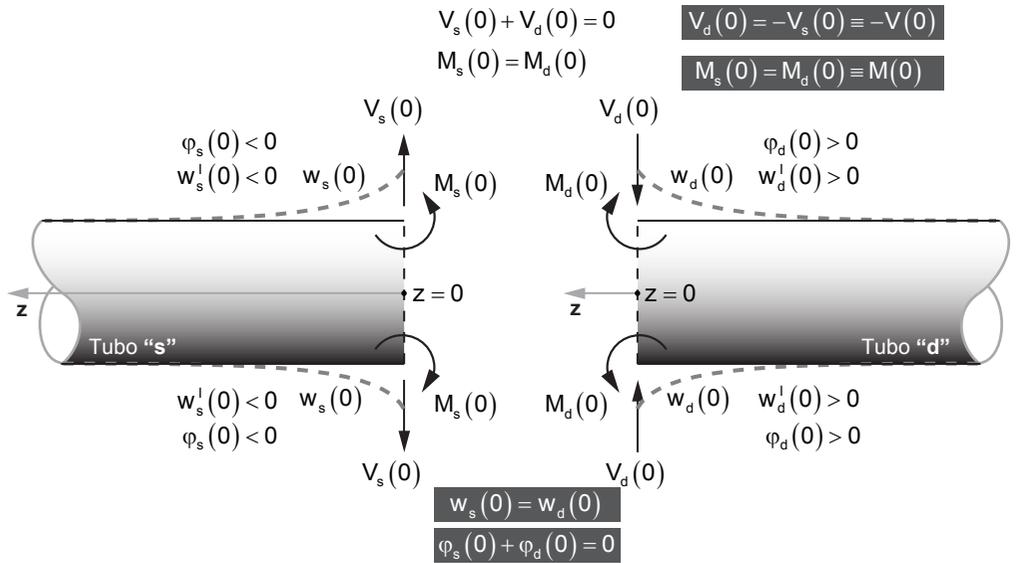
È facile rendersi conto che, adottando ad esempio la formulazione a sistema (4–56) per il tronco di sinistra, per renderla compatibile anche con il tronco di tubazione di destra si dovranno per quest'ultima imporre le seguenti posizioni sul sistema (4–56):

$$V_d(0) = -V_s(0) \equiv V(0) \text{ per il taglio;}$$

$$M_d(0) = M_s(0) \equiv M(0) \text{ per la sollecitazione flettente.}$$

Figura 4-10

Schema di equilibrio delle sollecitazioni iperstatiche V, M su una sezione trasversale di condotta che separa due tronchi di tubazione di caratteristiche geometriche e termiche differenti. Origine del sistema di riferimento (sezione iniziale $z = 0$) orientato a sinistra per la tubazione a sinistra nello schema. Mostrate le relazioni tra i segni secondo le convenzioni di segno stabilite.



Una volta specificate le due formulazioni per il tronco di sinistra (w_s e φ_s) e per il tronco di destra (w_d e φ_d), il sistema delle equazioni di congruenza sulla sezione di continuità a quota $z = 0$ dovrà porsi in questa forma (si veda Figura 4-10):

$$\begin{cases} w_s(0) = w_d(0) \\ \varphi_s(0) = -\varphi_d(0) \end{cases} \quad (4-57)$$

➡ **IMPORTANTE**

La soluzione del sistema fornirà le due uniche incognite presenti: $V(0)$ e $M(0)$ i cui versi sono riferiti alla convenzione dei segni (positivi) del tronco di tubazione di sinistra. In particolare, la formulazione a sistema (4-56) a pagina 129 rimarrà formalmente identica per la tubazione di sinistra (salvo la comparsa del pedice “s” sulle varie grandezze):

$$\begin{cases} w_s(0) = \frac{1}{2D_s\alpha_s^3}V(0) + \frac{1}{2D_s\alpha_s^2}M(0) + \bar{\alpha}r_s(T_{m,s}(0) - T_{amb}) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T_s(0)}{2\alpha_s^2 s_s} \\ \varphi_s(0) = \frac{1}{2D_s\alpha_s^2}V(0) + \frac{1}{D_s\alpha_s}M(0) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T_s(0)}{\alpha_s s_s} \end{cases}$$

mentre per il tronco di tubazione di destra si dovranno assumere le equazioni seguenti:

$$\begin{cases} w_d(0) = -\frac{1}{2D_d\alpha_d^3}V(0) + \frac{1}{2D_d\alpha_d^2}M(0) + \bar{\alpha}r_d(T_{m,d}(0) - T_{amb}) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T_d(0)}{2\alpha_d^2 s_d} \\ \varphi_d(0) = -\frac{1}{2D_d\alpha_d^2}V(0) + \frac{1}{D_d\alpha_d}M(0) + \frac{(1+\nu)\bar{\alpha}\Delta T_d(0)}{\alpha_d s_d} \end{cases}$$

dove compare il pedice “d” per significare che si tratta appunto del tronco a destra. Si ricorda, in particolare, che le suddette equazioni delle deformazioni per i due tronchi di tubazioni solidarizzate nella sezione $z = 0$ prescindono dalla presenza degli effetti pressori (pressioni e/o perdite di carico all’interno della tubazione) che quindi vengono considerati trascurabili rispetto agli effetti termici sulle sollecitazioni.

ESEMPIO 4-5

Sollecitazioni su un tratto di circuito attraversato da vapore

Un tratto di circuito, attraversato da vapore acqueo a $T_{int} = 100^\circ\text{C}$, è costituito da due tronchi di tubazione in acciaio di medesimo diametro interno $\phi_{int} = 30\text{ mm}$ ma di differente spessore: rispettivamente $s_{est,s} = 6,0\text{ mm}$ (tronco a sinistra) e $s_{est,d} = 3,5\text{ mm}$ (tronco a destra). Il tronco a destra, di diametro minore, è rivestito da un'opportuna coibentazione.

A regime, la temperatura sulla superficie esterna del primo tronco (non coibentato) è di $T_{est,s} = 55^\circ\text{C}$; mentre, nel secondo tronco (coibentato) la temperatura sulla superficie esterna della sua parete di acciaio è $T_{est,d} = 90^\circ\text{C}$.

Trascurando l'inevitabile trasmissione di calore che si registra in senso longitudinale attraverso la sezione di saldatura fra i due tronchi di tubazione e trascurando inoltre le perdite di carico e la pressione nel tratto compreso tra le due lunghezze d'onda (λ_s, λ_d) dei due tubi, oltre le quali si attenuano del tutto le perturbazioni sulla sezione ($z = 0$) di discontinuità costituita dall'anello di saldatura tra i due tronchi, si calcolino le incognite iperstatiche nella zona di giunzione tramite saldatura a completa penetrazione.

Si valuti l'andamento della sollecitazione flettente longitudinale lungo il tratto di circuito.

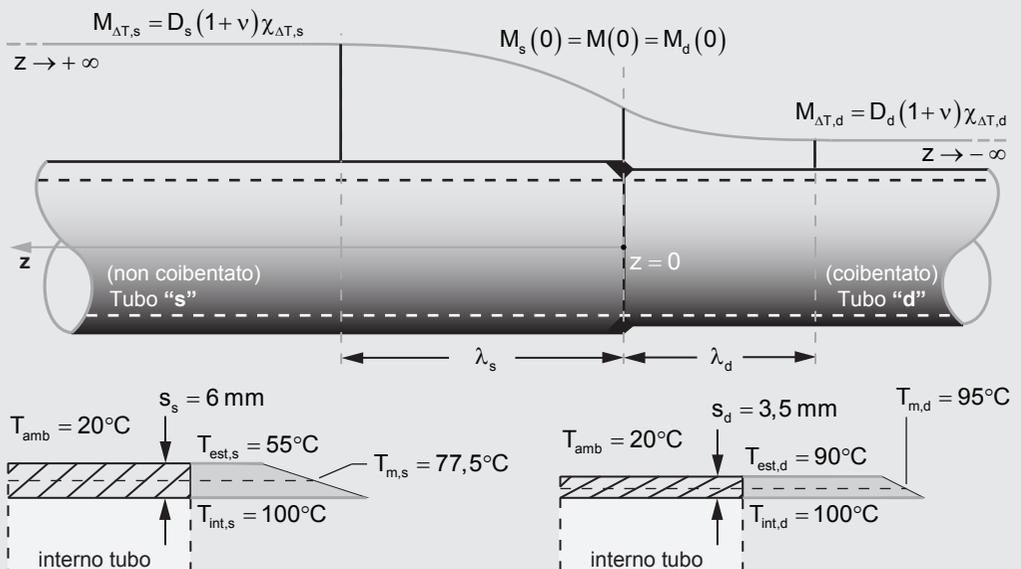
Soluzione

Si procede con il calcolo delle grandezze costanti che intervengono nel calcolo per i due tronchi di tubazione e poi al calcolo dei relativi coefficienti elastici. Trattandosi di tubazioni in acciaio, con spessori relativamente contenuti rispetto ai rispettivi raggi, per brevità e a favore di sicurezza nel calcolo delle intensità delle forze iperstatiche $V(0)$ e $M(0)$, si calcoleranno i coefficienti elastici facendo riferimento al raggio (utile) interno delle tubazioni.

Intanto è opportuno osservare preliminarmente che, potendo accettare l'ipotesi consueta di "tubi lunghi", nei tratti delle due tubazioni oltre la rispettiva distanza della lunghezza d'onda λ , di smorzamento delle perturbazioni (dalla sezione di riferimento $z = 0$), e sufficientemente prima dell'eventuale sezione di bordo libero (ad esempio, per sbocco in atmosfera $z = \ell$), le sollecitazioni flettenti longitudinali ($M_{\Delta T,s}$ e $M_{\Delta T,d}$) vengono a dipen-

Figura 4-11

Schema qualitativo del tratto di circuito con connessione dei due tronchi di tubazione raccordati nella sezione di riferimento $z = 0$ mediante saldatura a completa penetrazione. Rappresentato in alto l'andamento della sollecitazione flettente longitudinale e in basso i gradienti termici (lineari) attraverso lo spessore delle pareti dei due tronchi di tubazione.



dere dalla sola presenza del gradiente termico esistente tra gli spessori delle relative pareti dei tubi. In particolare – indicando con ℓ_s ed ℓ_d rispettivamente le lunghezze effettive del tronco di sinistra e di destra – in presenza del solo gradiente termico nei tratti delle due tubazioni definite rispettivamente da:

- $\lambda_s \leq z < \ell_s$ per la tubazione di sinistra;
- $\lambda_d \leq |z| < \ell_d$ per tubazione di destra,

le sollecitazioni flettenti longitudinali $M_{\Delta T,s}$ e $M_{\Delta T,d}$ coincidono in valore con le relative sollecitazioni flettenti circonferenziali. In particolare, nella fibra circolare lungo il bordo libero della tubazione (ad esempio, sulla sezione di sbocco in atmosfera, con $z = \ell$) non potendoci essere alcun gradiente termico (tutti i punti della circonferenza del bordo libero devono trovarsi alla stessa temperatura T_{bordo}), la sollecitazione circonferenziale non potrà che essere nulla. Pertanto, escludendo le sezioni di sbocco (bordi liberi delle tubazioni), procedendo verso la sezione $z = 0$, lungo i due tratti di tubazione al di fuori delle rispettive lunghezze d'onda, le sollecitazioni flettenti circonferenziali si mantengono costanti e pari al loro valore massimo e quindi uguali in modulo ai rispettivi momenti flettenti longitudinali $M_{\Delta T,s}$ e $M_{\Delta T,d}$.

STEP 1 **Calcolo grandezze costanti della soluzione**

1. Costanti del tubo (in acciaio) di sinistra (pedice “s”):

- spessore parete tubo: $s_s = 6,0 \text{ mm}$;
- raggio mediano del tubo: $r_s = 0,5 \cdot (\phi_{int} + s_{est,s}) = 18 \text{ mm}$;
- modulo elastico: $E = 210000 \text{ N/mm}^2$;
- coefficiente di Poisson: $\nu = 0,3$;
- modulo di rigidezza D_s :

$$D_s = \frac{E s_s^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{E (6,0 \text{ mm})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 19,78E \text{ Nmm} = 4,154 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

- fattore α_s :

$$\alpha_s = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{\sqrt{r_s s_s}} = \frac{\sqrt[4]{3(1 - 0,3^2)}}{\sqrt{(18 \text{ mm})(6,0 \text{ mm})}} = 0,1237 \text{ mm}^{-1}$$

- lunghezza d'onda λ_s :

$$\lambda_s = \frac{2\pi}{\alpha_s} = \frac{2 \cdot 3,141}{(0,1237 \text{ mm}^{-1})} \approx 51 \text{ mm} \text{ (arrotondato)}$$

- gradiente termico (lineare) attraverso la parete del tubo, ΔT_s :

$$\Delta T_s = T_{int} - T_{est,s} = (100 - 55) = 45^\circ \text{C}$$

- temperatura media della parete del tubo, $T_{m,s}$ (relativa alla temperatura ambiente):

$$(T_{m,s} - T_{amb}) = \frac{T_{int} + T_{est,s}}{2} - T_{amb} = \frac{100 + 55}{2} - 20 = 57,5^\circ \text{C}.$$

2. Costanti del tubo (in acciaio) di destra (pedice “d”):

- spessore parete tubo: $s_d = 3,5 \text{ mm}$;
- raggio mediano del tubo: $r_d = 0,5 \cdot (\phi_{int} + s_{est,d}) = 16,75 \text{ mm}$;
- modulo elastico: $E = 210000 \text{ N/mm}^2$;
- coefficiente di Poisson: $\nu = 0,3$;

- modulo di rigidezza D_d :

$$D_d = \frac{E s_d^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{E (3,5 \text{ mm})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 3,93E \text{ Nmm} = 0,825 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

- fattore α_d :

$$\alpha_d = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{\sqrt{r_d s_d}} = \frac{\sqrt[4]{3(1 - 0,3^2)}}{\sqrt{(16,75 \text{ mm})(3,50 \text{ mm})}} = 0,1679 \text{ mm}^{-1}$$

- lunghezza d'onda λ_d :

$$\lambda_d = \frac{2\pi}{\alpha_d} = \frac{2 \cdot 3,141}{(0,1679 \text{ mm}^{-1})} \approx 38 \text{ mm (arrotondato)}$$

- gradiente termico (lineare) attraverso la parete del tubo, ΔT_d :

$$\Delta T_d = T_{int} - T_{est,d} = (100 - 90) = 10^\circ \text{C}$$

- temperatura media della parete del tubo, $T_{m,d}$ (relativa alla temperatura ambiente):

$$(T_{m,d} - T_{amb}) = \frac{T_{int} + T_{est,d}}{2} - T_{amb} = \frac{100 + 90}{2} - 20 = 75^\circ \text{C}.$$

STEP 2

Calcolo dei coefficienti elastici per le incognite iperstatiche

1. Coefficienti elastici del tubo di sinistra (pedice “s”):

$$\frac{1}{2D_s \alpha_s^3} = \frac{1}{2(4,154 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(0,1237 \text{ mm}^{-1})^3} = 6,361 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^2$$

$$\frac{1}{2D_s \alpha_s^2} = \frac{1}{2(4,154 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(0,1237 \text{ mm}^{-1})^2} = 7,868 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ mm}$$

$$\frac{1}{D_s \alpha_s} = \frac{1}{(4,154 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(0,1237 \text{ mm}^{-1})} = 1,946 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1}.$$

2. Coefficienti elastici del tubo di destra (pedice “d”):

$$\frac{1}{2D_d \alpha_d^3} = \frac{1}{2(0,825 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(0,1679 \text{ mm}^{-1})^3} = 1,282 \cdot 10^{-4} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^2$$

$$\frac{1}{2D_d \alpha_d^2} = \frac{1}{2(0,825 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(0,1679 \text{ mm}^{-1})^2} = 2,152 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ mm}$$

$$\frac{1}{D_d \alpha_d} = \frac{1}{(0,825 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(0,1679 \text{ mm}^{-1})} = 7,224 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1}.$$

STEP 3

Calcolo componenti di dilatazioni e distorsioni termiche

1. Componenti di deformazione termica per tubo di sinistra (pedice “s”):

- dilatazione termica radiale per carico termico uniforme:

$$w_{T,s} = \bar{\alpha} r_s (T_{m,s}(0) - T_{amb}) = (1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(18,0 \text{ mm})(57,5^\circ\text{C}) = 0,01242 \text{ mm}$$

- distorsione termica curvatura per gradiente (lineare) nelle pareti:

$$w_{\Delta T,s} = \frac{(1 + \nu)}{2\alpha_s^2} \frac{\bar{\alpha} \Delta T_s(0)}{s_s} = \frac{(1 + 0,3)(1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(45^\circ\text{C})}{2(0,1237 \text{ mm}^{-1})^2 (6,0 \text{ mm})} = 0,00382 \text{ mm}$$

STEP 5 Equazioni di congruenza delle deformazioni tra i due tubi nella sezione $z = 0$

Si fa riferimento, per quanto osservato in merito alla convenzione dei segni delle incognite iperstatiche e delle rotazioni nei due tronchi, al sistema di equazioni dato dalla “(4-57)” a pagina 130:

$$(EQN. 36) \quad \begin{cases} w_s(0) = w_d(0) \\ \varphi_s(0) = -\varphi_d(0) \end{cases}$$

Sostituendo le relative espressioni e semplificando, si ottiene il sistema risolvete nelle uniche due incognite $V(0)$ e $M(0)$:

$$(EQN. 37) \quad \begin{cases} \left(\frac{6,361}{10^5} + \frac{1,282}{10^4} \right) V(0) + \left(\frac{7,868}{10^6} - \frac{2,152}{10^5} \right) M(0) = -0,00038 \\ \left(\frac{6,557}{10^6} - \frac{1,927}{10^5} \right) V(0) + \left(\frac{1,777}{10^6} + \frac{6,837}{10^6} \right) M(0) = -0,00121 \end{cases}$$

Risolvendo ad esempio con il metodo di KRAMER si calcolano (sulla sezione $z = 0$) i valori caratteristici delle incognite iperstatiche con verso e segno come definiti nella Figura 4-10 a pagina 130. In particolare, relativamente al tronco di sinistra:

- valore della sollecitazione tagliante: $V(0) = -13 \text{ N/mm}$ (direzione centripeta);
- sollecitazione flettente: $M(0) = -151 \text{ Nmm/mm} > 0$ (trazione lembi esterni).

STEP 6 Calcolo dei valori delle sollecitazioni longitudinali e circonferenziali per gradienti termico nei tratti compresi dopo la lunghezza d'onda e la sezione di sbocco

1. Tratti di tubazione in cui si avvertono solo gli effetti dovuti al campo termico (effetti di bordo completamente smorzati e ipotesi di “tubo lungo”):

- tubazione di sinistra: $\lambda_s \leq z < \ell_s$, con ℓ_s lunghezza complessiva del tronco di tubazione e $\lambda_s = 51 \text{ mm}$;
- tubazione di destra: $\lambda_d \leq |z| < \ell_d$, con ℓ_d lunghezza complessiva del tronco di tubazione e $\lambda_d = 38 \text{ mm}$.

1. Momenti longitudinali per sola presenza del gradiente termico sulle pareti dei tubi (lungo le sezioni dei tratti di tubazione con effetti di bordo già dissipati) e quindi coincidenti in valore con i momenti circonferenziali:

- tubazione di sinistra (valore caratteristico):

$$\begin{aligned} M_{\Delta T,s} &= D_s(1 + \nu)\chi_{\Delta T,s} = D_s(1 + \nu)\frac{\bar{\alpha}\Delta T_s}{S_s} \\ &= (4,154 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(1 + 0,3)\frac{(1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(45^\circ\text{C})}{(6,0 \text{ mm})} \\ &= 486 \text{ Nmm/mm} \end{aligned}$$

- tubazione di destra (valore caratteristico):

$$\begin{aligned} M_{\Delta T,d} &= D_d(1 + \nu)\chi_{\Delta T,d} = D_d(1 + \nu)\frac{\bar{\alpha}\Delta T_d}{S_d} \\ &= (0,825 \cdot 10^6 \text{ Nmm})(1 + 0,3)\frac{(1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(10^\circ\text{C})}{(3,5 \text{ mm})} \\ &= 37 \text{ Nmm/mm} \end{aligned}$$

- tubazione di destra, massima tensione longitudinale (sulla sezione di saldatura con il tronco adiacente in $z = 0$):

$$\sigma_{d,circ,max} = \sigma_{d,lon,max} = \gamma_Q \frac{M_{\Delta T,d}}{W_{pl,d}} = 1,50 \frac{(151 \text{ Nmm/mm})}{(3,06 \text{ mm}^3/\text{mm})} = 74,0 \text{ N/mm}^2.$$

4. Massime tensioni di progetto SLU per taglio:

- tensione sull'anello di saldatura tra i due tronchi di tubazione nella sezione di riferimento $z = 0$:

$$\tau(0) = \gamma_Q \frac{|V(0)|}{\min[s_s; s_d]} = 1,50 \frac{(13 \text{ N/mm})}{(3,5 \text{ mm})} \approx 6 \text{ N/mm}^2.$$

Nota. È il caso di osservare che per il tronco di tubazione a destra, coerentemente con i versi definiti positivi nello schema in Figura 4–10 a pagina 130, i valori delle incognite iperstatiche nella sezione $z = 0$ risultano entrambi negativi. Relativamente al tronco di tubazione a destra, ciò significa che la sollecitazione flettente distribuita $M(0)$ tende le fibre esterne, mentre l'azione tagliante distribuita $V(0)$ è centrifuga su ogni suo punto del mantello. Proprio un tale verso delle sollecitazioni spiega perché, su questo tronco di tubazione, l'andamento della sollecitazione flettente, avvicinandoci alla sezione $z = 0$ per punti all'interno della lunghezza d'onda λ_d , tende ad aumentare rispetto al valore $M_{\Delta T,s}$. Ciò è infatti dovuto all'azione di “allargamento”, operata dal tronco di sinistra sui lembi a $z = 0$ mediante l'azione centrifuga $V(0)$, che si traduce per il tronco a destra in un ulteriore aggravio della quota di momento flettente necessaria per annullare in $z = 0$ i soli effetti del gradiente termico, misurati dall'entità del momento $M_{\Delta T,d}$.



RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- EROKHIN V. G., MAKHAN'KO M. G., SAMOILENKO P. I., *Fundamentals of Thermodynamics and Heat Engineering*, MIR Publishers Moscow, 1986.
- SAMUELLI FERRETTI A., *Corso tecnico delle costruzioni. Cenni sulla teoria delle piastre e tubi in regime elastico lineare*, Masson editoriale ESA, Roma Gennaio 1988.
- Svets I. T., Tolubinskij V. I., Alabovskij A. N., Kirakovskij N. F., Neduzij I. A., Pivovarov L. A., *Termotecnica*, Edizioni MIR, Mosca, 1987
- TIMOSHENKO S., WOINOWSKY-KREIGER S., *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

Cover Art: <http://www.deelat.com/blog/wp-content/uploads/2015/03/Pipe-Flange.jpg>

5

Calcoli statici sulle tubazioni interrato: cenni teorici e formule pratiche

| | | |
|------------|--|-----|
| 5-1 | PREMESSA: VALORI DELLE PRESSIONI IN TUBAZIONE | 140 |
| | <i>Pressione di esercizio</i> | 140 |
| | <i>Pressione nominale</i> | 141 |
| | <i>Entità della pressione equivalente</i> | 142 |
| | <i>Limitazione delle sovrappressioni da "colpo d'ariete"</i> | 142 |
| | <i>Posa e pressione in fase di collaudo</i> | 142 |
| 5-2 | ASSETTI E AZIONI SULLE TUBAZIONI INTERRATE | 143 |
| | <i>Condizioni di posa</i> | 143 |
| | <i>Posa in trincea stretta</i> | 144 |
| | <i>Posa in trincea larga e posa con rinterro indefinito</i> | 148 |
| | <i>Posa in trincea stretta con rinterro indefinito</i> | 150 |
| 5-3 | PROPRIETÀ ELASTICHE DEI MATERIALI PER LE CONDOTTE INTERRATE | 154 |
| | <i>Moduli elastici per le tubazioni</i> | 154 |
| | <i>Moduli di elasticità normale dei terreni</i> | 154 |
| 5-4 | DISTRIBUZIONI DELLE AZIONI VERTICALI SULLE TUBAZIONI | 156 |
| | <i>Distribuzione delle azioni dovute al rinterro</i> | 156 |
| | <i>Reazioni verticali delle aree di appoggio all'azione del rinterro</i> | 157 |
| | <i>Distribuzione delle azioni dovute ai variabili fissi e mobili in superficie</i> | 158 |
| 5-5 | FORMULE PER IL CALCOLO E LA VERIFICA: TEORIA DI DE SAEDELEER | 161 |
| | <i>Reazioni orizzontali del terreno per unità di lunghezza del tubo</i> | 162 |
| | <i>Calcolo delle sollecitazioni flettenti nelle sezioni significative del tubo</i> | 169 |
| | <i>Calcolo della massima tensione di trazione di progetto</i> | 171 |
| | <i>Calcolo della massima pressione di esercizio</i> | 171 |
| 5-6 | VERIFICA MASSIME DEFORMAZIONI E INSTABILITÀ ELASTICA | 176 |
| | <i>Verifica all'ovalizzazione della tubazione</i> | 177 |
| | <i>Verifica all'instabilità elastica per depressione interna</i> | 181 |

Scopo delle verifiche di sicurezza delle tubazioni interrato (per fognature, acquedotti, gasdotti, etc.) è di garantire che l'opera di convogliamento idraulico sia in grado – nel suo insieme con il terreno di posa e con ogni parte dei suoi elementi costruttivi – di resistere con adeguato margine di sicurezza alla azioni cui potrà essere sottoposta, sia durante la fase di installazione e collaudo e sia durante la sua vita media di esercizio; assicurando anche la minimizzazione degli interventi di manutenzione nel tempo. Generalmente, le azioni da considerare sono: le azioni permanenti, i variabili di esercizio (tra cui pressioni, sovrappressioni interne e carichi viaggianti in superficie), le reazioni termiche, i fenomeni di ritiro e quelli viscosi (questi ultimi nel caso di tubazioni in c.a. o c.a.p.), i cedimenti vincolari (compresi eventuali cedimenti o smottamenti dei terreni) e le azioni sismiche e dinamiche



in genere. In questa parte, si è deciso di riportare una breve panoramica delle trattazioni teoriche, e relative formulazioni, che più frequentemente si prestano nelle calcolazioni statiche che le tubazioni richiedono per un tale tipo di cemento. La verifica statica di una tubazione (o canalizzazione) interrata consiste nell'accertare che i carichi agenti sull'elemento di convogliamento idraulico (considerato quindi come una vera e propria struttura, sollecitata e quindi resistente) provochino delle tensioni e delle deformazioni compatibili con gli stati limite ultimi (di resistenza e di esercizio). In altri termini, il materiale e la geometria della struttura idraulica – subordinatamente anche alle condizioni del terreno di posa e rinterro e a tutti i carichi agenti – devono essere adeguati per garantire il loro regolare esercizio idraulico. Il criterio di verifica da adottare dipende dal comportamento della tubazione nei confronti del suo rapporto di deformabilità con il terreno, cioè della sua “elasticità in sito”. Bisogna infatti ricordare che esistono svariate gamme di materiali⁽ⁱ⁾ per tubazione più o meno rigidi con valori del modulo elastico iniziale che possono andare da 225÷900 MPa per il PEAD fino a 210000 MPa per l'acciaio). Pertanto, se la struttura è molto rigida, la funzionalità è soddisfatta quando lo stato di tensione interno è compatibile con le caratteristiche di resistenza e deformabilità del materiale. Viceversa, se la struttura è fortemente deformabile, è necessario verificare lo stato limite di esercizio di deformazione, controllando che la deflessione diametrale sia compatibile con i vincoli e le condizioni del progetto, che non si superino le tensioni limite del materiale e che non si abbiano imbozzamenti o schiacciamenti per instabilità elastica delle pareti del tubo o condotto.

In generale, il comportamento statico di una tubazione interrata dipende dalla resistenza del materiale costituente la condotta, da quella del terreno o materiale di riempimento che la circonda e da come quest'ultima è sistemato e compattato, cioè dalla posa e dall'appoggio che contrastano l'ovalizzazione del tubo.

5-1 **PREMESSA: VALORI DELLE PRESSIONI IN TUBAZIONE**

Esistono svariate norme, contenute in vari circolari ministeriali, che riguardano tutti gli specifici problemi relativi a condotte, canali di convoglianti liquidi e gas, attraversamenti con ferrovie o altre linee di trasporto, etc.

In linea generale, senza entrare forzatamente in questa sede nelle varie prescrizioni dei a riguardo, tutte normative sull'argomento chiedono che si debba porre attenzione:

- alla caratterizzazione fisica, chimica e sanitaria dei fluidi da trasportare (soprattutto per gli acquedotti);
- la caratterizzazione geologica e geotecnica dei terreni interessati dal tracciato;
- l'esame dei diversi possibili schemi idraulici di funzionamento delle opere, sia durante l'esercizio che in fase di collaudo, in base a cui va effettuato il dimensionamento idraulica e statico delle tubazioni;
- l'analisi delle situazioni ambientali, in quanto elementi vincolanti nel progetto del tracciato e del profilo delle tubazioni.

Pressione di esercizio

Per quanto riguarda le verifiche di sicurezza delle tubazioni - che qui più interessa focalizzare l'attenzione - le Norme definiscono pressione di esercizio p_E il massimo valore della

(i) Cominciando dai materiali più deformabili, si ha: PEAD, PVC, PRFV caricato, PRFV non caricato, Fibrocemento, Calcestruzzo, Gres, Ghisa sferoidale, Acciaio.

pressione p che può verificarsi in asse alla tubazione per il più gravoso funzionamento idraulico del sistema, comprese le eventuali sovrappressioni Δp che si manifestano durante i fenomeni transitori di chiusura di valvole, saracinesche, avviamenti o interruzioni dell'impianto. In assenza di calcoli specifici (e in ogni caso per le reti idriche di distribuzione con diametri fino a 350 mm) si assume per il Δp durante i transitori nelle manovre di regolazione del sistema, un valore di $2,5 \text{ kgf/cm}^2 = 2,45 \text{ bar} = 0,24 \text{ MPa}$, indipendentemente dal tipo di tubazione di impianto. Le Norme prevedono che debba essere determinato lo stato di tensione dovuto a tutte le sollecitazioni, quali il peso proprio del tubo stesso e del volume liquido presente, il peso del terreno di rinterro, i variabili esterni (statici e dinamici), le variazioni termiche, le azioni sismiche, etc.

In condizioni tali di assetto statico, si determina la massima tensione di trazione $\sigma_{t,\max}$ che si manifesta in una data fibra della parete della tubazione in conseguenza a tutte le sollecitazioni suddette. Viene definita quindi pressione equivalente p_0 la pressione assiale (pressione interna valutata in corrispondenza dell'asse della tubazione e diretta radialmente, secondo tutte le direzioni, nella sezione trasversale del tubo) che conferisce al tubo tensioni di trazione pari alla suddetta tensione massima. Sfruttando a tal proposito la nota relazione di MARIOTTE, si utilizza la relazione (si veda equilibrio in Figura 5-1):

$$2s \sigma_{t,\max} = p_0 2r \Rightarrow \sigma_{t,\max} = p_0 \frac{r}{s} \Rightarrow \boxed{p_0 = \sigma_{t,\max} \frac{s}{r}} \quad (5-1)$$

Pressione nominale

La *pressione nominale* è quindi definita come:

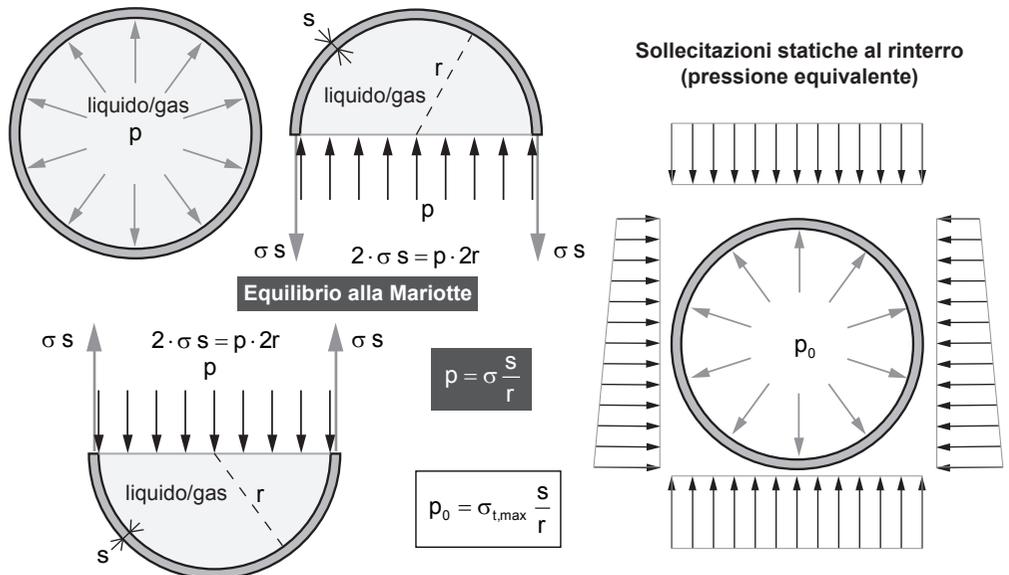
$$p_N = p_E + p_0 = (p + \Delta p) + p_0 \quad (5-2)$$

dove:

- p_E è il massimo valore di pressione di esercizio dell'impianto;
- p il valore di pressione medio dell'impianto;

Figura 5-1

Equilibrio di una metà di tronco di tubazione di lunghezza di fuga unitaria: equilibrio alla MARIOTTE, con pressione in condotta equilibrata dalla tensione di trazione delle lamiere delle pareti di spessore "s". Tronco unitario di tubazione in equilibrio sotto le forze esterne al rinterro e relativa pressione equivalente p_0 dedotta dalla relazione di MARIOTTE.



- Δp è il valore delle sovrappressioni che si sommano con lo stesso segno al valore medio p .

☞ **IMPORTANTE**

Il dimensionamento statico delle tubazioni, dei giunti e dei pezzi speciali deve essere effettuato in base a una pressione interna pari a quella nominale p_N , senza considerare forze esterne; il contributo alle tensioni dovuto a tutte le sollecitazioni esterne viene quindi equiparato a quello che deriva dalla maggiorazione della pressione interna dal valore di esercizio p_E al valore nominale p_N . I tubi, i giunti e i pezzi speciali sono normalmente prodotti in serie e vengono caratterizzati in base al valore della pressione nominale; andranno quindi impiegati tubi, giunti e pezzi speciali aventi una pressione nominale maggiore di quella cui essi possono essere sottoposti durante l'esercizio data dalla (5-2).

Entità della pressione equivalente

Si fa presente che il valore della pressione equivalente p_0 risulta spesso trascurabile rispetto alla pressione di esercizio p_E , per cui la scelta della classe di pressione della tubazione può essere fatta direttamente conoscendo la sola p_E . Ciò non accade, in genere, per le tubazioni di grande diametro e per quelle di tipo flessibile, nelle quali le sollecitazioni generano delle deformazioni non trascurabili e risulta perciò indispensabile prendere in esame tutte le azioni esterne, determinando la relativa pressione equivalente p_0 da sommare alla p_E per ottenere la pressione nominale p_N . Nelle tubazioni di materiale plastico o in resine rinforzate, che risultano abbastanza deformabili anche se non sono di grande diametro, le azioni esterne possono indurre sollecitazioni paragonabili a quelle dovute alla pressione interna.

Limitazione delle sovrappressioni da "colpo d'ariete"

Le norme impongono limiti alle sovrappressioni dinamiche di colpo d'ariete Δp in funzione della pressione idrostatica, indipendentemente dal tipo di materiale impiegato. Alcuni limiti sono riportati nella tabella sottostante. Ovviamente in molti casi risulta comunque necessario prevedere adeguati sistemi di protezione dal colpo d'ariete per rispettare i limiti

Tabella 5-1

Massime sovrappressioni di colpo d'ariete ammissibili in tubazione secondo il D.M. LL. PP. del 12.12.1985.

| | | | | |
|--|-----|--------|---------|---------|
| Pressione idrostatica (kg/cm ²) | < 6 | 6 ÷ 10 | 10 ÷ 20 | 20 ÷ 30 |
| Sovrappressioni massime colpo d'ariete (kg/cm ²) | 3 | 3 ÷ 4 | 4 ÷ 5 | 5 ÷ 6 |

suddetti. Le norme precisano inoltre che, indipendentemente dalla pressione nominale p_N , i tubi devono essere idonei a sopportare una sovrappressione dinamica Δp non inferiore di $2 \text{ kgf/cm}^2 = 1,961 \text{ bar} = 0,196 \text{ MPa}$, salvo diversa specifica indicazione di progetto, e che dovrà essere posta particolare attenzione all'insorgenza di depressioni durante i fenomeni di moto vario.

Posa e pressione in fase di collaudo

Durante la posa, al termine delle operazioni di giunzione occorre procedere a un rinterro parziale di ciascun tratto di tubazione con un limitato ricoprimento della generatrice superiore dei tubi, lasciando scoperti i giunti; il terreno di rinterro va disposto nella trincea in modo uniforme, in strati di spessore opportuno, costipato sotto e lateralmente al tubo, per ottenere un appoggio stabile e impedire spostamenti laterali. Nei tratti in cui sono possibili degli assestamenti, si dovranno adottare particolari provvedimenti, come l'impiego di giunti adeguati o appoggi discontinui stabili, quali selle o mensole; in tale ultimo caso, il contatto tra tubi e selle di appoggio andrà realizzato con l'interposizione di materiale idoneo e per le tubazioni metalliche dovranno essere inserite, in corrispondenza dei punti di

appoggio, delle membrature isolanti per la protezione catodica. Ultimate le operazioni di giunzione dei tubi e il rinfianco, il tronco di condotta deve essere sottoposto a prova idraulica, con pressione, durata e modalità stabilite in progetto in funzione del tipo di tubazione e di giunto, della pressione di esercizio, etc.

Pressione di collaudo. In fase di collaudo vanno effettuate prove di tenuta con una pressione pari a:

$$\begin{cases} p_C &= 1,5 p_E \\ p_{C,\min} &= p_E + 2 \text{ kgf/cm}^2 \end{cases} \quad (5-3)$$

con maggiori e più precise indicazioni nel capitolato speciale di appalto.

5-2 ASSETTI E AZIONI SULLE TUBAZIONI INTERRATE

Come è stato anticipato, la pressione equivalente p_0 è definita come quella pressione agente al livello dell'asse della tubazione che dà luogo in questa a tensioni di trazione pari alla massima tensione – che si verifica in un dato punto della tubazione – dovuta a tutte le sollecitazioni esterne, quali il peso proprio, il peso del terreno di rinterro, i variabili esterni statici e dinamici, le variazioni termiche, le spinte dovute alla eventuale presenza di acque di falda, etc. È quindi necessario determinare lo stato di sollecitazione indotto nella tubazione da tutte le azioni esterne, al fine di individuare il punto in cui si verifica la suddetta tensione massima di trazione, calcolandone il valore. Il problema risulta nel suo insieme estremamente complesso, dipendendo le azioni agenti sui tubi e le sollecitazioni da esse indotte da una serie di elementi che è molto difficile conoscere e dal altri di non semplice schematizzazione, per cui la risoluzione del problema è affetta da notevoli margini di incertezza, malgrado le numerose ricerche teoriche e sperimentali eseguite.

In questa sede si farà cenno all'impostazione del problema e alle più comuni metodologie di risoluzione, rimandando a trattati specifici per maggiori approfondimenti.

Condizioni di posa

L'azione dovuta al ricoprimento risulta differente a seconda delle condizioni di posa della tubazione e a seconda che questa sia flessibile o schematizzabile come praticamente indeformabile. Le norme definiscono quattro condizioni di posa per la tubazione:

- posa in trincea stretta;
- posa in trincea larga;
- posa con rinterro indefinito;
- posa in trincea stretta con rinterro indefinito.

La condizione in trincea stretta si ha quando è verificata una delle seguenti relazioni:

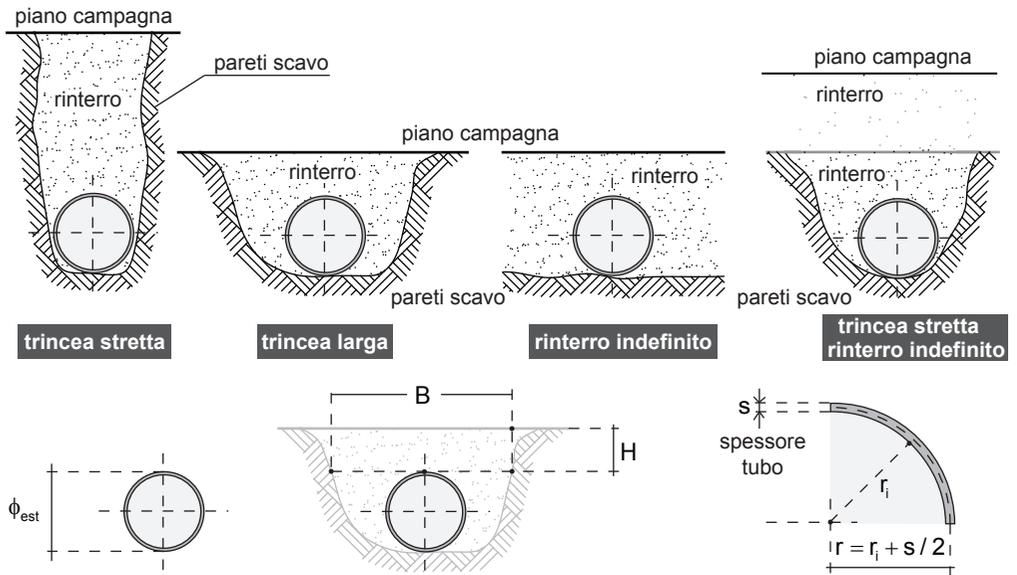
$$H \geq 1,5 B \text{ per } B \leq 2\phi_{est} \quad (5-4)$$

$$H \geq 3,5 B \text{ per } 2\phi_{est} \leq B \leq 3\phi_{est} \quad (5-5)$$

dove ϕ_{est} è il diametro esterno della tubazione, B la larghezza della trincea di scavo in corrispondenza della generatrice superiore del tubo e H l'altezza del ricoprimento sopra tale generatrice.

Figura 5-2

Schemi qualitativi di condizioni di posa secondo la norma UNI 7517/76. Schema delle grandezze geometriche del tubo con evidenziato il raggio mediano r e il raggio (utile) interno r_i .



Posa in trincea stretta

Le azioni del terreno di ricoprimento per tubi con posa in trincea stretta è subordinata alla deformabilità del tubo. Per tubi deformabili l'azione è sensibile anche al diametro della tubazione oltre che della profondità di posa. Per i tubi rigidi, invece, l'azione del rinterro dipende essenzialmente dalla potenza dello strato di terreno largo B sopra la generatrice superiore del tubo, oltre che dalla profondità di scavo stessa.

La relazione dell'azione del rinterro con la profondità H è data, sotto forma di opportuni abachi, in funzione del rapporto H/B e delle particolari caratteristiche dei terreni di ricoprimento (coefficiente di ANSON MARSTON).

Tubi deformabili. Nel caso di posa in trincea stretta, occorre distinguere i tubi deformabili da quelli rigidi; i primi si deformano più del terreno circostante e ciò si verifica quando è soddisfatta la disuguaglianza:

$$n = \frac{E_{terr,p}}{E} \left(\frac{r}{s}\right)^3 = \frac{E_{terr,p}}{E} \left(\frac{r_i + s/2}{s}\right)^3 \geq 1 \tag{5-6}$$

essendo:

- $E_{terr,p}$ il modulo di elasticità normale del terreno di posa (pareti scavo);
- E il modulo di elasticità normale del materiale del tubo;
- r_i il raggio interno della tubazione (raggio utile di deflusso);
- s lo spessore della parete del tubo;
- $r = r_i + s/2$ il cosiddetto “raggio mediano” di riferimento per il tubo.

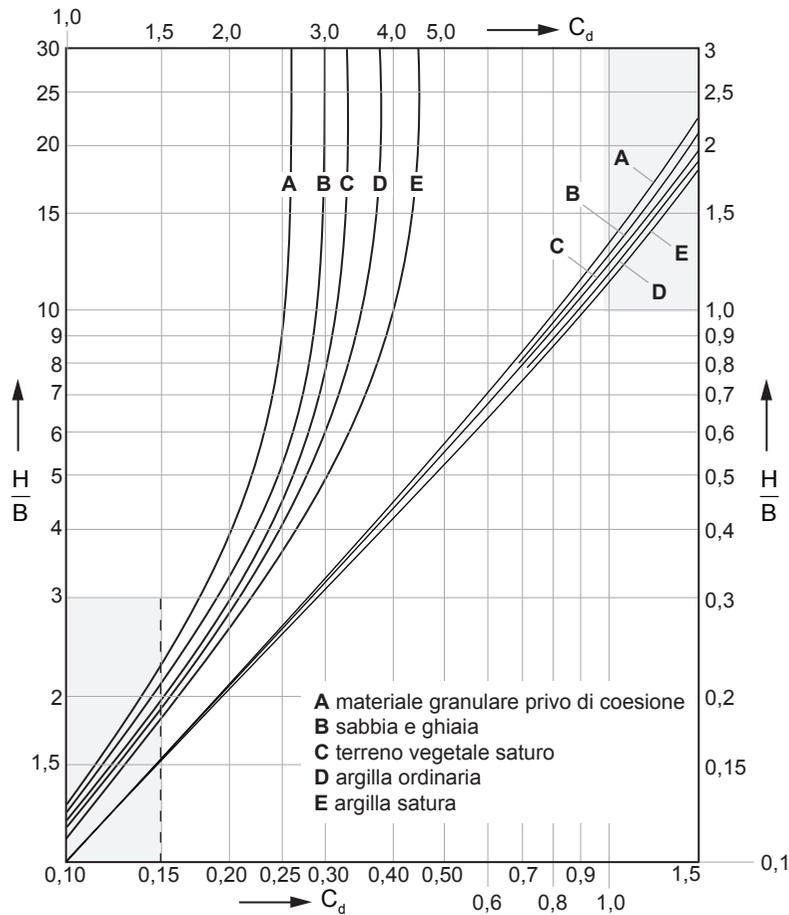
Tubi indeformabili. In particolare, se il valore n nella (5-6) risulta minore di uno il tubo è da considerare indeformabile ($n < 1$):

$$n = \frac{E_{terr,p}}{E} \left(\frac{r}{s}\right)^3 = \frac{E_{terr,p}}{E} \left(\frac{r_i + s/2}{s}\right)^3 < 1. \tag{5-7}$$

Figura 5-3

Andamento del coefficiente C_d di ANSON MARSTON - per tubi deformabili o rigidi posati in trincea stretta - in funzione del rapporto H/B e in funzione del tipo di terreno di posa A, B, C, D, E).

(Fonte: Gravity Sanitary Sewer Design and Construction, Manuals & Reports on Engineering Practice, No. 60, American Society of Civil Engineers, and Manual of Practice, No. FD-5, Water Pollution Control Federation, 1982, p. 170).



Peso del terreno di ricoprimento (tubi deformabili). Per i tubi deformabili posati in trincea stretta, il terreno di ricoprimento esercita, per unità di lunghezza di fuga del tubo, un'azione verticale P_v che è data da (per unità di lunghezza di fuga del tubo):

$$P_v = C_d \gamma_t \phi_{est} B \quad (5-8)$$

dove:

- C_d è un coefficiente che è messo in relazione con il rapporto H/B e con il tipo di terreno di posa (materiale granulare privo di coesione, sabbia e ghiaia, terreno vegetale saturo, argilla ordinaria, argilla satura): si veda Figura 5-3;
- γ_t è il peso specifico del terreno di rinterro;
- ϕ_{est} e B hanno il significato visto in precedenza.

Peso del terreno di ricoprimento (tubi rigidi). Per i tubi rigidi (o indeformabili) in trincea stretta (con $n < 1$, si veda relazione (5-7)), l'azione P_v del terreno è:

$$P_v = C_d \gamma_t B^2 \quad (5-9)$$

dove il coefficiente C_d è sempre desumibile dal grafico in Figura 5–3. Notare che la posa in trincea stretta è l'unico tipo di posa in cui esiste differenza di carico di rinterro per diverso comportamento dei tubi da rigidi a deformabili.

ESEMPIO 5–1

Massimo carico di rinterro per tubazione con posa in trincea stretta

Si data una tubazione DN600 in acciaio, la cui sezione più significativa è posata in una trincea di scavo $B = 1,20 \text{ m}$, al livello della generatrice superiore del tubo, e con un'altezza di ricoprimento sull'estradosso di $H = 2,00 \text{ m}$.

Il volume di terreno interessato dal tracciato di scavo è costituito essenzialmente da miscugli di sabbie con ghiaia bene addensata e con peso di volume da $1,7$ a 2 ton/m^3 . Si calcoli il massimo valore del carico di rinterro P_v (valore caratteristico) per la tubazione.

Soluzione

In base ai dati di progetto si verifica il tipo di posa della tubazione. Mediante le relative equazioni per P_v si calcola il carico di rinterro che risulterà (valore caratteristico) gravante sulla lunghezza unitaria di fuga del manufatto idraulico.

STEP 1 **Dati di progetto**

- Dati geometrici della tubazione DN600 in acciaio:
 - modulo di elasticità acciaio: $E = 200000 \text{ MPa}$;
 - diametro esterno: $\phi_{est} = 610 \text{ mm}$;
 - spessore lamiera parete: $s = 6,3 \text{ mm}$;
 - raggio interno (utile) di deflusso: $r_i = 0,5 \cdot \phi_{est} - s = 298,7 \text{ mm}$;
 - raggio mediano del tubo: $r = r_i + s/2 = 301,8 \text{ mm}$.
- Dati geotecnici dei terreni (di posa e rinterro):
 - peso specifico (di rinterro): $\gamma_t = (2 \text{ ton/m}^3) \cdot (9,81 \text{ kN/ton}) = 19,62 \text{ kN/m}^3$;
 - modulo di elasticità normale del terreno (di posa/scavo): $E_{terr,p} = 200 \text{ MPa}$;
 - tipo di terreno su abaco di ANSON MARSTON: **B** (sabbia e ghiaia).

STEP 2 **Verifica tipo di trincea: larga o stretta**

- Risultando dalla (5–4) a pagina 143:

$$(EQN. 1) \quad \begin{cases} H \geq 1,5 B \\ B \leq 2\phi_{est} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = 2,00 \text{ m} \geq 1,5 B = 1,80 \text{ m} \\ B = 1,20 \text{ m} \leq 2\phi_{est} = 1,22 \text{ m} \end{cases}$$

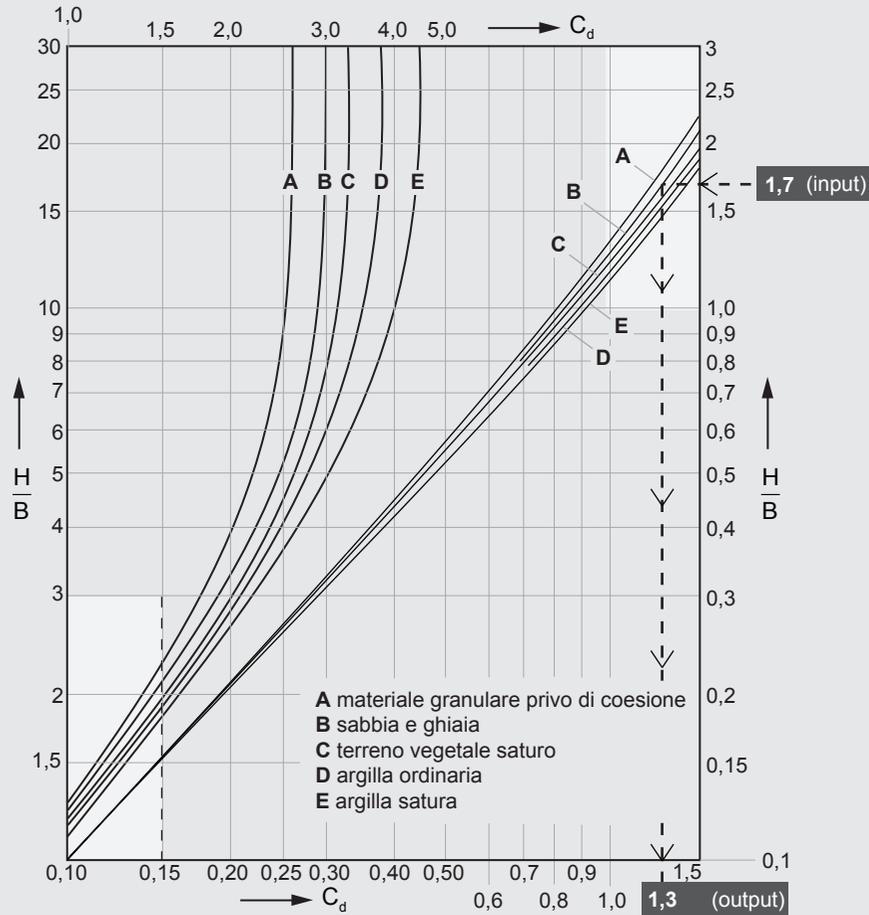
la condizione di posa risulta in *trincea stretta* (anche se al limite).

STEP 3 **Verifica tubo rigido o deformabile in trincea stretta**

- Trattandosi di trincea stretta, è necessario verificare se il tubo è da considerarsi rigido o deformabile. Risultando la (5–6) a pagina 144:

$$(EQN. 1) \quad n = \frac{E_{terr,p}}{E} \left(\frac{r}{s} \right)^3 = \frac{(200 \text{ MPa})}{(210000 \text{ MPa})} \left(\frac{301,8}{6,3} \right)^3 \approx 105 > 1$$

la condizione è di *tubo deformabile*.


STEP 4 Tipo di curva e valore C_d sull'abaco di ANSON MARSTON:

1. Curva **B** (sabbie e ghiaie) su abaco in Figura 5-3 a pagina 145; rapporto geometrico: $H/B = (2,00)/(1,20) = 1,7$ (arrotondato in eccesso);
2. Dall'abaco risulta: $C_d = 1,3$.

STEP 5 Calcolo del sovraccarico (permanente del rinterro)

1. Ci si trova nel caso di tubo deformabile in trincea stretta ((5-8) a pagina 145):

(EQN. 2)
$$P_v = C_d \gamma_t \phi_{est} B = 1,3 \cdot (19,62 \text{ kN/m}^3)(0,61 \text{ m})(1,20 \text{ m}) = 18,67 \text{ kN/m}$$
 (valore caratteristico).

2. Valore di progetto del sovraccarico permanente portato (SLU - EN1990):

(EQN. 3)
$$P_{v,Ed} = \gamma_{G2} \cdot P_v = 1,35 \cdot P_v = 1,35 \cdot (18,67 \text{ kN/m}) = 25,20 \text{ kN/m}.$$



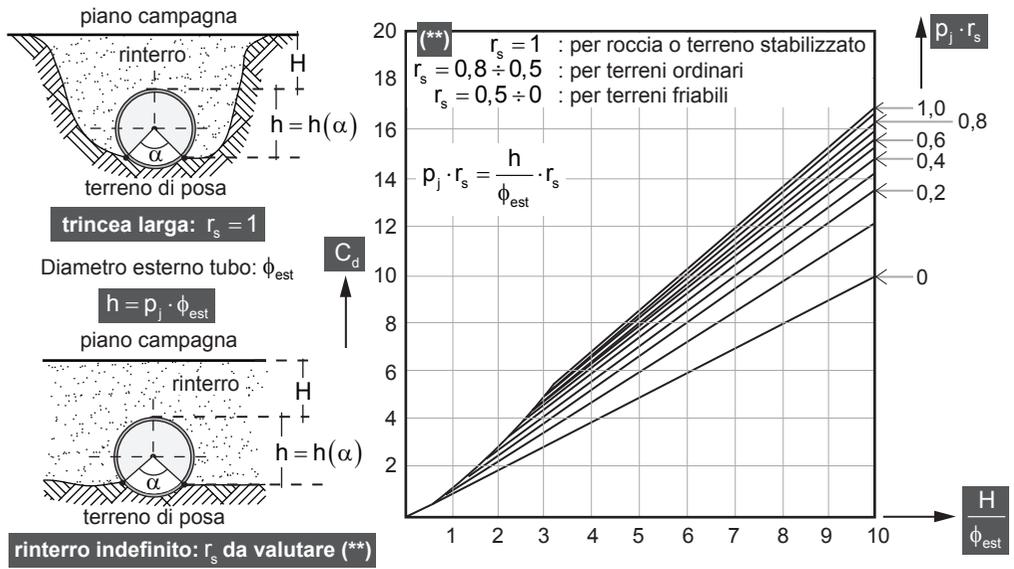
Nota. Se non fosse stata verificata la (5-4) o la (5-5) a pagina 143, le condizioni di posa sarebbero state quelle in trincea larga, essendo i casi rimanenti di posa con rinterro indefinito e posa in trincea stretta con rinterro indefinito due differenti assetti per geometria.

Figura 5-4

Andamento del coefficiente C_d per tubazioni con posa in trincea larga o per posa con rinterro indefinito. C_d funzione di: $p_j = h/\phi_{est}$ (rapporto di proiezione) e da r_s (tasso di assestamento).

(Fonte: Acquadotti, Guida alla progettazione, V. Milano, Hoepli, 2000).

Figura riadattata e modificata elettronicamente.



Posa in trincea larga e posa con rinterro indefinito

Per posa in trincea larga e per posa con rinterro indefinito, l'azione verticale P_v del terreno di ricoprimento è dato dalla:

$$P_v = C_d \gamma_t \phi_{est}^2 \tag{5-10}$$

dove ϕ_{est} è il diametro esterno della tubazione e γ_t il peso specifico del terreno di posa. È da intendersi tubo posato con rinterro indefinito quando esso è posato sul terreno naturale o in uno scavo di profondità minima ed è ricoperto da un rinterro riportato sopra il terreno naturale. In particolare, per il caso di trincea larga o per posa con rinterro indefinito, nella deduzione del coefficiente C_d dal relativo abaco (Figura 5-4), è necessario determinare il rapporto di proiezione $p_j = h/\phi_{est}$, che risulta legato all'altezza effettiva h del tubo ricoperta dallo strato di rinterro (potendo il tubo essere alloggiato con un certo *angolo di appoggio* α sulle pareti orizzontali dello scavo) e al tasso di assestamento r_s del tubo.

Trincea larga: valore r_s . Nel caso di posa del tubo in trincea larga, il valore del tasso di assestamento va posto pari al valore unitario ($r_s = 1$) indipendentemente dalle caratteristiche del terreno di posa.

Posa con rinterro indefinito: valore r_s . Nel caso di posa con rinterro indefinito, il valore del tasso di assestamento r_s è variabile in funzione del tipo di terreno posa:⁽ⁱⁱ⁾

- $r_s = 1$ per roccia o terreno stabilizzato;
- $r_s = 0,8 \div 0,5$ per terreni ordinari;
- $r_s = 0,5 \div 0$ per terreni friabili.

(ii) Nell'abaco in alto, è riportato anche l'angolo di appoggio α della tubazione necessario per valutare la proiezione verticale di tubo effettivamente sollecitata orizzontalmente dal terreno di rinterro. Nel caso di posa con rinterro indefinito, è necessario valutare anche il relativo tasso di assestamento in funzione del tipo di terreno: a tal proposito, i valori sono evidenziati (a mo' di promemoria) sulla parte alta dell'abaco.

ESEMPIO 5-2

Massimo carico di rinterro per tubazione in trincea larga

Una tubazione DN600 in PEAD è posata in una trincea di scavo di larghezza $B = 1,30 \text{ m}$ al livello della generatrice superiore del tubo, con un'altezza di ricoprimento sull'estradosso di $H = 1,50 \text{ m}$. Il terreno di ricoprimento ha un peso specifico di $\gamma_t = 17,0 \text{ kN/m}^3$ e un modulo di elasticità normale pari a $E_{terr,p} = 200 \text{ MPa}$.

Supponendo un angolo di appoggio del tubo pari ad $\alpha = 90^\circ$ su terreno di posa classificato come "terreno ordinario", valutare il massimo carico del terreno di ricoprimento P_v sulla tubazione.

Soluzione

Si determinano le caratteristiche che interessano il tronco di tubazione interrata lunga 1 m lungo la sua direzione di fuga. Si procede in maniera analoga a quanto visto nell'esempio precedente.

STEP 1

Dati di progetto

1. Dati geometrici della tubazione DN600 in PEAD:
 - modulo di elasticità: $E = 883 \text{ MPa}$;
 - diametro esterno: $\phi_{est} = 630 \text{ mm}$;
 - spessore parete tubo: $s = 35,7 \text{ mm}$;
 - raggio interno (utile) di deflusso: $r_i = 0,5 \cdot \phi_{est} - s = 279,3 \text{ mm}$;
 - raggio mediano del tubo: $r = r_i + s/2 = 297,2 \text{ mm}$.
2. Dati geotecnici dei terreni (di posa e rinterro) e geometria di posa:
 - peso specifico (di rinterro): $\gamma_t = 17,0 \text{ kN/m}^3$;
 - modulo di elasticità normale del terreno (di posa/scavo): $E_{terr,p} = 200 \text{ MPa}$;
 - angolo di posa: $\alpha = 90^\circ$;
 - altezza di proiezione laterale del tubo: $h = h(\alpha) = 538 \text{ mm}$;
 - rapporto di proiezione laterale: $p_j = h/\phi_{est} = (538)/(630) = 0,85$;
 - coefficiente di assestamento: $r_s = 1$ (se posa in trincea larga); $r_s = 0,8 \div 0,5$ (per posa su "terreno ordinario").⁽ⁱⁱⁱ⁾

STEP 2

Verifica tipo di trincea: larga o stretta

1. Non risultando verificata nessuna delle due relazioni (5-4) e (5-5) a pagina 143:

(EQN. 1)
$$\begin{cases} H \geq 1,5 B \\ B \leq 2\phi_{est} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = 1,50 \text{ m} \not\geq 1,5 B = 1,95 \text{ m} \\ B = 1,30 \text{ m} \not\leq 2\phi_{est} = 1,22 \text{ m} \end{cases}$$

(EQN. 2)
$$\begin{cases} H \geq 3,5 B \\ 2\phi_{est} \leq B \leq 3\phi_{est} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = 1,50 \text{ m} \not\geq 3,5 B = 5,25 \text{ m} \\ 2\phi_{est} = 1,26 \text{ m} \leq B = 1,30 \text{ m} \leq 2\phi_{est} = 1,89 \text{ m} \end{cases}$$



la condizione di posa risulta quella in *trincea larga*, e quindi l'azione verticale P_v del terreno di ricoprimento va determinata utilizzando la relazione (5-10) a pagina 148. Il valore del coefficiente di assestamento è da considerare quindi unitario: $r_s = 1$.

(iii) Pur essendo per ipotesi il tipo di terreno classificato come "terreno ordinario", il valore del tasso di assestamento è prima subordinato all'accertamento di una posa del tubo di tipo "in trincea larga", indipendentemente dal tipo di terreno. Nel qual caso, si dovrebbe porre $r_s = 1$. Questo valore è quindi da verificare.

in z) determina sulla quota z le dimensioni dell'area quadrangolare di arrivo S_0 . Una volta a quota z (sui punti della generatrice superiore del tubo) andrà considerata quella parte di proiezione di area $S_{t,z}$ che interessa effettivamente la tubazione. In particolare, se la generatrice superiore del tubo si trova a quota z al di sotto del piano campagna e se l'area $S_{t,z,\ell}$ della proiezione del tratto ℓ di tubazione interrata si trova tutta all'interno dell'area S_z , allora si potrà osservare semplicemente che su tutta l'area $S_{t,z}$ agisce una pressione $p(z)$ il cui valore si calcola tramite la (5-18). Il carico verticale P_s (per unità di lunghezza di fuga del tubo) del sovraccarico (variabile), agente sulla parte superiore del tubo, si calcolerà quindi come $P_s = p(z)\phi_{est}$.

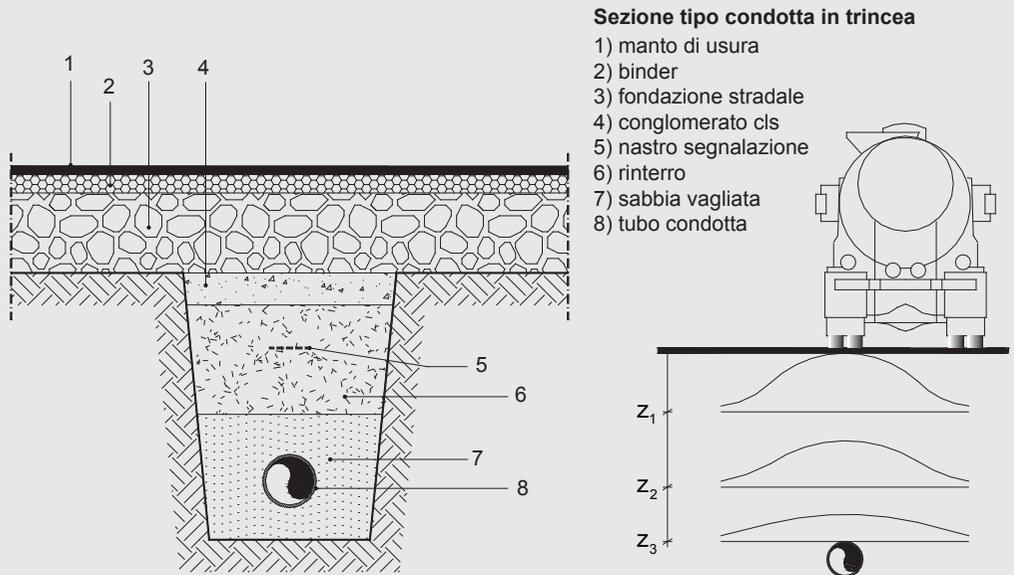


Nota. Analogamente a quanto osservato per il carico verticale P_v del rinterro, anche per il sovraccarico variabile P_s (per carichi fissi o mobili) si applicano allo stesso modo e alle stesse condizioni le due relazioni (5-12) e (5-13) a pagina 156.

ESEMPIO 5-4

Calcolo pressione per sovraccarico stradale in superficie

Una tubazione in acciaio DN600 è alloggiata in una trincea il cui rinterro indefinito è



essenzialmente costituito da tutto il pacchetto per la pavimentazione stradale in superficie (si veda schema in figura). L'azione stradale in superficie è costituita da un sovraccarico variabile distribuito uniformemente di $q_{ik} = 9,00 \text{ kN/m}^2$ e – in asse al tracciato della tubazione per un suo tratto – da un carico concentrato di $Q_{ik} = 300 \text{ kN}$ agente sulla superficie stradale su un impronta di $S_0 = 0,40 \text{ m} \times 0,40 \text{ m}$.

Calcolare il valore complessivo della pressione (valore caratteristico) gravante sulla tubazione, prendendo a riferimento per la quota z l'affondamento della generatrice superiore del tubo posta a $z_3 = 4,00 \text{ m}$ al di sotto del piano stradale. Si considerino trascurabili gli

effetti dinamici dovuti ai carichi mobili e si consideri un angolo di diffusione di $\alpha = 90^\circ$ lungo tutto lo spessore del pacchetto stradale.

Soluzione

Si considera il carico distribuito in superficie q_{ik} come indefinito e quindi praticamente inalterato fino alla direttrice superiore del tubo. Il carico variabile Q_{ik} sull'impronta $S_0 = 0,40 \text{ m} \times 0,40 \text{ m}$ verrà diffuso fino alla quota della generatrice: $z_3 = 4,00 \text{ m}$.

STEP 1 Calcolo della pressione risultante sulla generatrice superiore del tubo

1. Utilizzando l'equazione (5-18) a pagina 159, si ha per il sovraccarico Q_{ik} concentrato:

$$(EQN. 1) \quad \begin{aligned} p(z_3) &= \frac{Q_{ik}}{S_0} \frac{S_0}{(a_0 + 2z \tan \alpha) \cdot (b_0 + 2z \tan \alpha)} = \frac{Q_{ik}}{(a_0 + 2z \tan \alpha) \cdot (b_0 + 2z \tan \alpha)} \\ &= \frac{Q_{ik}}{(a_0 + 2z \tan \alpha) \cdot (b_0 + 2z \tan \alpha)} = \frac{300}{2[0,40 + 2 \cdot (4,00)]} = 17,86 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

avendo considerato sul piano campagna l'impronta $S_0 = a_0 \cdot b_0 = (0,40 \text{ m})(0,40 \text{ m})$.

2. Considerando anche il sovraccarico distribuito q_{ik} in superficie, esteso in maniera praticamente illimitata, la sollecitazione di pressione complessiva dovuta ai carichi variabili stradali risulta (valore caratteristico alla quota $z_3 = 4,00 \text{ m}$):

$$(EQN. 2) \quad p_{m,tot} = p(z_3) + q_{ik} = 26,86 \text{ kN/m}^2.$$

STEP 2 Carico lineare globale dei carichi mobili sulla parte superiore del tubo

1. Il diametro esterno della tubazione è $\phi_{est} = 610 \text{ mm}$. L'azione per lunghezza unitaria di fuga del tubo, dovuta all'azione dei carichi variabili (mobili), si calcola quindi come:

$$(EQN. 3) \quad P_s = p_{m,tot} \phi_{est} = (26,86 \text{ kN/m}^2)(0,61 \text{ m}) = 16,38 \text{ kN/m}.$$

STEP 3 Pressione globale dei carichi mobili agente sulla corda superiore del tubo

2. Nei calcoli di verifica statica delle tubazioni, ci si deve riferire in termini di pressioni risultanti agenti sul tubo. Trattandosi, in particolare, di tubo posato in trincea con rinterro indefinito, si hanno condizioni intermedie tra quelle di posa in trincea stretta e posa con rinterro indefinito. Pertanto, sfruttando la formulazione del tutto analoga vista per il caso del carico del rinterro P_v e specificandola per il caso del sovraccarico variabile mobile P_s , si scriverà (si veda analoga trattazione nella (5-14) a pagina 156):

$$(EQN. 4) \quad \frac{P_s}{\phi_{est}} < \bar{p}_s < \sqrt{2} \frac{P_s}{\phi_{est}} \Rightarrow \bar{p}_s \approx \frac{P_s}{0,853 \phi_{est}} = \frac{(16,38 \text{ kN/m})}{0,853(0,61 \text{ m})} = 31,48 \text{ kN/m}^2.$$

(valore medio caratteristico sulla corda intermedia tra ϕ_{est} e $\phi_{est}/\sqrt{2}$).

5-5 FORMULE PER IL CALCOLO E LA VERIFICA: TEORIA DI DE SAEDELEER

Una delle teorie più frequentemente utilizzate per descrivere il comportamento statico delle tubazioni interrato è quella di DE SAEDELEER, secondo cui le reazioni orizzontali uniformi q

del terreno si originano come reazione alle deformazioni del tubo. In campo elastico, questa relazione è di tipo lineare proporzionale:

$$q = K \Delta x \quad (5-19)$$

essendo K un coefficiente di rigidità del terreno, pari alla pressione orizzontale che occorre applicare al terreno di rinterro per produrre una deformazione unitaria.

Il coefficiente K presenta un campo di variazione abbastanza ampio; mediamente per tubi interrati con ricoprimento di rinterro di altezza z rispetto all'asse del tubo variabile da 1 a 5 m circa, si può ritenere:

$$K = (5 \div 25) \frac{z}{10^3} \quad (5-20)$$

con z espresso in metri e K in N/mm^3 . I valori più elevati di K , a parità di quota z al di sotto del piano campagna, si assumeranno per rinterri molto ben costipati. Tuttavia, per tener conto della diminuzione di tale coefficiente K nel tempo è conveniente, cautelativamente, attenersi a valori sensibilmente minori di $25 \cdot 10^3 N/mm^3$ per unità di metro di profondità.

➔ IMPORTANTE

Reazioni orizzontali del terreno per unità di lunghezza del tubo

Secondo la teoria di DE SAEDELEER, per tubi di lunghezza di fuga unitaria soggetti a sollecitazioni flessionali circonferenziali, detti con:

- E il modulo di elasticità del materiale del tubo, in N/mm^2 ;
- p pressione (in N/mm^2) agente sulla corda superiore e inferiore di un tronco di tubazione unitario (adottando i millimetri come unità di misura delle lunghezze, si ha $\ell = 1 mm$ come unità di lunghezza di fuga della tubazione);
- J il momento d'inerzia del tratto di parete di tubo, con sezione resistente di altezza pari allo spessore s del tubo e di larghezza resistente b unitaria, $\ell = 1 mm$ lungo la direzione di fuga: $J = s^3/12 [mm^4/mm]$;
- r raggio mediano del tubo, in mm : $r = (\phi_{int} + s)/2$; essendo ϕ_{int} il diametro interno (utile) del tubo;
- K il coefficiente di rigidità del terreno, in N/mm^3 ,

il valore della pressione di reazione orizzontale q (in N/mm^2) del terreno – che agisce, distribuita uniformemente sulle corde verticali del tubo, indotta dalle deformazioni di ovalizzazione per una pressione p verticale (in N/mm^2) agente quindi sulle due corde orizzontali del tubo – è dato dalla relazione:

$$q = \frac{p}{1,07 + 13,70 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)}, \quad (5-21)$$

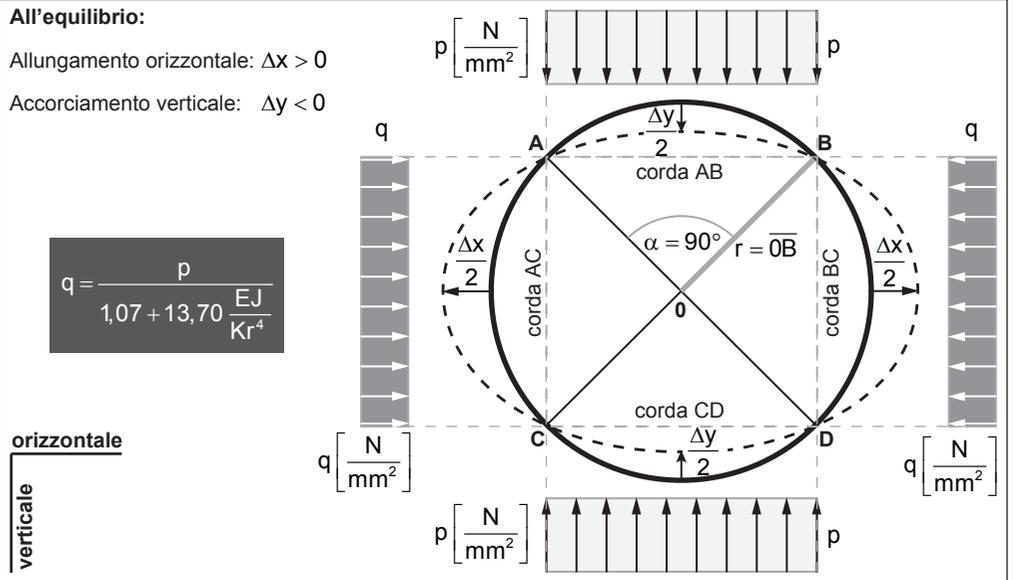
a cui seguiranno delle contrazioni del diametro lungo la verticale paria a $\Delta y < 0$ e degli allungamenti del diametro lungo l'orizzontale pari a $\Delta x > 0$. Questa equazione permette anche di operare una classificazione del comportamento delle tubazioni in base alla loro flessibilità. Le tubazioni per le quali il parametro (adimensionale) $EJ/(K r^4)$ assume valori molto elevati, trasmettono lateralmente al terreno pressioni orizzontali q trascurabili rispetto alle pressioni verticali p di sollecitazione e si comportano quindi come rigide (già per $EJ/(K r^4) = 1$ si ha che q risulta al più pari al 7% di p).

Viceversa, le tubazioni per le quali il numero adimensionale $EJ/(K r^4)$ presenta valori estremamente contenuti si comportano come flessibili e per esse si può arrivare anche a



Figura 5-8

Deformazione (all'equilibrio) di una tubazione dovuta a una pressione p verticale uniformemente distribuita sulle corde orizzontali che sottendono un angolo al centro di 90° e conseguenti pressioni di reazione orizzontale q del terreno distribuite sulle corde verticali che sottendono un angolo al centro di 90° .

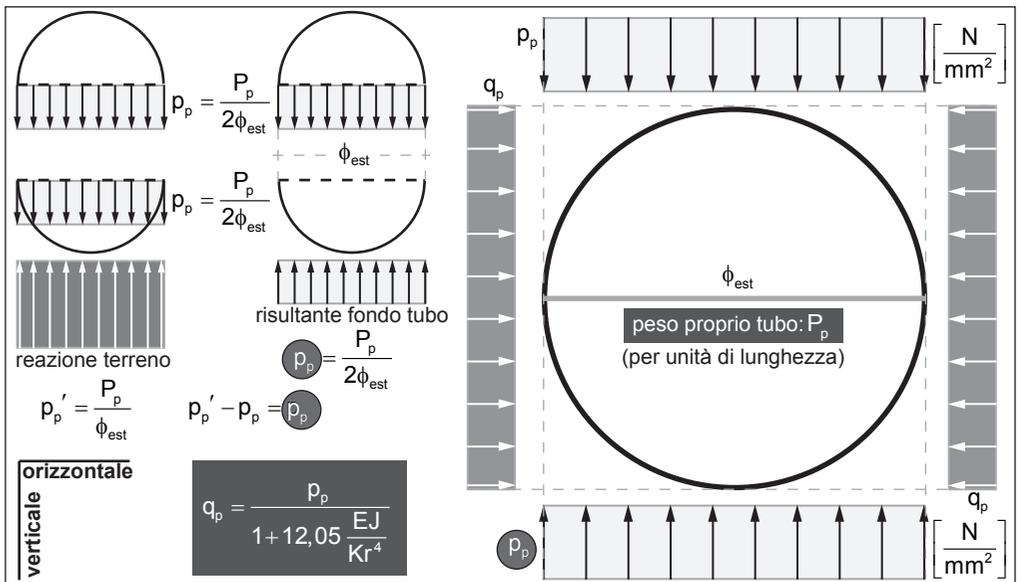


rapporti q/p attorno a 0,93; tale comportamento è quello tipico delle tubazioni di materiale plastico. Accanto a questi due comportamenti estremi, le tubazioni possono presentare ovviamente tutta una gamma di comportamenti intermedi.

Reazioni orizzontali per peso proprio del tubo. Seguendo le ipotesi della teoria di DE SAEDELEER, è possibile valutare le reazioni orizzontali del terreno per ovalizzazione della tubazione a causa del suo solo peso proprio. In tal caso, per utilizzare le formulazioni teoriche è necessario rendere l'effetto del peso proprio del tubo a delle pressioni costanti equivalenti applicate distribuite costanti sulle corde orizzontali $\overline{AB} = \overline{CD}$ quando, in par-

Figura 5-9

Schematizzazione delle pressioni equivalenti all'azione del peso proprio della sola tubazione (vuota), agenti sulle corde pari al diametro (medio) della tubazione.





icolare, queste coincidono con il diametro medio della tubazione: il loro angolo al centro tendendo quindi al valore di $\alpha = 180^\circ$.

Pertanto, come si nota dagli schemi in Figura 5–9, detto con P_p il carico verticale (per unità di lunghezza di fuga della tubazione, in N/mm) dovuto al peso proprio della sola tubazione, e detta con $p_p = 0,5P_p/\phi_{est}$ la relativa pressione equivalente in direzione verticale (agente superiormente e inferiormente contro le pareti esterne del tubo, in N/mm^2), la conseguente pressione orizzontale q_p di reazione (in N/mm^2), agente sulle pareti laterali del tubo, risulta dall'applicazione della seguente formula:

$$q_p = \frac{p_p}{1 + 12,05 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)} = \frac{0,5P_p/\phi_{est}}{1 + 12,05 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)} \quad (5-22)$$

In particolare, tendendo l'effetto del peso proprio P_p della tubazione ad ovalizzarla allungando il suo diametro orizzontale ed accorciando della stessa intensità il diametro verticale (quindi con $\Delta x = \Delta y$ in moduli), le reazioni orizzontali q_p ai lati risulteranno sempre dirette all'interno del tubo (Figura 5–9).

Reazioni orizzontali per peso del liquido nel tubo. È possibile sfruttare la formulazione della (5–22), sostituendo a p_p la pressione equivalente p_w dovuta al peso del liquido all'interno della tubazione. In questo caso, però, è necessario tenere conto del fatto che la pressione per peso proprio del liquido è già diretta all'esterno del tubo e in parte quindi tenderà a contrastare le reazioni indotte di spinta del terreno, che sono rivolte sempre verso l'interno del tubo.

Come noto, la pressione idrostatica di un fluido ha andamento triangolare lungo la verticale. Pertanto, considerando le pressioni dovute al solo peso proprio del liquido convogliato nella tubazione (quindi prescindendo, per il momento, dalle eventuali sovrappressioni o depressioni in tubazione), il valore della pressione in corrispondenza della generatrice inferiore del tubo è proporzionale al suo diametro interno: $p_{w,max} = \gamma_w \phi_{int}$.

Assumendo ora per semplicità una distribuzione di pressione media idrostatica (riferita all'asse del tubo) p_w , questa lungo il diametro verticale del tubo sarà evidentemente pari a:

$$p_w = \frac{0 + p_{w,max}}{2} = \frac{1}{2} \gamma_w \phi_{int}$$

e spingendo verso l'esterno le pareti del tubo, contrasterà annullando in parte la componente di reazione orizzontale del terreno desumibile dalla (5–22). Complessivamente, quindi, il valore netto della reazione di pressione orizzontale (diretta orizzontalmente all'esterno verso terreno), per l'interazione tra deformazione e reazione del terreno, sarà:

$$q_w = - \left(p_w - \frac{p_w}{1 + 12,05 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)} \right) = - 0,5 \gamma_w \phi_{int} \left(1 - \frac{1}{1 + 12,05 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)} \right) \quad (5-23)$$

dove, il segno “meno” è stato esplicitato per tenere conto del fatto che il valore di q_w è da intendersi come valore risultante di pressioni agenti dalla tubazione “contro” il terreno.

Calcolo sollecitazioni. Una volta trovate tutte le sollecitazioni dovute alle forze esterne e interne precedentemente esaminate, si dovranno determinare con i consueti metodi della Scienza delle Costruzioni, le caratteristiche della sollecitazione in tutte le sezioni della tubazione (in particolare, in chiave, nella sezione più bassa sull'appoggio e nelle due sezioni

➔ IMPORTANTE

orizzontali mediane) maggiormente significative perché più critiche dal punto di vista delle tensioni sui materiali.

ESEMPIO 5–5

Calcolo delle pressioni orizzontali agenti su tubazione interrata

Si abbia una tubazione in PEAD DN600, convogliante acqua, posata in una trincea di scavo di lunghezza $B = 1,20 \text{ m}$ al livello della generatrice superiore del tubo e con altezza di ricoprimento sull'estradosso $H = 1,50 \text{ m}$. Il terreno di ricoprimento ha un peso specifico indicativo pari a $\gamma_t = 17 \text{ kN/m}^3$ lungo tutta la profondità interessata dallo scavo. Sul piano campagna è presente inoltre un sovraccarico variabile di $p_0 = 20 \text{ kN/m}^2$ (valore caratteristico) che agisce su una striscia di larghezza $b_0 = 1,00 \text{ m}$ centrata rispetto alla sezione verticale del tubo e di lunghezza considerabile come indefinita: $a_0 = a_z \rightarrow \infty$. Si consideri un angolo di diffusione dei carichi dalla superficie nel terreno di $\alpha = 30^\circ$.

Si calcolino le pressioni orizzontali q_i (valori caratteristici) agenti ai lati della tubazione all'equilibrio dovute alle varie azioni verticali esterne (rinterro e sovraccarichi variabili), al peso proprio della tubazione e dell'acqua convogliata.

Soluzione

Si procede calcolando necessariamente tutti i carichi verticali (riferiti all'unità di lunghezza longitudinale di tubo) e le relative pressioni. Note le pressioni p_i agenti (distribuite a stesa costante) sulle corde orizzontali del tubo, si procede al calcolo delle relative reazioni di pressioni orizzontali indotte a causa dell'ovalizzazione della tubazione all'equilibrio.

Ci si riferirà a soli valori caratteristici delle azioni e quindi delle tensioni, salvo poi portarle ai loro relativi valori di progetto in funzione della normativa di calcolo usata per le verifiche statiche.

STEP 1

Calcolo dati di progetto

1. Dati geometrici della tubazione DN600 in PEAD:
 - modulo di elasticità: $E = 883 \text{ MPa}$;
 - diametro esterno: $\phi_{est} = 630 \text{ mm}$;
 - spessore parete tubo: $s = 35,7 \text{ mm}$;
 - raggio interno (utile) di deflusso: $r_i = 0,5 \cdot \phi_{est} - s = 279,3 \text{ mm}$;
 - raggio mediano del tubo: $r = r_i + s/2 = 297,2 \text{ mm}$.
2. Dati geotecnici dei terreni (di posa e rinterro) e geometria di posa:
 - peso specifico (di rinterro): $\gamma_t = 17,0 \text{ kN/m}^3$;
 - modulo di elasticità normale del terreno (di posa/scavo): $E_{terr,p} = 200 \text{ MPa}$;
 - angolo di posa: $\alpha = 90^\circ$;
 - altezza di proiezione laterale del tubo: $h = h(\alpha) = 538 \text{ mm}$;
 - rapporto di proiezione laterale: $p_j = h/\phi_{est} = (538)/(630) = 0,85$;
 - coefficiente di assestamento: $r_s = 1$ (se posa in trincea larga); $r_s = 0,8 \div 0,5$ (per posa su "terreno ordinario").^(vii)

(vii) Pur essendo per ipotesi il tipo di terreno classificato come "terreno ordinario", il valore del tasso di assestamento è prima subordinato all'accertamento di una posa del tubo di tipo "in trincea larga", indipendentemente dal tipo di terreno. Nel qual caso, si dovrebbe porre $r_s = 1$. Questo valore è quindi da verificare.

STEP 2 Calcolo del sovraccarico (permanente del rinterro)

1. Ci si trova nel caso di tubo in trincea larga ((5–10) a pagina 148):

$$(EQN. 5) \quad P_v = C_d \gamma_t \phi_{est}^2 = 3,8 \cdot (17,00 \text{ kN/m}^3)(0,63 \text{ m})^2 = 25,64 \text{ kN/m (caratteristico)}$$

(si vedano svolgimento calcoli all'Esempio 5–2 a pagina 149);

STEP 3 Calcolo del sovraccarico variabile

1. Il sovraccarico in superficie si sviluppa con una dimensione illimitata. Così sarà anche alla quota della generatrice superiore del tubo ($z = H = 1,50 \text{ m}$). Valore del sovraccarico diffuso a quota $z = 1,50 \text{ m}$ al di sotto del piano campagna (si veda procedura di calcolo analoga nell'Esempio 5–4 a pagina 160):

$$(EQN. 6) \quad p_s = \left(\frac{p_0 S_0}{b_z a_z} \right) = \left(\frac{p_0 a_0 b_0}{(b_0 + 2z \tan \alpha) \cdot a_z} \right) =$$

$$= \frac{(20 \text{ kN/m}^2) a_0 (1,00 \text{ m})}{(1,00 \text{ m} + 2 \cdot (1,50 \text{ m}) \cdot \tan 30^\circ) \cdot a_z} = 7,32 \text{ kN/m}^2$$

2. L'azione del sovraccarico variabile per unità di lunghezza di fuga del tubo si calcola moltiplicando p_s per il diametro esterno ϕ_{est} del tubo (pari alla larghezza di influenza di pertinenza del sovraccarico sulla tubazione):

$$(EQN. 7) \quad P_s = p_s \cdot \phi_{est} = (7,32 \text{ kN/m}^2)(0,63 \text{ m}) = 4,61 \text{ kN/m (caratteristico)}.$$

STEP 4 Calcolo delle pressioni verticali effettivamente agenti sulla tubazione

1. Una volta calcolate le azioni verticali P_v e P_s (riferite all'unità di lunghezza di fuga unitaria della tubazione), è necessario determinare come esse si distribuiscano effettivamente al contatto con le pareti esterne della tubazione (si veda quanto detto a proposito al paragrafo 5–4 a pagina 156). Supponendo che entrambe le azioni verticali si distribuiscano uniformemente sulla corda superiore \overline{AB} di tubazione, si ha:^(viii)

$$(EQN. 8) \quad \begin{cases} p_v = \sqrt{2} \frac{P_v}{\phi_{est}} = \sqrt{2} \frac{(25,64 \text{ kN/m})}{(0,63 \text{ m})} = 57,56 \text{ kN/m}^2 \\ p_s = \sqrt{2} \frac{P_s}{\phi_{est}} = \sqrt{2} \frac{(4,61 \text{ kN/m})}{(0,63 \text{ m})} = 10,35 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

STEP 5 Calcolo delle pressioni per peso proprio tubazione e fluido all'interno

1. Una tubazione in PEAD DN600 (diametro esterno 630 mm e spessore pareti 35,7 mm) ha un peso proprio a metro lineare pari a: $P_p = 0,621 \text{ kN/m}$.
2. La pressione equivalente (Figura 5–9 a pagina 163) per azione del peso proprio della sola tubazione è:

$$(EQN. 9) \quad p_p = \frac{1}{2} \frac{P_p}{\phi_{est}} = \frac{1}{2} \frac{(0,621 \text{ kN/m})}{(0,63 \text{ m})} = 0,49 \text{ kN/m}^2$$

(viii) Essendo le condizioni di posa, nel caso in oggetto, quelle di "posa in trincea larga" andrebbe applicata la formulazione (5–14) a pagina 156 che fornisce un range di variazione su cui scegliere. Per sicurezza, si prende l'estremo maggiore relativo di fatto ad una "posa in trincea stretta" ((5–12) a pagina 156).

3. Il valore medio della differenza delle pressioni idrostatiche, tra la sezione di chiave e il punto diametrale interno sull'alveo della tubazione, dovuta quindi al solo peso di fluido al suo interno (e quindi prescindendo dall'entità del carico piezometrico in condotta) è:

$$\begin{aligned} p_w &= \frac{1}{2} \gamma_w \phi_{int} = \frac{1}{2} \gamma_w (\phi_{est} - 2s) = \\ (EQN. 10) \quad &= \frac{1}{2} (9,81 \text{ kN/m}^3) \frac{(630 - 2 \cdot 35,7) \text{ mm}}{(10^3 \text{ mm/m})} = 2,74 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

STEP 6 **Calcolo del parametro adimensionale EJ/(Kr⁴)**

1. Stima del coefficiente di rigidità K del terreno ((5–20) a pagina 162):
- per tener conto della diminuzione di tale coefficiente K nel tempo, cautelativamente, ci si attiene a valori attorno a $10 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^3$ per unità di metro di profondità:

$$(EQN. 11) \quad K = 10 \cdot \frac{z}{10^3} = 10 \cdot \frac{(H + \phi_{est})}{10^3} \approx \frac{20}{10^3} \text{ N/mm}^3.$$

2. Calcolo del parametro adimensionale di rapporto delle rigidezze:

- Modulo elastico materiale PEAD: $E = 883 \text{ N/mm}^2$.
- Momento d'inerzia J della parete di tubo di altezza pari allo spessore $s = 35,7 \text{ mm}$ ed espressa per unità di larghezza resistente ($b = 1 \text{ mm}$):

$$(EQN. 12) \quad J = \frac{s^3}{12} = \frac{(35,7 \text{ mm})^3}{12} = 3792 \text{ mm}^4/\text{mm}.$$

- Raggio mediano del tubo:

$$(EQN. 13) \quad r = (\phi_{est} - s)/2 = \frac{(630 - 35,7) \text{ mm}}{2} \approx 297 \text{ mm}.$$

3. Valore del parametro adimensionale:

$$(EQN. 14) \quad \frac{EJ}{Kr^4} = \frac{(883 \text{ N/mm}^2)(3792 \text{ mm}^4/\text{mm})}{\left(\frac{20}{10^3} \text{ N/mm}^3\right)(297 \text{ mm})^4} \approx 0,02152 [-].$$

STEP 7 **Calcolo delle pressioni di reazione orizzontale del terreno (valori caratteristici all'equilibrio)**

1. Pressione orizzontale come reazione del terreno all'effetto del rinterro:^(ix)

$$(EQN. 15) \quad q_v = \frac{p_v}{1,07 + 13,70 \left(\frac{EJ}{Kr^4}\right)} = \frac{(57,56 \text{ kN/m}^2)}{1,07 + 13,70 \cdot 0,02152} = 42,17 \text{ kN/m}^2$$

2. Pressione orizzontale come reazione del terreno all'effetto del variabile in superficie:

$$(EQN. 16) \quad q_s = \frac{p_s}{1,07 + 13,70 \left(\frac{EJ}{Kr^4}\right)} = \frac{(10,35 \text{ kN/m}^2)}{1,07 + 13,70 \cdot 0,02152} = 7,58 \text{ kN/m}^2$$

(ix) Si vedano, nell'ordine, le espressioni: (5–21) a pagina 162; (5–22) e (5–23) a pagina 164.

3. Pressione orizzontale del terreno dovuto al peso proprio della sola tubazione:

$$(EQN. 17) \quad q_p = \frac{p_p}{1 + 12,05 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)} = \frac{(0,49 \text{ kN/m}^2)}{1 + 12,05 \cdot 0,02152} = 0,39 \text{ kN/m}^2$$

4. Pressione (netta) orizzontale “contro” il terreno, dovuta alla massa liquida nel tubo:

$$(EQN. 18) \quad q_w = -p_w \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 12,05 \left(\frac{EJ}{K r^4} \right)} \right) = \\ = -(2,74 \text{ kN/m}^2) \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 12,05 \cdot 0,02152} \right) = -0,56 \text{ kN/m}^2$$

STEP 8 **Calcolo delle pressioni di progetto^(x) SLU (secondo EN 1997-1/Annex A)**

1. I fattori parziali di sicurezza sulle azioni geotecniche sono reperibili nell'Allegato A della norma EN 1997-1.^(xi) Nelle condizioni più comuni, per lo stato limite ultimo STR/GEO (set A1), si adotteranno i seguenti coefficienti parziali sulle azioni (e quindi sulle tensioni da essi indotte):

- azioni permanenti sfavorevoli: $\gamma_G = 1,35$;
- azioni permanenti favorevoli: $\gamma_G = 1$;
- azioni variabili sfavorevoli: $\gamma_Q = 1,50$;
- azioni variabili favorevoli: $\gamma_Q = 0$.

2. Considerando gli effetti dei pesi propri (peso della tubazione e del liquido convogliato) e dei permanenti portati (peso del rinterro) come azioni permanenti, e gli effetti dei sovraccarichi in superficie (variabili fissi o mobili) come azioni appunto variabili, le tensioni di progetto allo SLU quando sfavorevoli (**) o favorevoli (*) sono:

- tensione di progetto (verticale) del peso del rinterro:

$$p_{1,v} = \gamma_G \cdot p_v = 1,35 \cdot (57,56 \text{ kN/m}^2) = 77,71 \text{ kN/m}^2 (**); (57,56 \text{ kN/m}^2) (*);$$

- tensione di progetto (verticale) del variabile in superficie:

$$p_{1,s} = \gamma_G \cdot p_s = 1,50 \cdot (10,35 \text{ kN/m}^2) = 15,53 \text{ kN/m}^2 (**); (0 \text{ kN/m}^2) (*);$$

- tensione di progetto (orizzontale) del terreno causa il peso del rinterro:

$$q_{2,v} = \gamma_Q \cdot q_v = 1,35 \cdot (42,17 \text{ kN/m}^2) = 56,93 \text{ kN/m}^2 (**); (42,17 \text{ kN/m}^2) (*);$$

- tensione di progetto (orizzontale) del terreno causa il variabile in superficie:

$$q_{2,s} = \gamma_Q \cdot q_s = 1,50 \cdot (7,58 \text{ kN/m}^2) = 11,37 \text{ kN/m}^2 (**); (0 \text{ kN/m}^2) (*);$$

- tensione di progetto (verticale) per peso proprio tubazione:

$$p_{3,p} = \gamma_G \cdot p_p = 1,35 \cdot (0,49 \text{ kN/m}^2) = 0,66 \text{ kN/m}^2 (**); (0,49 \text{ kN/m}^2) (*);$$

- tensione di progetto (orizzontale) del terreno per peso tubazione:

$$q_{4,p} = \gamma_G \cdot q_p = 1,35 \cdot (0,39 \text{ kN/m}^2) = 0,53 \text{ kN/m}^2 (**); (0,39 \text{ kN/m}^2) (*);$$

(x) Si veda a tal proposito, più avanti, nota a piè di pagina 171.

(xi) O nella norma tecnica italiana (Norme Tecniche per le Costruzioni).

- tensione di progetto (netta orizzontale), equilibrio peso fluido “contro” il terreno:

$$q_{5,w} = \gamma_G \cdot q_{pw} = 1,35 \cdot (-0,56 \text{ kN/m}^2) = -0,76 \text{ kN/m}^2 (**);$$

$$(-0,39 \text{ kN/m}^2) (*);$$

3. Pressioni di progetto SLU da utilizzare per la verifica di resistenza statica:

Tabella 5-4

Tensioni SLU da considerare per le verifiche di resistenza delle pareti della tubazione.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| p_1 [kN/m ²] | q_2 [kN/m ²] | p_3 [kN/m ²] | q_4 [kN/m ²] | q_5 [kN/m ²] |
| 77,71 + 15,53 | 56,93 + 11,37 | 0,66 | 0,53 | -0,76 |
| 77,71 | 56,93 | 0,66 | 0,53 | -0,76 |

Nota: incorniciati i valori con variabile in superficie considerato favorevole: $\gamma_Q = 0$.

Nota. Come si può notare, per una tubazione in PEAD, le tensioni p_3 e q_4 dovute rispettivamente al peso proprio della tubazione e alla reazione orizzontale del terreno di rinterro che sorge per effetto di tale peso risultano completamente trascurabili (ciò lo è ragionevolmente anche per qualsiasi altro materiale a parità di condizioni geometriche). Le tensioni q_5 che si hanno per effetto combinato della pressione orizzontale p_w (valore caratteristico) dovuto al peso di liquido contenuto nella condotta e della relativa reazione laterale del terreno sono anch'esse trascurabili perché la tubazione in oggetto ha un comportamento flessibile. Un'analogia tubazione in cemento amianto, invece, essendo di un materiale dal comportamento estremamente rigido, risentendo maggiormente della sola pressione del liquido avrebbe praticamente portato il valore di progetto q_5 a coincidere con il valore di progetto della differenza media di pressione idrostatica p_w e appunto con un valore relativamente più intenso per q_5 rispetto ad un'analogia tubazione di tipo però flessibile.

Come era prevedibile, le tensioni di progetto più elevate sono quindi quelle dovute al peso del rinterro, al sovraccarico in superficie e alle pressioni laterali di progetto cui queste danno luogo. Utilizzando i 5 valori di tensione di riferimento, è possibile risalire alle sollecitazioni flettenti che sollecitano le pareti del tubo. Come indicativi per le tensioni, si sono utilizzate la lettera “ p ” per ricordare che la relativa tensione agisce verticalmente, mentre con la lettera “ q ” per ricordare che la relativa tensione agisce orizzontalmente.

Calcolo delle sollecitazioni flettenti nelle sezioni significative del tubo

Una volta calcolate le principali tensioni agenti sui punti significativi della tubazione, andranno determinati i massimi valori delle caratteristiche della sollecitazione tramite gli usuali metodi di *Scienza delle Costruzioni*. Secondo la teoria fin qui vista, le cinque tensioni più significative (indicate, più sopra, con i simboli: p_1 , q_2 , p_3 , q_4 e q_5) daranno luogo alle sollecitazioni circonferenziali che intervengono nella verifica statica della tubazione, per deformazioni di sola ovalizzazione. In altre parole, si suppone che le condizioni geometriche, di carico e vincolo sulla generica sezione trasversale sia rappresentativa di una qualsiasi altra sezione trasversale lungo l'intera lunghezza l (effettiva) della condotta.

In particolare, avendo riferito tutte le sollecitazioni all'unità di lunghezza di fuga della tubazione interrata, le sollecitazioni più importanti sono le sollecitazioni flettenti circonfere-